Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

17.05.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 04

Gruppenübung:

Aufgabe 1:
Wir definieren

$$H^{m,p}(X) := \{u \in L^p(X) |\ \exists (u_k)_{k\in\mathbb{N}} \in L^p(X) \cap C^m(X) \text{ mit } u_k \xrightarrow{L^p} u \\ \wedge \forall |\alpha| \leq m\ \partial^\alpha u_k \text{ Cauchyfolge in } L^p(X)\}.$$

Wir wollen beweisen: $H^{m,p}(X) = W^{m,p}(X)$.

Aufgabe 2:
Sei $\alpha > 1$ und

$$X := \{x \in \mathbb{R}^2 \ :\ 0 < x_1 < 1 \wedge 0 < x_2 < x_1^\alpha\}.$$

Zeigen Sie, dass es dann ein $p > 2$ gibt, so dass

$$u(x) := \ln(|x|)$$

zu $W^{1,p}$ gehört.

Aufgabe 3:
Für $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ gelte $u, \partial_k u \in L^p(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$. Zeigen Sie, das hieraus $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ folgt.

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:

1. Wir definieren $u(x) := \ln(|x|),\ x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$. Untersuchen Sie, für welche n dann u schwache Ableitungen besitzt.

2. Sei u definiert als die charakteristische Funktion der Einheitskugel im $\mathbb{R}^n$, $u(x) := \chi_{K(0,1)}$. Hat u schwache Ableitungen?

Aufgabe 2:
Konstruieren Sie ein entsprechendes Beispiel wie in Präsenzaufgabe 2 mit einem Gebiet $X \subset \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3:
Beweisen Sie folgende Variante der Poincareschen Ungleichung:
Sei X (offen) $\subset \{x \in \mathbb{R}^n\ :\ x_n < d\},\ d \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt für alle $u \in W_0^{1,p}(X)$:

$$|u|_{L^p(X)} \leq d \cdot |\nabla u|_{L^p(X)}$$

Aufgabe 4:
Sei

$$\begin{aligned} u : U &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \ln\left(\ln(1 + |x|^{-1})\right), \end{aligned}$$

mit $U := \{x \in \mathbb{R}^2\ :\ |x| < 1/2\}$. Für welche $p \geq 1$ liegt u in $W^{1,p}(U)$?
Für die Abschätzungen der Integrale ist die Ungleichung

$$r^{-1} < 1 + r^{-1} < 2 \cdot r^{-1} \quad \text{für} \quad r \in (0,1)$$

hilfreich.