Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

10.5.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 03

Gruppenübung:

In dieser Übung sei X immer ein C^1-Gebiet im $\mathbb{R}^N$.

Aufgabe 1:
Wir wollen den Beweis von Lemma 3.11 nachvollziehen:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen und $\{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ eine offene lokalendliche Überdeckung von Ω. Ist jedes der U_i beschränkt mit $\bar{U}_i \subset \Omega$, dann existiert eine dieser Überdeckung untergeordnete Zerlegung der Eins $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Aufgabe 2:
Die Funktion $F \in C^1(\mathbb{R})$ habe die Eigenschaften

$$\begin{aligned} F(0) &= 0 \\ \exists\, L \in \mathbb{R}_+ \forall\, t \in \mathbb{R} :\ |F'(t)| &\leq L. \end{aligned}$$

Zeigen Sie für $u \in H^1(X) = W^{1,2}(X)$:

$$\begin{aligned} F \circ u &\in H^1(X) \\ \partial_n(F \circ u) &= F' \circ u \cdot \partial_n u. \end{aligned}$$

Hausübung:

Aufgabe 1:

Zeigen Sie:

$$u, v \in H^1(X) \Rightarrow |u|, \min\{u, v\}, \max\{u, v\} \in H^1(X).$$

Betrachten Sie $F_\epsilon \circ u$ mit $F_\epsilon(s) := (\epsilon^2 + s^2)^{1/2} - \epsilon$. Wogegen konvergiert $F'_\epsilon \circ u$?

Aufgabe 2:

Sei $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $\varphi \in \overset{\circ}{C}_\infty(\mathbb{R}^n)$ Dann ist $F = \varphi * f \in C^p_\infty(\mathbb{R}^n)$, und die partiellen Ableitungen erhält man durch Ableiten unter dem Integral.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass mit $\psi(x) = \exp\left(-\frac{1}{1-|x|^2}\right), |x| < 1, \psi(x) = 0$ sonst, durch

$$\varphi(x) = \frac{1}{||\psi||_1}, \quad \varphi_\epsilon(x) = \epsilon^{-n}\varphi(\frac{x}{\epsilon})$$

eine Dirac-Familie definiert wird.