Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

7.06.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 07

Gruppenübung:

Aufgabe 1:
Wir wollen die zweite Form der Euler-Lagrange Gleichung herleiten, indem wir die „unabhängigen Variablen" variieren. Sei hierzu $\epsilon \in \mathbb{R}, \varphi \in C_0^\infty([a,b]), \lambda = (2||\varphi'||_{L^\infty})^{-1}$. Dann definieren wir für einen Minimierer u

$$\begin{aligned} \xi(x,\epsilon) := x + \epsilon\lambda\varphi(x) = y, \\ u^\epsilon = u(\xi(x,\epsilon)). \end{aligned}$$

Betrachte sodann $I(u^\epsilon)$.

Aufgabe 2:
Definition: Ein Funktional

$$\begin{aligned} I(x,y) := \int_{t_a}^{t_b} \Phi(x,y,\dot{x},\dot{y})dt, \text{definiert auf} \\ D \subset C^1([t_a,t_b])^2 \Phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R} \end{aligned}$$

heißt ein Funktional in parametrischer Form. Wir nennen das Funktional in parametrischer Form invariant, falls

$$\Phi(x,y,\alpha\dot{x},\alpha\dot{y}) = \alpha\Phi(x,y,\dot{x},\dot{y}).$$

1. Wir wollen die erste Variation und die Euler-Lagrange Gleichungen bestimmen.

2. Wir wollen das Funktional untersuchen, wenn die Kurve $\{x,y\}$ einer Umparametrisierung φ unterworfen wird,genauer: $\varphi \in C^1([\tau_a,\tau_b])$ mit $\varphi(\tau_a) = t_a, \varphi(\tau_b) = t_b, \frac{d\varphi}{d\tau}(\tau) > 0$.

Aufgabe 3:
Zeigen Sie: Zu jedem kompakten Intervall $I \subset (a,b) \subset \mathbb{R}$ gibt es eine Folge $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^1([a,b])$ mit den Eigenschaften

1. $\mathrm{supp}(\varphi_n) \subset I \quad$ für alle $\quad n \geq n_0$

2. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n^2 \, dx = 0$

3. $\lim_{n\to\infty} \int_a^b (\frac{d}{dx}\varphi_n)^2 \, dx = \infty$

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:
Für alle $u, v \in C^1(-1,1) \cap \{y(-1) = y(1) = 0\}$ gilt

$$\int_{-1}^{1} (u'^2 + v'^2)\, dx \geq 2\pi \int_{-1}^{1} uv'\, dx.$$

Die Gleichheit gilt genau dann wenn

$$(u(x) - r_1)^2 + (v(x) - r_2)^2 = r_3^2,\ \forall x \in [-1,1].$$

mit $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2:
Es sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x \in D := (C^1([t_a, t_b]))^n \cap \{x(t_a) = A, x(t_b) = B\}$. Wir definieren das Funktional

$$I(x) := \int_{t_a}^{t_b} \langle F(x), \dot{x} \rangle\, dt$$

mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ im $\mathbb{R}^n$.

1. Bestimmen Sie die erste Variation $\delta I(x) : (C_0^1([t_a, t_b]))^n \to \mathbb{R}$
2. Geben Sie das Sytem der Euler-Lagrange Gleichungen an. Besitzt dies in jedem Fall Lösungen in D?
3. Es gelte

   $$\frac{\partial F_i}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial F_k}{\partial x_i} \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad i, k = 1...n.$$

   Zeigen Sie, dass dann $\delta I(x) = 0$ für alle $x \in D$ gilt und somit jedes $x \in D$ die ELG löst. Was bedeutet dies für das Funktional I?

Aufgabe 3:
Wir setzen $F_{yy'} \in C^1[a,b]$ voraus. Zeigen Sie: Für einen Minimierer $y \in C^1([a,b])$ gilt:

$$F_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \geq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b].$$

Verwenden Sie hierzu die Präsenzaufgabe 3 dieses Blattes sowie die Darstellung der zweiten Variation vom vorletzten Blatt.