Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen

28.6.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung, Übung 09

Gruppenübung:

Aufgabe 1:

Wir wollen den Rieszschen Darstellungssatz beweisen. Sei H ein Hilbertraum und $f : H \to \mathbb{K}$ ein stetiges lineares Funktional. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $y \in H$, so dass für alle $x \in H$ gilt:

$$f(x) = \langle x, y \rangle.$$

Aufgabe 2:

Wir wollen die Trennung konvexer Mengen im $\mathbb{R}^N$ beweisen. Genauer: Seien $F \subset \mathbb{R}^N$ nichtleer,disjunkt und konvex. Sei E abgeschlossen und F kompakt. Dann gibt es eine Hyperebene, die E und F strikt trennt.

Aufgabe 3:

Sei X ein separabler (d.h. X enthält eine abzählbare dichte Teilmenge $\{x_j | j \in \mathbb{N}\}$) Banachraum. Dann enthält $x_k^{'}$ eine schwach-$*$-konvergente Teilfolge $y_k^{'}$,d.h.

$$\exists\, y' \in X' \;\forall\, x \in X : \quad y_k^{'}(x) \to y'(x).$$

Die Übungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:
Zeigen Sie: Für das eindeutig bestimmte Element y im Rieszschen Darstellungssatz gilt:

$$||y|| = ||f||.$$

Es stimmt also die Operatornorm von f mit der Norm von y überein. Zeigen Sie weiterhin folgende Äquivalenz:
Es sei H ein Hilbertraum und $f : H \to \mathbb{R}$ ein lineares Funktional. Es sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. f ist stetig in 0.
3. f ist beschränkt,d.h. $||f|| < \infty$.

Aufgabe 2:

Sei X ein normierter Raum und A eine abgeschlossene Teilmenge von X.

1. Die Abbildung

$$X \ni x \mapsto d(x, A) := \inf_{a \in A} ||x - a||$$

   ist Lipschitzstetig auf X und $A = \{x \in X \mid d(x, A) = 0\}$.

2. Beweisen Sie anschließend das Lemma von Riesz: Ist $A \neq X$ ein abgeschlossener Unterraum von X, so gibt es zu jedem $\delta > 0$ ein $x \in X$ mit $||x|| = 1$ und $d(x, A) \geq 1 - \delta$.

Aufgabe 3:

Für $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sei $f_\varepsilon \in (L^\infty(\mathbb{R}))'$ durch

$$f_\varepsilon(u) := \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon u(t)dt$$

definiert. Zeigen Sie, dass f_ε zwar beschränkt ist, dass es aber keine Nullfolge ε_k geben kann, so dass $F_k := f_{\varepsilon_k}$ schwach-$*$-konvergiert. (Dies zeigt, dass man auf die Voraussetzung „X separabel“ nicht verzichten darf.)
Anleitung: Indem man notfalls nochmals zu einer Teilfolge übergeht, kann man o.B.d.A.

$$1 > \frac{\varepsilon_{k+1}}{\varepsilon k} \to 0$$

annehmen. Die Funktion

$$u := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \chi_k \quad , \quad \chi_k \quad \text{charakteristische Funktion von} \quad (\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k)$$

liefert dann einen Widerspruch wegen

$$\lim_{j\to\infty} F_{2j}(u) \neq \lim_{j\to\infty} F_{2j+1}(u).$$