Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

5.7.2011

# Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 10

## Gruppenübung:

**Aufgabe 1:**
Seien $E, F$ normierte $\mathbb{R}$-Vektorräume und sei $T : E \to F$ linear. Dann sind äquivalent:

1. $x_\lambda \rightharpoonup x \quad \Rightarrow \quad T(x_\lambda) \rightharpoonup T(x)$
2. $||x_\lambda - x|| \to 0 \quad \Rightarrow \quad T(x_\lambda) \rightharpoonup T(x)$
3. $||x_\lambda - x|| \to 0 \quad \Rightarrow \quad ||T(x_\lambda) - T(x)||$

**Aufgabe 2:**

Sei $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ eine beliebige Funktion. Dann sind äquivalent:

1. $f$ ist unterhalbstetig
2. $\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ ist abgeschlossen für alle $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. epi$f$ ist eine abgeschlossene Menge in $\mathbb{R}^{n+1}$

**Aufgabe 3:**

Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex, unterhalbstetig, und $f \neq \infty$. Dann sind äquivalent:

1. $x^* \in \partial f(x)$
2. $\langle x^*, z\rangle - f(z)$ nimmt sein Maximum bei $x = z$ an.

Wir definieren weiterhin „die Ableitung von $x$ in Richtung $y$“, falls sie existiert durch

$$f'(x, y) := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

und wollen zeigen:
Ist $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ konvex, unterhalbstetig, $f \neq \infty$ und $f(x) < \infty$, dann gilt:

1. $f'(x, y) := \inf_{\lambda > 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}$
2. $y \to f'(x, y)$ ist konvex und
3. $x^* \in \partial f(x)$ genau dann wenn $f'(x, y) \geq \langle x^*, y\rangle$ für alle $y \in \mathbb{R}^N$.
4. $\partial f(x)$ ist nichtleer, konvex und kompakt.

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

# Hausübung:

**Aufgabe 1:**

$f$ ist unterhalbstetig, falls die Menge $\{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > C\}$ für alle $C \in \mathbb{R}$ offen ist. Sei $M \subset \mathbb{R}^N$ eine nichtleere Teilmenge. Zeigen Sie:

1. $\chi_M$ ist genau dann unterhalbstetig, wenn $M$ offen ist.
2. $f$ ist genau dann stetig, wenn $f$ und $-f$ unterhalbstetig sind.

**Aufgabe 2:**

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \left\{ \begin{array}{ccc} -x+1 & : & x \leq 1 \\ (x-1)^2 & : & x > 1 \end{array} \right\}$$

Bestimmen Sie das Subdifferential an der Stelle $x = 1$ und $x = 4$.

**Aufgabe 3:**

Sei $f\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}, f \in C^1(\mathbb{R}^N)$ und $\langle , \rangle$ bezeichne das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^N$.
Es sind äquivalent:

1. $f$ ist konvex
2. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt
$$f(y) \geq f(x) + \langle y - x, \nabla f(x) \rangle$$
3. Für alle $x, y \in \mathbb{R}^N$ gilt
$$\langle x - y, \nabla f(y) - f(x) \rangle$$

Für $f \in C^2(\mathbb{R}^N)$ ist $f$ konvex genau dann wenn die Hessesche Matrix psoitiv semidefinit ist.