Universität Duisburg-Essen Sommersemester 2011
Fachbereich Mathematik 27.04.2011
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

2. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichungen

1. $(1-t^2)y' - ty + 1 = 0, \qquad (|t| < 1)$,
2. $(1+t^2)y' + ty - ty^2 = 0, \qquad (y > 0)$,
3. $y' + y + (\sin t + et)y^3 = 0, \qquad (y > 0)$.

LÖSUNG: (a) Sei $t_0 = 0$. Wir benutzen Satz 3.1 der Vorlesung (Variation der Konstanten). Damit gilt

$$y(t) = Ce^{-G(t)} - \int_0^t \frac{1}{1-s^2} e^{\int_s^t \frac{\tau}{1-\tau^2}\mathrm{d}\tau} \mathrm{d}s$$

mit $G(t) = -\int_0^t \frac{s}{1-s^2}\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\ln(1-t^2)$. Weiter gilt

$$\int_s^t \frac{\tau}{1-\tau^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln(1-s^2) - \ln(1-t^2)) = \frac{1}{2}\ln\Big(\frac{1-s^2}{1-t^2}\Big).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} - \int_0^t \frac{1}{1-s^2}\sqrt{\frac{1-s^2}{1-t^2}}\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}(C - \arcsin t). \end{aligned}$$

(b) Dies ist eine Bernoulli Dgl. Wir lösen diese indem wir zunächst $v = \frac{1}{y}$ substituieren. Wir erhalten dann $v' = \frac{t}{1+t^2}v - \frac{t}{1+t^2}$ als Gleichung für v. Wie im Teil (a) erhält man ($t_0 = 0$)

$$v(x) = (C-1)\sqrt{1+t^2} + 1.$$

Beachtet man noch $y = \frac{1}{v}$ so erhält man schließlich

$$y(t) = \frac{1}{(C-1)\sqrt{1+t^2}+1}.$$

(c) Dies ist eine Bernoulli Dgl. Wir lösen diese indem wir zunächst $v = \frac{1}{y^2}$ substituieren. Wir erhalten dann $v' = 2v + 2(\sin t + e^t)$ als Gleichung für v.

Die Lösung dieser Gleichung ist dann ($t_0 = 0$):

$$v(t) = Ce^{2t} - \frac{2}{5}(\cos t + 2\sin t) + \frac{2}{5}e^{2t}.$$

Ist y die Lösung der ursprünlichen Dgl., so erhält man dann also wegen $v = \frac{1}{y^2}$:

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{v(t)}}.$$

(G 2)

Entscheiden Sie, ob die folgenden Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ lokalen oder globalen Lipschitzbedingungen genügen.

1. $f(t, y) = y^2$
2. $f(t, y) = \frac{1}{1+y^2}$
3. $f(t, y) = e^t y$

LÖSUNG: 1. $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |y_1^2 - y_2^2| = |(y_1 + y_2)(y_1 - y_2)| = 2\xi|y_1 - y_2|$ mit $\xi \in (y_1, y_2)$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

2. Wir haben folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
|f(t,y_1) - f(t,y_2)| &= \left|\frac{1}{1+y_1^2} - \frac{1}{1+y_2^2}\right| = \frac{|y_2^2 + 1 - (y_1^2+1)|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} = \frac{|y_1+y_2||y_1-y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \\
&\le \frac{(|y_1| + |y_2|)|y_1 - y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} \\
&= \left(\frac{|y_1|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)} + \frac{|y_2|}{(1+y_1^2)(1+y_2^2)}\right)|y_1 - y_2| \\
&\le \Big(\underbrace{\frac{|y_1|}{1+y_1^2}}_{\le\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{|y_2|}{1+y_2^2}}_{\le\frac{1}{2}}\Big)|y_1 - y_2| \le |y_1 - y_2|.
\end{aligned}$$

Also genügt f einer globalen Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L = 1$.

3. $|f(t, y_1) - f(t, y_2)| = |e^t y_1 - e^t y_2| = e^t|y_1 - y_2|$. Also genügt f einer lokalen aber keiner globalen Lipschitzbedingung.

(G 3)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Ist $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$, so genügt f in D einer lokalen Lipschitzbedingung.

LÖSUNG: Kurze Vorbemerkung: Aus Analysis II wissen wir, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind. Somit können wir hier $\mathbb{R}^n$ mit der Maximumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ versehen.
Sei nun $(t_0, x_0) \in D$. Dann gibt es eine offene Kugel $U_r(t_0, x_0) \subset D$ um (t_0, x_0) mit Radius $r > 0$, so dass $V := \overline{U_r(t_0, x_0)} \subset D$ (hier bezeichnet $\overline{U_r(t_0, x_0)}$ den Abschluß von $U_r(t_0, x_0)$). Die Menge V ist kompakt und konvex. Für $f \in C^1(D, \mathbb{R}^n)$ schreiben wir nun $f = (f_1, \dots, f_n)$, wobei $f_i : D \to \mathbb{R}$ für $i = 1, \dots, n$.
Da $(t, x) \mapsto \nabla f_i(t, x)$, für $i = 1, \dots, n$, eine stetige Funktion ist und stetige reellwertige Funktionen auf kompakten Mengen ihr Maximum annehmen, folgt die Existenz von

$$L_i := \max\{\|\nabla f_i(t, x)\|_\infty : (t, x) \in V\}$$

für $i = 1, \dots, n$. Aus dem Schrankensatz (Analysis II, Kapitel VI, Satz 2.9) folgt

$$|f_i(t, x) - f_i(t, y)| \le L_i\|x - y\|_\infty$$

für alle $(t, x), (t, y) \in V$ und $i = 1, \dots, n$. Insbesondere erhalten wir nun mit $L := \max_i L_i$ die Abschätzung

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_\infty = \max_i |f_i(t, x) - f_i(t, y)| \le L\|x - y\|_\infty$$

für alle $(t, x), (t, y) \in V$. Somit genügt f einer lokalen Lipschitzbedingung.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme:

(a) $y' = \frac{xy}{x^2-1} + e^x\sqrt{1-x^2}$, $y(0) = 1$;

(b) $y' = y^2 + \frac{2}{x}y$, $y(1) = -1$;

LÖSUNG: (a) Wir benutzen Satz 3.1 der Vorlesung (Variation der Konstanten) Damit gilt

$$y(x) = e^{G(x)} + \int_0^x e^s\sqrt{1-s^2}e^{\int_s^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

mit $G(x) = \int_0^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(1-x^2)$ (da x nahe 0). Weiter gilt

$$\int_s^x \frac{t}{t^2-1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}(\ln(1-x^2) - \ln(1-s^2)) = \frac{1}{2}\ln(\frac{1-x^2}{1-s^2}).$$

Also folgt

$$\begin{aligned} y(x) &= \sqrt{1-x^2} + \int_0^x e^s\sqrt{1-s^2}\sqrt{\frac{1-x^2}{1-s^2}}\mathrm{d}s \\ &= \sqrt{1-x^2} + \sqrt{1-x^2}\int_0^x e^s\mathrm{d}s \\ &= \sqrt{1-x^2}(1+e^x-1) = \sqrt{1-x^2}e^x \end{aligned}$$

(b) Dies ist eine Bernoulli Dgl. Wir lösen diese indem wir zunächst $v = \frac{1}{y}$ substituieren. Wir erhalten dann $v' = -1 - \frac{2}{x}v$, $v(1) = -1$ als Gleichung für v.

Es gilt

$$e^{\int_s^x 2/t\mathrm{d}t} = e^{-2\ln t|_1^x} = \frac{s^2}{x^2}.$$

Damit ergibt sich als Lösung der homogenen Gleichung

$$v_h(x) = c\cdot e^{\int_1^x 2/t\mathrm{d}t} = \frac{c}{x^2}$$

und als spezielle Lösung berechnen wir ($v = v_h + v_s$)

$$v_s(x) = \int_1^x (-1)e^{\int_s^x 2/t\mathrm{d}t}\mathrm{d}s = -\int_1^x \frac{c}{x^2}\mathrm{d}s = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3x^2}.$$

Damit ergibt sich

$$v(x) = -\frac{x}{3} + \frac{1}{3x^2} + \frac{c}{x^2} = \frac{1+3c}{3x^2} - \frac{x}{3}$$

Mit der Anfangsbedingung $v(1) = c = -1$ folgt also $v(x) = -\frac{2+x^3}{3x^2}$. Beachtet man noch $u = \frac{1}{v}$ so erhält man schließlich

$$y(x) = -\frac{3x^2}{2+x^3}.$$

(H 2) (6 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Funktionen in $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ einer Lipschitzbedingung oder einer lokalen Lipschitzbedingung genügen.

1. $f(x,y) := x|y|$

2. $f(x,y) := \sin(|y|^{-1})$ für $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$ für alle x
3. $f(t,y) = \frac{1}{1+t^2+y^2}$

LÖSUNG: 1. $|f(x,y) - f(x,y')| = |x|\big||y| - |y'|\big| \leq |x||y-y'|$. Also erfüllt f eine lokale Lipschitzbedingung aber keine globale, da $|f(x,y) - f(x,y')| \xrightarrow{x\to\infty} \infty$ für jede festen $y \neq y'$.

2. Erfüllt keine Lipschitzbedingung. Ist nicht mal stetig.

3. Die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2y}{(1+t^2+y^2)^2}$ ist beschränkt auf ganz $\mathbb{R}^2$. Nach dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung gilt für alle $(t,y_1),(t,y_2) \in \mathbb{R}^2$

$$|f(t,y_1) - f(t,y_2)| = \left|\frac{\partial f}{\partial y}(t,\xi)\right| |y_1 - y_2|,$$

mit $\xi \in (y_1, y_2)$. Daher genügt f einer globalen Lipschitzbedingung mit Lipschitz-Konstante $L = \sup\{|\frac{\partial f}{\partial y}(t,y)| : (t,y) \in \mathbb{R}^2\}$.

(H 3) (6 Punkte)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Genügt f in der offenen Menge $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ einer lokalen Lipschitzbedingung und ist $K \subset D$ kompakt, so genügt f in K einer Lipschitzbedingung.

LÖSUNG: Wäre die Aussage falsch, dann gäbe es zu jedem $L \geq 0$ zwei Punkte $(t,x),(t,y) \in K$ mit $\|f(t,x) - f(t,y)\|_2 > L$. Insbesondere gibt es dann zwei Folgen $((t_n,x_n))_n$ und $((t_n,y_n))_n$ in K mit

$$\|f(t_n,x_n) - f(t_n,y_n)\|_2 > n\|x_n - y_n\|_2 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wegen der Kompaktheit von K existieren konvergente Teilfolgen $(t_{n_k})_k$, $(x_{n_k})_k$ und$(y_{n_k})_k$, deren Grenzwerte wir mit t, x und y bezeichnen. Wir betrachten nun Ungleichung (**??**) nur noch für die konvergenten Teilfolgen. Für $k \to \infty$ konvergiert die linke Seite von (**??**), also muss wegen des Faktors n_k auf der rechten Seite $(\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_2)_k$ eine Nullfolge sein, d.h. $x = y$. Auf Grund der vorausgesetzten lokalen Lipschitzbedingung von f gibt es eine Umgebung U von (t,x), so dass die Einschränkung von f auf $U \cap K$ einer Lipschitzbedingung genügt, also gilt

$$\|f(\tilde{t},\tilde{x}) - f(\tilde{t},\tilde{y})\|_2 \leq \tilde{L}\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2,$$

für eine geeignete Konstante $\tilde{L} > 0$ und alle $(\tilde{t},\tilde{x}),(\tilde{t},\tilde{y}) \in U \cap K$. Für hinreichend großes k liegen die Punkte (t_{n_k},x_{n_k}) und (t_{n_k},y_{n_k}) in $U \cap K$ und somit gilt für diese n_k die Abschätzung

$$\|f(t_{n_k},x_{n_k}) - f(t_{n_k},y_{n_k})\|_2 \leq \tilde{L}\|x_{n_k} - y_{n_k}\|_2.$$

Dies ist aber für $n_k > \tilde{L}$ ein Widerspruch zu (**??**).