Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
04.05.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Satz von Picard–Lindelöf)

Auf dem 1. Übungsblatt (Aufgabe G2) haben wir gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $t \in \mathbb{R}$, mit Anfangswert $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Kapitel II, Satz 1.6?

(G 2) (Lösbarkeit der DGL)

(a) Es sei $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, y) = \sin\left(\frac{1}{1 - (t^2 + y^2)}\right).$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(t, y), y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \mathrm{e}^{-t^2} + y^3, \quad y(0) = 1$$

eine Lösung auf $[0, \frac{1}{9}]$ besitzt und dass $0 \leq y(t) \leq 2$ für $t \in [0, \frac{1}{9}]$ gilt.

(G 3) (Lipschitzstetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit)

(a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig in $x \in D$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset D$ gibt auf der f gleichmäßig stetig ist.

(b) Finden Sie eine auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetige Funktion, welche nicht Lipschitzstetig in $x = 0$ ist.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im 2. Argument sogar lokal lipschitzstetig.

1. Gibt es durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ immer ein Lösung der DGL $y' = f(x, y)$? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
2. Es gelte nun zusätzlich $f(-x, y) = -f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann jede Lösung y obiger DGL eine gerade Funktion ist.

(H 2) (Satz von Picard–Lindelöf, 6 Punkte)
Zeigen Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = \sin(x^2 y^2) \ , \qquad y(0) = 1 \ ,$$

im Rechteck $R = \{(x, y) \ : \ |x| \leq 1, |y - 1| \leq 1\}$ betrachtet, dass dieses Problem genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1, 1]$ besitzt.

(H 3) (Existenz und Eindeutigkeit, 6 Punkte)
Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cdot e^{x^2-25} \cdot \sin(x^3 + 2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1, 5]$ besitzt.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.