Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

3. Mai 2011

Sobolevräume und Variationsrechnung
Übung 02

Gruppenübung:

Definition und Schreibweise: Seien $u, f \in L^1_{loc}(X)$. Dann nennen wir u „schwache Lösung“ von $P(\partial)u = f$ wenn

$$\forall \varphi \in C^0_\infty(X) \quad \langle u \, , \, {}^tP(\partial)\varphi \rangle = \langle f, \varphi \rangle$$

Hierbei bezeichnen wir mit $P(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \partial^\alpha$ und ${}^tP(\partial) := \sum_{|\alpha| \leq m} (-1)^{|\alpha|} \overline{a_\alpha}\, \partial^\alpha$ das m-te Differentialpolynom mit Koeffizienten $a_\alpha \in \mathbb{K}$ und sein zugehöriges formal adjungiertes Differentialpolynom.

Aufgabe 1:
Für welche $p \in [1, \infty), N \in \mathbb{N}$ und $s \in \mathbb{R}$ liegt

$$u_s(x) := |x|^s$$

in $W^{1,p}(U),\ U := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x| < 1\}$?

Aufgabe 2:

Wir definieren $I(v) := \int_{-1}^1 x^2 (v')^2 \; dx,\ v \in D := \{C^1[-1,1] | v(-1) - 1, v(1) = 1\}$. Offensichtlich gilt $I(v) \geq 0$. Beweisen Sie:

1. $\lim_{n\to\infty} I(v_n) = 0$ für die Folge $v_n(x) := \frac{\arctan(nx)}{\arctan(n)}$
2. Es gibt kein Element in D, das I minimiert.

Aufgabe 3:

Es sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$.Was ist das orthogonale Komplement von $C^0_\infty(X)$ in $H^1(X)$.

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:

Gleiches Problem wie in der Präsenzaufgabe 1, wenn dort U durch $\mathbb{R}^N \backslash U$ ersetzt wird.

Aufgabe 2:
Sei X eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$. Es sei $a \in C^2(X)$ und alle $\partial^\alpha a, |\alpha| \leq 2$ seien beschränkt in X. Zeigen Sie:

$$u \in U \Rightarrow a \cdot u \in U$$

für

$$U := \{u \in W^{1,p}(X) \mid \Delta u \in L^p(X)\}\ ,\ \Delta := \sum_{n=1}^{N} \partial_n^2$$

Hinweis: Was ist $\Delta(a \cdot u)$ für $u \in U$?

Aufgabe 3:
Es sei $U \in C^0(\mathbb{R})$ und $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ und

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto U(x_1 + x_2).$$

Zeigen Sie, dass dann

$$P(\partial)u = 0\ ,\ P(\partial) := \partial_1^2 - \partial_2^2$$

im schwachen Sinne gilt.
Anleitung: Werten Sie für $\phi \in C_\infty^0(\mathbb{R}^2)$ das Integral

$$\int_{\mathbb{R}^2} u(x) \cdot P(\partial)\phi(x) dx$$

mit Hilfe der Substitution $x = \Phi(y) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ aus.