Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
29.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

11. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Stabilitätsverhalten der Nulllösung)

Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung von folgenden Gleichungssystemen:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1, \qquad y_2' = 4y_1 + y_2; \\ y_1' &= -4y_1 + 3y_2, \qquad y_2' = -2y_1 + y_2; \\ y_1' &= 2y_1 - 4y_2, \qquad y_2' = 2y_1 - 2y_2. \end{aligned}$$

LÖSUNG: (a) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I) = (2-\lambda)(1-\lambda)$ sind $\lambda_1 = 2$ und $\lambda_2 = 1$. Da die Eigenwerte positiv sind, ist die Nulllösung instabil.

(b) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 3\lambda + 2$ sind $\lambda_1 = -2$ und $\lambda_2 = -1$. Da die Eigenwerte negativ sind, ist die Nulllösung asymptotisch stabil (Satz 4.8 im Skript von Hieber).

(c) Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms $\det(A - \lambda I) = \lambda^2 + 4$ sind $\lambda_1 = 2i$ und $\lambda_2 = -2i$. Da $Re(\lambda_j) = 0, j = 1, 2$, gilt, ist die Nulllösung stabil (Satz 4.8 im Skript von Hieber).

(G 2) (Mathematisches Pendel mit Reibung)

Die Gleichung des mathematischen Pendels mit Reibung lautet

$$u''(t) + \varepsilon u'(t) + \sin u(t) = 0, \quad t \geq 0,$$

wobei $\varepsilon > 0$ gilt.

(a) Überführen Sie diese Gleichung in das zugehörige System 1. Ordnung $v'(t) = f(v(t))$.

(b) Bestimmen Sie die kritischen Punkte des Systems $v'(t) = f(v(t))$.

(c) Bestimmen Sie das Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte.

LÖSUNG: (a) Wir setzen $v = (u, u')^{\mathrm{T}}$ und $f(x, y) = (y, -\varepsilon y - \sin x)^{\mathrm{T}}$. Das zugehörige System 1. Ordnung lautet nun

$$v'(t) = \begin{pmatrix} u \\ u' \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} u' \\ -\varepsilon u' - \sin u \end{pmatrix} = f(v).$$

(b) Die kritischen Punkte von f, d.h. die Punkte (x, y) mit $f(x, y) = 0$, sind $(k\pi, 0)$ für $k \in \mathbb{Z}$.

(c) Es gilt

$$Df(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\cos x & -\varepsilon \end{pmatrix},$$

sowie

$$Df(k\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \text{für } k \text{ gerade}, \quad \text{und} \quad Df(k\pi,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\varepsilon \end{pmatrix} \text{für } k \text{ ungerade.}$$

Wir bestimmen zunächst das Stabiltätsverhalten der kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k gerade: Das charakteristische Polynom von $Df(k\pi, 0)$ ist durch $p_1(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda + 1$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 - 4}{4}}.$$

Wir unterscheiden nun zwei Fälle.
Fall 1: $\varepsilon < 2$.
In diesem Fall ist $\varepsilon^2 - 4 < 0$, d.h. $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} \in i\mathbb{R}$. Also gilt $\mathrm{Re}\lambda_1 = \mathrm{Re}\lambda_2 = -\frac{\varepsilon}{2} < 0$. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k gerade asymptotisch stabil.
Fall 2: $\varepsilon \geq 2$.
In diesem Fall ist $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} \in \mathbb{R}$ und es gilt $\sqrt{\frac{\varepsilon^2-4}{4}} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Die beiden Eigenwerte $\lambda_{1/2}$ sind reell und negativ. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k gerade asymptotisch stabil.

Nun bestimmen wir das Stabiltätsverhalten der kritischen Punkte $(k\pi, 0)$ für k ungerade: Das charakteristische Polynom von $Df(k\pi, 0)$ ist durch $p_2(\lambda) = \lambda^2 + \varepsilon\lambda - 1$ gegeben. Als Eigenwerte erhält man

$$\lambda_{1/2} = -\frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2 + 4}{4}}.$$

Es gilt $\sqrt{\frac{\varepsilon^2+4}{4}} > \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{2}$. Somit liegt jewils ein positiver und ein negativer Eigenwert vor. Nach dem Prinzip der linearisierten Stabilität (Kapitel IV, Theorem 1.3) sind die Punkte $(k\pi, 0)$ für k ungerade instabil.

Hausübungen

(H 1) (Stabilitätsverhalten der kritischen Punkte, 6 Punkte)

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= -y_1(t) + y_2(t) + 2y_3(t) + \arctan(y_2(t)) \\ y_2(t)' &= -3y_2(t) + 4y_3(t) - y_3(t)y_2(t)^2 \\ y_3(t)' &= \frac{1}{2}y_2(t) - \sin(y_3(t)) \end{aligned}$$

(a) Begründen Sie, dass das Anfangswertproblem mit $y(0) = (y_1(0), y_2(0), y_3(0)) = 0$ eindeutig lösbar ist und geben Sie die Losung an.

(b) Untersuchen Sie das Stabilitätsverhalten der Nulllösung.

Lösung: (a) Das System ist von der Form $y' = f(y)$ mit $f \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Damit ist f lokal Lipschitzstetig und daher ist das AWP eindeutig lösbar. Offensichtlich ist die Nulllösung $y \equiv 0$ diese Lösung.

(b) Wir verwenden das Prinzip der linearisierten Stabilität, das wegen $f \in C^1$ mit $f(0) = 0$ anwendbar ist. Weiter gilt

$$Df(y) = \begin{pmatrix} -1 & 1 + \frac{1}{1+y^2} & 2 \\ 0 & -3 - 2y_2y_3 & 4 - y_2^2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\cos(y_3) \end{pmatrix}$$

also

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

Die Eigenwerte dieser Matrix sind $\{-1, -2\pm\sqrt{3}\}$. Die Nulllösung ist also asymptotisch stabil.

(H 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte des Systems

$$x' = \sin(x + y)$$
$$y' = e^x - 1$$

Entscheiden Sie weiter, welche stabil und welche instabil sind.

LÖSUNG: Für die kritischen Punkte gilt $x = 0$ und $y = n\pi$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

Zur Stabilitätsuntersuchung setzen wir $u = x$ und $v = y - n\pi$. Dies liefert $u' = \sin(u + v + n\pi)$ und $v' = e^u - 1$. Weiter gilt $\sin(u + v + n\pi) = \cos(n\pi)\sin(u + v) = (-1)^n \sin(u + v)$.

Taylor-Entwicklung von sin und exp ergibt das System

$$W' = \begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix} W + \text{ Terme mit Ordnung } > 2$$

mit $W = (u, v)^T$. Daher lässt sich das Prinzip der linearisierten Stabilität anwenden. Es sind also die Eigenwerte von

$$\begin{pmatrix} (-1)^n & (-1)^n \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

diese sind $\lambda_{1/2} = \frac{(-1)^n \pm \sqrt{1+4(-1)^n}}{2}$. Also $\lambda_{1/2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$, falls n gerade und $\lambda_{1/2} = \frac{-1\pm\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}$. Damit folgt, dass $x \equiv 0$, $y \equiv n\pi$ ist instabil, falls n gerade und asymptotishc stabil, falls n ungerade.