Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
06.07.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

12. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Aufgabe zum Aufwärmen)

(a) Untersuchen Sie die kritischen Punkte der Differentialgleichung

$$y'(t) = (y(t) - 1)(y(t) - 2)(y(t) - 3)$$

auf ihr Stabilitätsverhalten.

(b) Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem von

$$y^{(4)} - 6y''' + 15y'' - 20y' + 12y = 0.$$

LÖSUNG: (a) Wir wenden Theorem 1.3 im Skript an und erhalten für die kritischen Punkte, d.h. $f(y_i) = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$ und

$f'(1) = 2$, $f'(2) = -1$, $f'(3) = 2$,

da $y' = f(y) = y^3 - 6y^2 + 11y - 6$, also $f'(y) = 3y^2 - 12y + 11$.

Das heißt, y_1 ist instabil, y_2 ist asymptotisch stabil und y_3 ist instabil.

(b) Das charakteristische Polynom ist gegeben durch

$$\begin{aligned}\lambda^4 - 6\lambda^3 + 15\lambda^2 - 20\lambda + 12 &= \lambda^4 - 2\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda^3 + 8\lambda^2 - 12\lambda + 4\lambda^2 - 8\lambda + 12\\ &= (\lambda^2 - 4\lambda + 4)(\lambda^2 - 2\lambda + 3)\\ &= (\lambda - 2)^2(\lambda - (1 + \sqrt{2}\mathrm{i}))(\lambda - (1 - \sqrt{2}\mathrm{i}))\end{aligned}$$

Damit ist ein reelles Fundamentalsystem gegeben durch

$$\{e^{2t}, te^{2t}, e^t \sin(\sqrt{2}t), e^t \cos(\sqrt{2}t)\}$$

(G 2) (Wettbewerbsmodelle)

Wir betrachten eine Situation, in der zwei Spezies im Wettbewerb um Ressourcen liegen, die für ihr Wachstum erforderlich sind. Ein einfaches Modell zur Beschreibung dieser Situation besteht aus den folgenden beiden Differentialgleichungen:

$$u_1' = u_1(1 - u_1 - au_2) := f_1(u_1, u_2),$$

$$u_2' = \rho u_2(1 - cu_2 - bu_1) := f_2(u_1, u_2),$$

Ausgehend von einem beschränkten Wachstum der beiden Populationen beschreiben die Terme mit den positiven Konstanten a beziehungsweise b den gegenseitigen Einfluss durch Wettbewerb. Um die Rechnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass $\rho = 1$ und $c = 0$ ist. Wir suchen Lösungen (u_1, u_2) mit $u_i \geq 0, i = 1, 2$.

(a) Skizzieren Sie die Geraden

$$G_{u_1} := \{(u_1, u_2) \mid 1 - u_1 - au_2 = 0\}, \quad G_{u_2} := \{(u_1, u_2)| 1 - cu_2 - bu_1 = 0\}$$

sowie das Richtungsfeld.

(b) Bestimmen Sie die stationären Lösungen der Differentialgleichung. Untersuchen Sie die Stabilität der stationären Lösungen.

(c) Gibt es Bereiche für Anfangswerte (u_1^0, u_2^0), so dass man anhand des Richtungsfeldes mit Sicherheit sagen kann, wie sich die Populationen für $t \to \infty$ entwickeln?

LÖSUNG:

Ankündigung: Die Probeklausur findet am 13.07.2011 in den Übungen statt.