Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

31.05.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 06

Gruppenübung:

Aufgabe 1:
Für das Funktional $I(y) := \int_a^b F(x, y, y')dx$ sei die Lagrange-Funktion $F : [a, b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezüglich aller drei Variablen zweimal stetig differenzierbar und $y \in C^1[a, b]$ erfülle die Euler-Lagrange Gleichung

$$\frac{d}{dx} F_{y'}(\cdot, y, y') = F_y(\cdot, y, y') \quad \text{auf} \quad [a, b.]$$

Man beweise: Gilt $F_{y'y'}(x_0, y(x_0), y'(x_0)) \neq 0$ für $x_0 \in [a, b]$, so ist y in einer Umgebung von x_0 zweimal stetig nach x differenzierbar.

Hinweis: Man wende das Theorem über implizite Funktionen an.

Aufgabe 2:
Wir wollen das Problem der Dido betrachten.
Welche Kurve vorgegebener Länge L in der oberen Halbebene mit Endpunkten auf der x-Achse schließt mit derselben eine Fläche größten Inhalts ein?

Aufgabe 3:
Die Voraussetzungen von Satz 4.3 seien erfüllt. Wir wollen beweisen: Neben der Euler-Lagrange Gleichung gelten weiterhin auch die „natürlichen Randbedingungen“

$$F_{y'}(a, y(a), y'(a))) = 0 \quad \text{und}$$
$$F_{y'}(b, y(b), y'(b)) = 0.$$

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:
Man berechne alle Lösungen der Euler-Lagrange Gleichung von

$$I(y) = \int_0^1 (y')^2 + y \, dx$$

in$D = C^1[0,1]$.

1. Welche Lösungen erfüllen die natürlichen Randbedingungen?
2. Welche Lösungen erfüllen die Randbedinungen $y(0) = 0, y(1) = 1$?
3. Ist die Lösung aus (b) extremal?

Aufgabe 2:
Besitzt das Funktional

$$I(y) = \int_a^b (y')^2 + \arctan(y) \, dx$$

globale Minimierer in $C^1[a,b]$? Ist das Funktional nach unten beschränkt?

Aufgabe 3:
Sei $F \in C^2([a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Es gebe $\Phi \in C^3([a,b] \times \mathbb{R})$ mit $\Phi(a,\alpha) = \Phi(b,\beta)$ so dass gilt:

$$\begin{aligned} (y,\xi) \to \tilde{F}(x,y,\xi) \quad &\text{ist konvex für alle } x \in [a,b], \\ \tilde{F}(x,y,\xi) := f(x,y,\xi) &+ \Phi_y(x,y) \cdot \xi + \Phi_x(x,y). \end{aligned}$$

Dann ist jede Lösung $\bar{y}$ der Euler-Lagrange Gleichung ein Minimierer des Funktionals

$$I(u) := \int_a^b F(x, u(x), u'(x)) \, dx.$$