Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
04.05.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

3. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Satz von Picard–Lindelöf)

Auf dem 1. Übungsblatt (Aufgabe G2) haben wir gezeigt, dass die Differentialgleichung $y'(t) = \sqrt{|y(t)|}$, $t \in \mathbb{R}$, mit Anfangswert $y(0) = 0$ unendlich viele Lösungen besitzt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Kapitel II, Satz 1.6?

LÖSUNG: Kapitel II, Satz 1.6 garantiert die Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $y'(t) = f(t, y(t)), y(t_0) = y_0$, unter der Voraussetzung, dass $f(t, y)$ in y lokal Lipschitz-stetig ist. Die Funktion $f(t, y) = \sqrt{|y|}$ ist allerdings in 0 nicht Lipschitz-stetig. Anschaulich gesprochen liegt dies am senkrechten Anstieg der Wurzelfunktion bei $y = 0$. Angenommen f genüge einer Lipschitzbedingung in einer Umgebung U von $y = 0$, dann gilt $|\sqrt{|y|} - 0| \leq L|y - 0|$, für eine geeignete Konstante L und alle $y \in U$. Hieraus folgt aber, dass $\frac{\sqrt{|y|}}{y} = \frac{1}{\sqrt{|y|}} \leq L$ für alle $y \in U$. Dies ist ein Widerspruch, denn $\frac{1}{\sqrt{|y|}} \xrightarrow{y \to 0} \infty$.

(G 2) (Lösbarkeit der DGL)

(a) Es sei $D = \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 < 1\}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(t, y) = \sin\left(\frac{1}{1 - (t^2 + y^2)}\right).$$

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem $y' = f(t, y), y(0) = 0$ eindeutig lösbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = \mathrm{e}^{-t^2} + y^3, \quad y(0) = 1$$

eine Lösung auf $[0, \frac{1}{9}]$ besitzt und dass $0 \leq y(t) \leq 2$ für $t \in [0, \frac{1}{9}]$ gilt.

LÖSUNG: (a) Die Funtion $f : D \to \mathbb{R}$ ist stetig und

$$\frac{\partial}{\partial y} f(t, y) = \cos\left(\frac{1}{1 - (t^2 + y^2)}\right) \frac{1}{(1 - (t^2 + y^2))^2}.$$

Für $0 < \lambda < 1$ definieren wir $D_\lambda := \{(t, y) \in \mathbb{R}^2 : t^2 + y^2 \leq \lambda\}$. Für alle $(t, y) \in D_\lambda$ gilt nun

$$\left|\frac{\partial}{\partial y} f(t, y)\right| \leq \frac{1}{(1 - \lambda)^2}.$$

Nach dem Mittelwertsatz genügt f auf D_λ einer Lipschitzbedingung. Da für jeden Punkt $(t, y) \in D$ ein $0 < \lambda < 1$ existiert mit $(t, y) \in D_\lambda$, folgt dass f einer lokalen Lipschitzbedingung auf D genügt. Der lokale Satz von Picard Lindelöf garantiert nun die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des Anfangswertproblems $y' = f(t, y), y(0) = 0$ auf einer Umgebung U von $(0, 0)$.

(b) Es sei $R = [0, 1/9] \times [0, 2]$. Wir berechnen

$$M = \max_{(t,y)\in R} \mathrm{e}^{-t^2} + y^3 = 1 + 2^3 = 9.$$

Damit existiert die Lösung für $0 \le t \le \min(1/9, 1/9) = 1/9$ und in diesem Intervall gilt $y \in [0, 2]$.

(G 3) (Lipschitzstetigkeit und gleichmäßige Stetigkeit)

(a) Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \to \mathbb{R}^m$ Lipschitzstetig in $x \in D$. Zeigen Sie, dass es eine Umgebung $U \subset D$ gibt auf der f gleichmäßig stetig ist.

(b) Finden Sie eine auf $[0, 1]$ gleichmäßig stetige Funktion, welche nicht Lipschitzstetig in $x = 0$ ist.

LÖSUNG: (a) Nach Vorraussetzung gibt es eine offene Umgebung $U \subset D$ um x und ein $C \in \mathbb{R}^+$, so dass für alle $y \in U$ $\|f(x) - f(y)\| \le C\|x - y\|$ gilt.

Für jedes $\epsilon > 0$ und $\delta := \frac{\epsilon}{2C}$ und für alle $y \in U$ folgt damit aus $\|y - x\| < \delta$ sofort $\|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{2}$.

Für alle $y_1, y_2 \in U$ folgt dann mit der Dreiecksungleichung

$$\|f(y_1) - f(y_2)\| \le \|f(y_1) - f(x)\| + \|f(x) - f(y_2)\| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

(b) Aus gleichmäßiger Stetigkeit folgt nicht die Lipschitz Stetigkeit. Besipiel: $D = [0, 1]$ und $f(x) = \sqrt{x}$. Die Funktion f ist gleichmäßig stetig. Wir hatten aber schon gesehen, dass f nicht Lipschitz stetig in $x = 0$ ist.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei im 2. Argument sogar lokal lipschitzstetig.

1. Gibt es durch einen beliebigen Punkt $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ immer ein Lösung der DGL $y' = f(x, y)$? Wenn ja, ist diese Lösung eindeutig?
2. Es gelte nun zusätzlich $f(-x, y) = -f(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, daß dann jede Lösung y obiger DGL eine gerade Funktion ist.

LÖSUNG: 1. Ja, dies folgt aus dem Satz von PICARD-LINDELÖF.

2. Ist y eine Lösung der DGL so ist auch $h(x) = y(-x)$ eine Lösung, denn aus der Kettenregel folgt $h'(x) = y'(-x) \cdot (-1) = -y'(-x)$ und somit

$$h'(x) = -y'(-x) = -f(-x, y(-x)) = -f(-x, h(x)) = f(x, h(x)).$$

Da die Lösung eindeutig ist, folgt $y = h$ bzw. $y(x) = y(-x)$.

(H 2) (Satz von Picard–Lindelöf, 6 Punkte)

Zeigen Sie für das Anfangswertproblem

$$y' = \sin(x^2y^2)\ , \qquad y(0) = 1\ ,$$

im Rechteck $R = \{(x, y)\ :\ |x| \le 1, |y - 1| \le 1\}$ betrachtet, dass dieses Problem genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1, 1]$ besitzt.

LÖSUNG: Die Funktion $f(x,y) = \sin(x^2y^2)$ ist stetig nach y differenzierbar mit

$$f_y(x,y) = 2yx^2\cos(x^2y^2)\ .$$

Weil $|\cos(z)| \leq 1$ für alle z, ist $|f_y(x,y)| \leq 2yx^2 \leq 2\cdot 1\cdot 4$ für $(x,y)\in\mathbb{R}$, also ist f_y beschränkt, und deswegen ist f Lipschitzstetig auf $\mathbb{R}$. Weiter ist

$$M = \max_{(x,y)\in\mathbb{R}} |\sin(x^2y^2)| \leq 1\ ,$$

und also $\alpha = \min\{1, 1/M\} = 1$. Folglich existiert nach dem Satz von Picard–Lindelöf eine eindeutige Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[0-1, 0+1] = [-1,1]$.

(H 3) (Existenz und Eindeutigkeit, 6 Punkte)

Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y\cdot e^{x^2-25}\cdot\sin(x^3+2),\quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1,5]$ besitzt.
Hinweis: Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Lösung des Anfangswertproblems berechnen.

LÖSUNG: Um zu zeigen, dass das Anfgangswertproblem

$$y' = y\cdot e^{x^2-25}\cdot\sin(x^3+2),\qquad y(2) = 1$$

auf dem Intervall $[-1,5]$ über eine eindeutige Lösung verfügt, werden wir Satz von Picard-Lindelöf verwenden. Aus der Anfangsbedingung erhalten wir zunächst

$$x_0 = 2.$$

Wegen

$$[x_0-\delta, x_0+\delta] = [2-\delta, 2+\delta] = [-1,5]$$

ergibt sich zudem der Wert

$$\delta = 3.$$

Da die Funktion f mit der Zuordnungsvorschrift

$$f(x,y) = y\cdot e^{x^2-25}\cdot\sin(x^3+2)$$

als Komposition stetiger Funktionen auf dem Streifen

$$J\times\mathbb{R} = \{(x,y)\,|\,x_0-\delta\leq x\leq x_0+\delta,\ y\in\mathbb{R}\} = [-1,5]\times\mathbb{R}$$

stetig ist und da f wegen

$$\begin{aligned}|f(x,y_1)-f(x,y_2)| &= \left|y_1\cdot e^{x^2-25}\cdot\sin(x^3+2) - y_2\cdot e^{x^2-25}\cdot\sin(x^3+2)\right|\\ &= \left|e^{x^2-25}\cdot\sin(x^3+2)\right|\cdot|y_1-y_2|\\ &= \underbrace{\left|e^{x^2-25}\right|}_{\leq 1}\cdot\underbrace{\left|\sin(x^3+2)\right|}_{\leq 1}\cdot|y_1-y_2|\\ &\leq 1\cdot|y_1-y_2|\end{aligned}$$

für alle $(x,y_1),(x,y_2)\in J\times\mathbb{R}$ auf $J\times\mathbb{R}$ Lipschitz-stetig (mit Lipschitz-Konstante 1) ist, existiert nach Satz von Picard-Lindelöf *genau eine* Lösung des Anfangswertproblems auf dem Intervall $[-1,5]$.