Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
13.07.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Probeklausur

13. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Eine Flüssigkeit in einem großen Becken hat eine Temperatur von 100 Grad Celsius, während die Außenluft eine Temperatur von 20 Grad Celsius hat. Durch die natürliche Abkühlung sinkt die Temperatur im Becken pro Minute um 1 Prozent der Differenz zwischen Becken- und Außentemperatur. Durch eine Kühlanlage sinkt die Temperatur im Becken pro Minute zusätzlich um 2 Grad Celsius. Für $t \geq 0$ gebe $u(t)$ die Temperatur im Becken in Grad Celsius nach t Minuten an.

1. Es seien $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Geben Sie die Differenz $u(t+\tau) - u(t)$ näherungsweise in Abhängigkeit von $u(t)$ an. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass u näherungsweise die Differentialgleichung $u'(t) = -\frac{1}{100}u(t) - \frac{9}{5}$, $t \geq 0$, erfüllt.
2. Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, indem Sie die Differentialgleichung aus Teil 1 lösen.
3. Skizzieren und beschreiben Sie den zeitlichen Verlauf der Temperatur im Becken. Wie lange dauert es, bis die Temperatur im Becken 40 Grad Celsius beträgt?

LÖSUNG: 1. Durch die Kühlung sinkt die Temperatur im Becken zwischen den Zeitpunkten t Minuten und $t+\tau$ Minuten um 2τ Grad Celsius. Im gleichen Zeitraum beträgt die Temperatur im Becken näherungsweise $u(t)$ Grad Celsius, so dass die Temperatur im Becken durch die natürliche Abkühlung um ungefähr τ Prozent von $u(t) - 20$, also um $\frac{\tau}{100}(u(t) - 20)$ Grad Celsius sinkt. Somit ergibt sich näherungsweise

$$u(t+\tau) - u(t) = -\frac{\tau}{100}(u(t) - 20) - 2\tau,$$

also

$$\frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} = -\frac{1}{100}(u(t) - 20) - 2.$$

MIt dem Grenzübegang $\tau \to 0$ erhalten wir daher

$$u'(t) = -\frac{1}{100}u(t) - \frac{9}{5}, \quad t \geq 0.$$

2. Nach Teil 1 ist u die Lösung des Anfangswertproblems

$$u'(t) = -\frac{1}{100}u(t) - \frac{9}{5}, \quad u(0) = 100.$$

Mittels der Methode der Variation der Konstanten ist die allgemeine Lösung des linearen inhomogenen Problems gegeben durch

$$u(t) = ce^{-\frac{t}{100}} - 180, \quad t \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt werde muss, dass $u(0) = 100$ gilt. Es folgt $c = 280$ und somit

$$u(t) = 280e^{-\frac{t}{100}} - 180, \qquad t \geq 0.$$

3. Die Temperatur fällt exponentiell und monoton. Sie beginnt bei 100 Grad Celsius und stabilisiert sich für grosse Zeiten in der Nähe von -180 Grad Celsius.
   Wenn die Temperatur im Becken nach t_0 Minuten 40 Grad Celsius beträgt, so muss

$$40 = u(t_0) = 280e^{-\frac{t_0}{100}} - 180$$

   gelten. Es folgt

$$220 = 280e^{-\frac{t}{100}}.$$

   Somit gilt

$$t_0 = 100 \cdot \ln\left(\frac{14}{11}\right) = 24,1.$$

   Die Temperatur im Becken beträgt also nach ungefähr 24 Minuten 40 Grad Celsius.

(G 2) (Satz von Picard-Lindelöf, 6 Punkte)

Ist durch den Satz von Picard-Lindelöf gesichert, dass die Differentialgleichungen

$$(a) \;\; y' = \sin(xy) + x^2 e^y; \qquad (b) \;\; y' = \sqrt[3]{xy}$$

genau eine Lösung durch den Punkt $(1, 0)$ besitzen?

LÖSUNG: Im Fall 1 - ja: $f(x, y) := \sin(xy) + x^2 e^y$ ist stetig differenzierbar in jeder Umgebung von $(1, 0)$; im Fall 2 - nein: die Funktion $f(x, y)$ erfüllt die Lipschitzbedingung in der Umgebung von $(1, 0)$ nicht.

(G 3) (Differentialgleichung 2. Ordnung)

Ein Massenpunkt M sei an einer horizontalen Feder befestigt und bewege sich horizontal längs einer Geraden. Ist M im Punkt 0, so sei die Feder ungespannt. Weiter sei $x(t)$ der gerichtete Abstand von M zu 0 zur Zeit $t \geq 0$. Durch die Feder wirkt auf M eine Rückstellkraft $F_1 := -kx$, wobei $k > 0$ eine Federkonstante ist. Weiterhin werde M durch eine äußere Kraft $K(t)$, $t \geq 0$, angeregt. Um die Rechnungen zu vereinfachen, nehmen wir an, dass die Masse von M gleich 1 ist.

1. Für $k = 9$ und $K(t) = \cos(6t)$ erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung $x'' = -9x(t) + \cos(6t)$, $t \geq 0$, mit den Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $x'(0) = 0$. Finden Sie die Lösung von diesem Anfangswertproblem.
2. Für $k = 9$ und $K(t) = \cos(3t)$ erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung $x'' = -9x(t) + \cos(3t)$, $t \geq 0$, wobei M sich für $t = 0$ im Punkt 0 in Ruhelage befindet. Finden Sie die Lösung von diesem Anfangswertproblem.
3. In den Teilen 1 und 2 führt der Massenpunkt M jeweils eine ungedämpfte Schwingung mit einer äußeren Anregung durch, wobei die Reibung nicht berücksichtigt wird. Vergleichen Sie das Verhalten der beiden Lösungen der Anfangswertprobleme aus Teil 1 und 2 für große Zeiten.

LÖSUNG: 1. Die Nullstellen von dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 + 9$ sind $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Mit Satz 6.2 (Finckenstein) erhält man das Fundamentalsystem

$$x_1(t) = \cos(3t), \quad x_2(t) = \sin(3t).$$

Bestimmung einer partikulären Lösung durch Ansatz vom Typ der Störfunktion:

$$x^*(t) = A\cos(6t) + B\sin(6t).$$

Differenzieren und Einsetzen liefert die Gleichung

$$-36A\cos(6t) - 36B\sin(6t) + 9(A\cos(6t) + B\sin(6t)) = \cos(6t),$$

woraus man durch Koeffizientenvergleich $A = -1/27$ und $B = 0$ erhält. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$x(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) - \frac{1}{27}\cos(6t).$$

Die Anfangsbedingungen liefern $c_1 = 1/27$ und $c_2 = 0$.

2. Bestimmung einer partikulären Lösung durch Ansatz vom Typ der Störfunktion:

$$x^*(t) = t(A\cos(3t) + B\sin(3t)).$$

Differenzieren und Einsetzen liefert die Gleichung

$$-9t(A\cos(3t) + B\sin(6t)) + 6(B\cos(3t) - A\sin(3t)) + 9t(A\cos(3t) + B\sin(3t)) = \cos(3t),$$

woraus man durch Koeffizientenvergleich $A = 0$ und $B = 1/6$ erhält. Die allgemeine Lösung der inhomogenen DGL lautet also

$$x(t) = c_1\cos(3t) + c_2\sin(3t) + \frac{t}{6}\sin(3t).$$

Die Anfangsbedingungen liefern $c_1 = 0$ und $c_2 = 0$.

3. Wir bezeichnen die Lösung aus Teil 1 mit

$$x_1(t) = \frac{1}{27}\cos(3t) - \frac{1}{27}\cos(6t), \quad t \geq 0,$$

und die Lösung aus Teil 2 mit

$$x_2(t) = \frac{t}{6}\sin(3t), \quad t \geq 0.$$

Während die Funktion x_1 beschränkt und periodisch mit der Periode $2\pi/3$ ist, wird die Amplitude der Schwingung, die x_2 beschreibt, immer größer. Die Ausschläge von x_2 werden immer größer und x_2 ist unbeschränkt, da z.B. für $k \in \mathbb{N}$

$$x_2\left(\frac{1}{3}\left(2k\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right) \to \infty$$

für $k \to \infty$. Diese Phänomen bezeichnet man als Resonanz.

(G 4) (Die Auflösung des homogenen Systems, 6 Punkte)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des angegebenen Systems:

$$u' = u - 3v, \quad v' = 3u + v.$$

Lösung: Die Nullstellen von dem charakteristischen Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 10$ sind $\lambda_{1,2} = 1 \pm 3i$. Die Vielfachheiten sind gleich 1. Der Lösungsansatz sieht daher so aus:

$$u(t) = e^t(A\cos 3t + B\sin 3t), \qquad v(t) = e^t(C\cos 3t + D\sin 3t).$$

Das Eintragen des Ansatzes in das System liefert die Beziehungen:

$e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)+e^t(-3A\sin 3t+3B\cos 3t)=e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)-3e^t(C\cos 3t+D\sin 3t),$

$e^t(C\cos 3t+D\sin 3t)+e^t(-3C\sin 3t+3D\cos 3t)=3e^t(A\cos 3t+B\sin 3t)+e^t(C\cos 3t+D\sin 3t).$

Das Koeffizientenvergleich ergibt

$$A+3B=A-3C,\quad B-3A=B-3D,\quad C+3D=3A+C,\quad D-3C=3B+D,$$

und daraus folgt $C=-B$ und $D=A$. Die allgemeine Lösung des Systems ist also:

$$u(t)=e^t(A\cos 3t+B\sin 3t),\quad v(t)=e^t(-B\cos 3t+A\sin 3t).$$

(G 5) (Phasen-Differentialgleichung, 5 Punkte)

Von Volterra wurde das folgende Modell für eine Räuber-Beute-Population angegeben:

$$x'=-(a-by)x,\qquad y'=(c-dx)y.$$

Dabei ist x die Anzahl der Räuber- und y die Anzahl der Beutetiere und $a,b,c,d>0$.

1. Wie lautet die Phasen-Differentialgleichung?
2. Bestimmen Sie mit Hilfe vom Teil 1 die Orbits.

Lösung: Die Phasen-DGL:

$$y_x=-\frac{(c-dx)y}{(a-by)x}.$$

Die Orbits ergeben sich als Höhenlinien von

$$f(x,y)=(by-a\ln y)+(dx-c\ln x).$$