Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
22.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

10. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde die Matrix-Exponential-Funktion $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere gilt also $e^{0A} := I$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ falls $AB = BA$ gilt.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

(c) $e^{t \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) $e^{tA + \lambda I} = e^{\lambda} e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

(G 2) (Die Auflösung des homogenen Systems)

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u' = u + v, \quad v' = u - v, \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

(G 3) (Die Auflösung des homogenen Systems)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angegebenen Systems:

$$u' = u - v, \quad v' = 4u - 3v.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt $AB = BA$.

(H 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u' = u + v, \quad v' = 4u + v, \qquad u(0) = 0, \quad v(0) = 8.$$

(H 3) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angegebenen Systems:

$$u' = -5u + 3v, \quad v' = -15u + 7v.$$