Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
13.07.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Probeklausur

13. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 11 Punkte)

Eine Flüssigkeit in einem großen Becken hat eine Temperatur von 100 Grad Celsius, während die Außenluft eine Temperatur von 20 Grad Celsius hat. Durch die natürliche Abkühlung sinkt die Temperatur im Becken pro Minute um 1 Prozent der Differenz zwischen Becken- und Außentemperatur. Durch eine Kühlanlage sinkt die Temperatur im Becken pro Minute zusätzlich um 2 Grad Celsius. Für $t \geq 0$ gebe $u(t)$ die Temperatur im Becken in Grad Celsius nach t Minuten an.

1. Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{100}u(t) - \frac{9}{5}$, $t \geq 0$, erfüllt.
2. Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil 1 lösen.
3. Skizzieren und beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur im Becken. Wie lange dauert es, bis die Temperatur im Becken 40 Grad Celsius beträgt?

(G 2) (Satz von Picard-Lindelöf, 6 Punkte)

Ist durch den Satz von Picard-Lindelöf gesichert, dass die Differentialgleichungen

$$(a) \quad y' = \sin(xy) + x^2 e^y; \qquad (b) \quad y' = \sqrt[3]{xy}$$

genau eine Lösung durch den Punkt $(1, 0)$ besitzen?

(G 3) (Differentialgleichung 2. Ordnung, 9 Punkte)

Ein Massenpunkt M sei an einer horizontalen Feder befestigt und bewege sich horizontal längs einer Geraden. Ist M im Punkt 0, so sei die Feder ungespannt. Weiter sei $x(t)$ der gerichtete Abstand von M zu 0 zur Zeit $t \geq 0$. Durch die Feder wirkt auf M eine Rückstellkraft $F_1 := -kx$, wobei $k > 0$ eine Federkonstante ist. Weiterhin werde M durch eine äußere Kraft $K(t)$, $t \geq 0$, angeregt. Um die Rechnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Masse von M gleich 1 ist.

1. Für $k = 9$ und $K(t) = \cos(6t)$ erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung $x'' = -9x(t) + \cos(6t)$, $t \geq 0$, mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$. Finden Sie die Lösung von diesem Anfangswertproblem.
2. Für $k = 9$ und $K(t) = \cos(3t)$ erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung $x'' = -9x(t) + \cos(3t)$, $t \geq 0$, wobei M sich für $t = 0$ im Punkt 0 in Ruhelage befindet. Finden Sie die Lösung von diesem Anfangswertproblem.

3. In den Teilen 1 und 2 führt der Massenpunkt M jeweils eine ungedämpfte Schwingung mit einer äußeren Anregung durch, wobei die Reibung nicht berücksichtigt wird. Vergleichen Sie das Verhalten der beiden Lösungen der Anfangswertprobleme aus Teil 1 und 2 für große Zeiten.

(G 4) (Die Auflösung des homogenen Systems, 6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angegebenen Systems:

$$u' = u - 3v, \quad v' = 3u + v.$$

(G 5) (Phasen-Differentialgleichung, 5 Punkte)

Von Volterra wurde das folgende Modell für eine Räuber-Beute-Population angegeben:

$$x' = -(a - by)x, \qquad y' = (c - dx)y.$$

Dabei ist x die Anzahl der Räuber- und y die Anzahl der Beutetiere und $a, b, c, d > 0$.

1. Wie lautet die Phasen-Differentialgleichung?
2. Bestimmen Sie mit Hilfe vom Teil 1 die Orbits.