Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
29.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

11. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Stabilitätsverhalten der Nulllösung)

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung von folgenden Gleichungssystemen:

$$y_1' = 2y_1, \qquad y_2' = 4y_1 + y_2;$$
$$y_1' = -4y_1 + 3y_2, \qquad y_2' = -2y_1 + y_2;$$
$$y_1' = 2y_1 - 4y_2, \qquad y_2' = 2y_1 - 2y_2.$$

(G 2) (Mathematisches Pendel mit Reibung)

Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$u''(t) + \varepsilon u'(t) + \sin u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$ gilt.

(a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System 1. Ordnung $v'(t) = f(v(t))$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems $v'(t) = f(v(t))$.

(c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte.

Hausübungen

(H 1) (Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte, 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) + \arctan(y_2(t)) \\ y_2(t)' &= -3y_2(t) + 4y_3(t) - y_3(t)y_2(t)^2 \\ y_3(t)' &= \frac{1}{2}y_2(t) - \sin(y_3(t)) \end{aligned}$$

(a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = 0$ eindeutig lösbar ist und geben Sie die Losung an.

(b) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

(H 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte des Systems

$$\begin{aligned} x' &= \sin(x + y) \\ y' &= e^x - 1 \end{aligned}$$

Entscheiden Sie weiter, welche stabil und welche instabil sind.