Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
22.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

10. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. In der Vorlesung wurde die Matrix-Exponential-Funktion $e^{tA} := \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} t^j A^j$ für beliebiges $t \in \mathbb{R}$ definiert. Insbesondere gilt also $e^{0A} := I$. Beweisen Sie nun die folgenden Aussagen:

(a) Es gilt $e^{t(A+B)} = e^{tA} e^{tB}$ falls $AB = BA$ gilt.

(b) $e^{(s+t)A} = e^{sA} \cdot e^{tA}$ für alle $s, t \in \mathbb{R}$.

(c) $e^{t \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)} = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n})$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

(d) $e^{tA + \lambda I} = e^{\lambda} e^{tA}$ für $t \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.

Lösung: (a) Gilt $AB = BA$, so ist

$$(A+B)^j = \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^k B^{j-k},$$

und mit dem Cauchy-Produkt erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{t(A+B)} &= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} (A+B)^j = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} A^k B^{j-k} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{j} \frac{t^k\, A^k}{k!} \frac{t^{j-k}\, B^{j-k}}{(j-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n\, A^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m\, B^m}{m!} = e^{tA} e^{tB}. \end{aligned}$$

(b) Diese Aussage folgt direkt aus (a).

(c) Aus LA ist bekannt (oder man zeigt es induktiv), dass $(\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n))^j = \operatorname{diag}(\lambda_1^j, \ldots, \lambda_n^j)$. Daraus folgt nun die Aussage.

(d) Beachte, dass die Matritzen tA und λI kommutieren. Also folgt aus (a) und (c)

$$e^{tA + \lambda I} = e^{\lambda I} e^{tA} = \operatorname{diag}(e^{\lambda}, \ldots, e^{\lambda}) e^{tA} = e^{\lambda} e^{tA}.$$

(G 2) (Die Auflösung des homogenen Systems)

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u' = u + v, \quad v' = u - v, \qquad u(0) = 1, \quad v(0) = 0.$$

LÖSUNG: Die Nullstellen von dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2$ sind $\lambda_1 = \sqrt{2}$ und $\lambda_2 = -\sqrt{2}$. Ihre Vielfachheiten $= 1$. Der Lösungsansatz sieht daher so aus:

$$u(t) = Ae^{t\sqrt{2}} + Be^{-t\sqrt{2}}, \quad v(t) = Ce^{t\sqrt{2}} + De^{-t\sqrt{2}}.$$

Das Eintragen des Ansatzes in das System liefert die Beziehungen:

$$\sqrt{2}Ae^{t\sqrt{2}} - \sqrt{2}Be^{-t\sqrt{2}} = (A+C)e^{t\sqrt{2}} + (B+D)e^{-t\sqrt{2}},$$

$$\sqrt{2}Ce^{t\sqrt{2}} - D\sqrt{2}e^{-t\sqrt{2}} = (A-C)e^{t\sqrt{2}} + (B-D)e^{-t\sqrt{2}}.$$

Das Koeffizientenvergleich ergibt

$$\sqrt{2}A = A + C, \quad \sqrt{2}C = A - C, \quad -\sqrt{2}B = B + D, \quad -\sqrt{2}D = B - D,$$

und daraus folgt $C = (\sqrt{2}-1)A$ und $D = -(\sqrt{2}+1)B$. Die allgemeine Lösung des Systems ist also:

$$u(t) = Ae^{t\sqrt{2}} + Be^{-t\sqrt{2}}, \quad v(t) = (\sqrt{2}-1)Ae^{t\sqrt{2}} - (\sqrt{2}+1)Be^{-t\sqrt{2}}.$$

Es soll $u(0) = 1, v(0) = 0$ sein. Also müssen A, B die Gleichungen

$$1 = A + B, \quad 0 = (\sqrt{2}-1)A - (\sqrt{2}+1)B$$

erfüllen. Daraus ergibt sich

$$A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}}, \quad B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

(G 3) (Die Auflösung des homogenen Systems)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angegebenen Systems:

$$u' = u - v, \quad v' = 4u - 3v.$$

LÖSUNG: Die Nullstellen von dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda+1)^2$ sind $\lambda_{1,2} = -1$. Die Vielfachheit vom Eigenwet -1 ist gleich 2. Der Lösungsansatz sieht daher so aus:

$$u(t) = (A + Bt)e^{-t}, \quad v(t) = (C + Dt)e^{-t}.$$

Das Eintragen des Ansatzes in das System liefert die Beziehungen:

$$Be^{-t} - (A+Bt)e^{-t} = (A+Bt)e^{-t} - (C+Dt)e^{-t},$$

$$De^{-t} - (C+Dt)e^{-t} = 4(A+Bt)e^{-t} - 3(C+Dt)e^{-t}.$$

Das Koeffizientenvergleich ergibt

$$B - A = A - C, \quad D - C = 4A - 3C, \quad -B = B - D, \quad -D = 4B - 3D,$$

und daraus folgt $C = 2A - B$ und $D = 2B$. Die allgemeine Lösung des Systems ist also:

$$u(t) = Ae^{t\sqrt{2}} + Be^{-t\sqrt{2}}, \quad v(t) = (2A - B)e^{t\sqrt{2}} + 2Be^{-t\sqrt{2}}.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Es seien A, B zwei $n \times n$ Matritzen über $\mathbb{C}$. Beweisen Sie die folgende Aussage:
Aus $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$, folgt $AB = BA$.

LÖSUNG: Es sei $e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Wir leiten zweimal an der Stelle $t = 0$ ab und erhalten

$$\frac{d^2}{dt^2} e^{t(A+B)}\Big|_{t=0} = (A+B)^2,$$

und

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(e^{tA}e^{tB}\right)\Big|_{t=0} = A^2 + 2AB + B^2.$$

Somit folgt $AB = BA$.

(H 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung des folgenden Anfangswertproblems:

$$u' = u + v, \quad v' = 4u + v, \qquad u(0) = 0, \quad v(0) = 8.$$

LÖSUNG: Die Nullstellen von dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 3$ sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$. Ihre Vielfachheiten $= 1$. Der Lösungsansatz sieht daher so aus:

$$u(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}, \qquad v(t) = Ce^{-t} + De^{3t}.$$

Das Eintragen des Ansatzes in das System liefert die Beziehungen:

$$-Ae^{-t} + 3Be^{3t} = (A+C)e^{-t} + (B+D)e^{3t},$$

$$-Ce^{-t} + 3De^{3t} = (4A+C)e^{-t} + (4B+D)e^{3t}.$$

Das Koeffizientenvergleich ergibt

$$-A = A + C, \quad -C = 4A + C, \quad 3B = B + D, \quad 3D = 4B + D,$$

und daraus folgt $C = -2A$ und $D = 2B$. Die allgemeine Lösung des Systems ist also:

$$u(t) = Ae^{-t} + Be^{3t}, \qquad v(t) = -2Ae^{-t} + 2Be^{3t}.$$

Es soll $u(0) = 0, v(0) = 8$ sein. Also müssen A, B die Gleichungen

$$0 = A + B, \quad 8 = -2A + 2B$$

erfüllen. Daraus ergibt sich

$$A = -2, \quad B = 2.$$

(H 3) (6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angegebenen Systems:

$$u' = -5u + 3v, \quad v' = -15u + 7v.$$

LÖSUNG: Die Nullstellen von dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$ sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Die Vielfachheiten sind gleich 1. Der Lösungsansatz sieht daher so aus:

$$u(t) = e^t(A\cos 3t + B\sin 3t), \qquad v(t) = e^t(C\cos 3t + D\sin 3t).$$

Das Eintragen des Ansatzes in das System liefert die Beziehungen:

$e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)+e^t(-3A\sin 3t+3B\cos 3t) = -5e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)+3e^t(C\cos 3t+D\sin 3t),$

$e^t(C\cos 3t+D\sin 3t)+e^t(-3C\sin 3t+3D\cos 3t) = -15e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)+7e^t(C\cos 3t+D\sin 3t).$

Das Koeffizientenvergleich ergibt

$A+3B = -5A+3C, \quad B-3A = -5B+3D, \quad C+3D = -15A+7C, \quad D-3C = -15B+7D,$

und daraus folgt $C = 2A+B$ und $D = 2B-A$. Die allgemeine Lösung des Systems ist also:

$$u(t) = e^t(A\cos 3t + B\sin 3t), \quad v(t) = e^t((2A+B)\cos 3t + (2B-A)\sin 3t).$$