Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

12.07.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 11

Gruppenübung:

Aufgabe 1:

Die Lagrange-Funkion $F : [a,b] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig und bezüglich der dritten Variablen stetig patiell differenzierbar. Wir setzen für alle $x \in [a,b]$ und für alle $y, y' \in \mathbb{R}$ voraus:

$$F(x,y,y') \geq c_1(y')^2 - c_2 \quad \text{mit} \quad c_1 > 0 \quad \text{(Koerzitivität)},$$
$$F(x,y,\bar{y}) \geq F(x,y,y') + F_{y'}(x,y,y')(\bar{y}' - y'),$$
partielle Konvexität bezüglich der Variablen y'.

Dann besitzt das Funktional $I(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$ einen globalen Minimierer $y_0 \in D = \{y(a) = A, y(b) = B\} \cap W^{1,2}(a,b)$.

Aufgabe 2:

Es mögen alle Voraussetzungen von Aufgabe 1 gelten. Weiter wollen wir Wachstumsbedingungen für F voraussetzen.

$$|F_y(x,y,y')| \leq f_1(x,y)(y')^2 + f_2(x,y),$$
$$|F_{y'}(x,y,y')| \leq g_1(x,y)|y'| + g_2(x,y),$$
$$f_i, g_i[a,b] \times \mathbb{R} \to \times\mathbb{R} \quad \text{sind stetig.}$$

Dann ist $I : W^{1,2} \to \mathbb{R}$ stetig und es existiert die erste Variation

$$\delta I(y)h = \int_a^b F_y(x,y,y')h + F_{y'}(x,y,y')h'dx$$

für alle $y, h \in W^{1,2}(a,b)$.

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:

Anstelle der in Präsenzaufgabe 1 vorausgesetzten Koerzitivität wollen wir

$$F(x,y,y') \geq c_1(y')^2 - c_2|y|^q - c_3$$

mit $c_1 > 0$ und $1 \leq q < 2$ voraussetzen. Zeigen Sie, dass die Aussage weiterhin gilt und geben Sie die entsprechenden Modifikationen an.

Aufgabe 2:

Wir verschärfen die Wachstumbedinungen zu

$$\begin{aligned} |F_y(x,y,y')| &\leq f_1(x,y)|(y')| + f_2(x,y), \\ |F_{y'}(x,y,y')| &\leq g_1(x,y)|y'| + g_2(x,y), \\ f_i, g_i[a,b] \times \mathbb{R} &\to \times\mathbb{R} \quad \text{sind stetig.} \end{aligned}$$

Dann besitzt das Funktional einen globalen Minimierer $y_0 \in W^{1,2}(a,b) \cap \{y(a) = A, y(b) = B\}$, der die Euler-Lagrange-Gleichung im schwachen Sinne löst,d.h.

$$\int_a^b F_y(x,y_0,y_0')h + F_{y'}(x,y_0,y_0')h'dx = 0$$

Es gilt also die Euler-Lagrange-Gleichung

$$\frac{d}{dx}F_y(x,y_0,y_0') = F_{y'}(x,y_0,y_0').$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie die Präsenzaufgabe 2 von Blatt 2. Welche Voraussetzung der Präsenzaufgabe 1 ist nicht erfüllt. Zeigen Sie weiterhin, dass die angegebene Minimalfolge in $W^{1,2}(-1,1)$ nicht beschränkt ist.