

# Mathematisches Modellieren für LaG/M

## Gewöhnliche Differentialgleichungen

### 1. Übung mit Lösungshinweisen

#### Gruppenübungen

##### (G 1)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= 2ty^2(t) \\ y(0) &= y_0 > 0\end{aligned}$$

Geben Sie das maximale Intervall an, in dem die Lösung existiert.

LÖSUNG: Für eine Lösung  $y$  des Problems gilt wegen  $y(0) > 0$  auch  $y(t) > 0$  in einer geeigneten Umgebung von 0 (warum?). In dieser Umgebung gilt dann

$$2t = \frac{y'(t)}{y^2(t)}, \quad y(0) = y_0.$$

Integration und Substitution  $s = y(t)$  liefert dann

$$t^2 = 2 \int_0^t x \, dx = \int_0^t \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{s^2} ds = \frac{1}{y_0} - \frac{1}{y(t)}.$$

Durch Auflösen dieser Gleichung nach  $y(t)$  erhalten wir

$$y(t) = \frac{y_0}{1 - y_0 t^2}.$$

Man sieht durch leichtes Nachrechnen, dass diese Funktion für  $|t| < \frac{1}{\sqrt{y_0}}$  wirklich eine Lösung liefert. Sie läßt sich aber nicht über dieses Intervall hinaus fortsetzen, da  $y$  an den Intervallenden unbeschränkt wird.

##### (G 2)

Wir betrachten die Differentialgleichung  $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Zeigen Sie, dass für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und erraten Sie noch eine weitere (offensichtliche) Lösung.

- Skizzieren Sie eine Auswahl dieser Lösungen in ein Schaubild.

- Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung mit  $y(0) = 0$  unendlich viele Lösungen hat.
- Gibt es ein  $y_0 > 0$ , so dass das Anfangswertproblem mit  $y(0) = y_0$  eindeutig lösbar ist?

LÖSUNG: • Für alle  $x < x_0$  gilt  $y'(x) = 0 = \sqrt{|0|} = \sqrt{|y(x)|}$  und auch für alle  $x > x_0$  haben wir

$$y'(x) = \frac{1}{2}(x - x_0) = \frac{1}{2}|x - x_0| = \sqrt{\left|\frac{(x - x_0)^2}{4}\right|} = \sqrt{|y(x)|}.$$

Wir untersuchen also noch  $x = x_0$ . Es gilt

$$\lim_{h \searrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \lim_{h \searrow 0} \frac{h^2 - 0}{4h} = \lim_{h \searrow 0} h = 0$$

und

$$\lim_{h \nearrow 0} \frac{y(x_0 + h) - y(x_0)}{h} = \lim_{h \nearrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Also ist  $y$  stetig differenzierbar auf  $\mathbb{R}$  (man beachte, dass das eine der Bedingungen aus der Definition von Lösung einer Differentialgleichung ist!) und es gilt auch in  $x_0$

$$y'(x_0) = 0 = \sqrt{|y(x_0)|}.$$

Die weitere leicht zu erratende Lösung ist  $y \equiv 0$ .

- 
- Nach Teil (a) ist jede Funktion der Form

$$y_{x_0}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung der Differentialgleichung und für alle  $x_0 \geq 0$  gilt auch  $y_{x_0}(0) = 0$ . Für alle  $x_0 \geq 0$  ist also  $y_{x_0}$  eine Lösung des Anfangswertproblems und diese Lösungen sind auch alle offensichtlich verschieden. Da es unendlich viele positive reelle Zahlen gibt, hat das gegebene Anfangswertproblem damit unendlich viele verschiedene Lösungen.

## Hausübungen

### (H 1) (6 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^3(t), \quad t \in I, \quad y(0) = 1$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , für das die Lösung existiert. Wie verhält sich die Lösung am Rand dieses Intervalls? Begründen Sie, warum sich die Lösung nicht fortsetzen lässt.

LÖSUNG: Mit Trennung der Variablen ergibt sich für  $y \neq 0$

$$\int_0^t y'(t)y^{-3}(t)dt = \int_0^t 1dt$$

also

$$\int_{y(0)}^{y(t)} u^{-3} du = t$$

und damit

$$-\frac{1}{2}y(t)^{-2} + \frac{1}{2} = t.$$

Auflösen nach  $y$  ergibt

$$y(t) = (-2t + 1)^{-1/2}.$$

Man sieht, dass die Rechnung für  $t \in (-\infty, 1/2)$  gültig ist. Für  $t \rightarrow 1/2$  geht die Lösung gegen unendlich. Deshalb kann es nach Rechts keine stetige Fortsetzung von  $y$  geben. Damit ist  $(-\infty, 1/2)$  das maximale Intervall, in dem die Lösung existiert.

## (H 2) (6 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung, mit der Form  $y'(t) = f(y/t)$ , d.h. die rechte Seite ist eine Funktion von  $y/t$ .

- Zeigen Sie, dass eine solche Differentialgleichung in eine Gleichung umgeformt werden kann, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.
- Lösen Sie die Gleichung

$$y'(t) = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

für  $t > 0$ , falls  $y > 0$ .

- Es sei  $g(y, t) = \frac{t+y}{t-y}$ . Geben Sie eine Funktion  $f$  an, so dass  $f(y/t) = g(y, t)$  gilt. Wieso ist es trotzdem schwierig, die zugehörige Differentialgleichung  $y'(t) = g(y, t)$  explizit zu lösen?

LÖSUNG: • Es sei  $v(t) = y(t)/t$ , also  $y(t) = tv(t)$ , dann gilt  $y'(t) = tv'(t) + v(t)$ . Die Differentialgleichung für  $v$  lautet daher  $tv' + v = f(v)$ . Diese lässt eine Trennung der Variablen zu, denn

$$tv' + v = f(v) \quad \Leftrightarrow \quad v' = \frac{1}{t}(f(v) - v).$$

- Hier ist speziell  $f(v) = 2v + v^2$  und es gilt

$$\frac{1}{f(v) - v} = \frac{1}{v^2 + v} = \frac{1}{v} - \frac{1}{v + 1}.$$

Damit erhält man durch Integration

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{v^2 + v} dv &= \int \frac{1}{v} - \frac{1}{v + 1} dv \\ &= \ln |v| - \ln |1 + v| \end{aligned}$$

Mit der Gleichung ergibt sich

$$\ln \frac{|v|}{|1 + v|} = \ln t + c$$

Auflösen nach  $v$  (Beachte  $v > 0$ ):

$$v = \frac{e^{ct}}{1 - e^{ct}}$$

und daher

$$y = \frac{e^{ct^2}}{1 - e^{ct}}$$

- Wir rechnen

$$\frac{t+y}{t-y} = \frac{1+y/t}{1-y/t} = f(y/t)$$

mit  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ . Weiter gilt

$$f(v) - v = \frac{1+v^2}{1-v}$$

und damit ergibt sich mit Trennung der Variablen

$$\int \frac{1-v}{1+v^2} = \arctan(v) - \frac{1}{2} \ln(1+v^2) = \ln t.$$

Die Explizite Lösung der Differentialgleichung ist schwer/unmöglich, da man die obige Gleichung noch nach  $v$  auflösen muss.

### (H 3) (6 Punkte)

- Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x(1+y^2(x)), \quad x > 0, \quad y(0) = 0.$$

- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x+y)$$

Hinweis: Substituieren Sie  $z(x) = x + y(x)$

LÖSUNG: • Aus

$$\int_0^y \frac{1}{1+\eta^2} d\eta = \int_0^x \xi d\xi$$

erhält man  $\arctan(y(x)) = \frac{x^2}{2} + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Da  $y(0) = 0$ , folgt  $c = 0$  und somit

$$y(x) = \tan(x^2/2).$$

- Mit  $z(x) = x + y(x)$  und  $y' = z' - 1$  ergibt sich die DGL

$$z' = 1 + \cos(z).$$

Fall 1:  $z' \equiv 0$ . Es folgt  $z(x) = (2n+1) \cdot \pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , also  $y(x) = (2n+1) \cdot \pi - x$ .

Fall 2:  $z' \not\equiv 0$ . Trennung der Variablen ergibt

$$\int \frac{1}{1+\cos(\eta)} d\eta = \int 1 d\xi.$$

Da  $\tan(\eta/2)' = \frac{1}{1+\cos(\eta)}$ , folgt somit  $\tan(z(x)/2) = x + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , also

$$y(x) = 2 \arctan(x+c) - x, \quad c \in \mathbb{R}.$$