Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
11.05.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Satz von Picard–Lindelöf)

Zeigen Sie bei dem folgenden Anfangswertproblem, dass es genau eine Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzt:

$$y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y, \qquad y(3/2) = 10^3.$$

(G 2) (Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes)

Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v von der Fallzeit t unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Auf einen frei fallenden Körper der Masse m wirken dabei die folgenden äußeren Kräfte ein:

1. Die Schwerkraft: $F_1 = mg$
2. Der Luftwiderstand, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen wird: $F_2 = -kv^2$

(g: Ergbeschleunigung; k: Reibungskoeffizient).

Zeigen Sie, dass für $t \to \infty$ strebt die Fallgeschwindigkeit gegen den Endwert

$$v_E = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Nehmen Sie dabei an, dass der freie Fall aus der Ruhe heraus erfolgt: $v(0) = 0$.

Skizzieren Sie den Verlauf der Fallgeschwindigkeit v unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes als Funktion der Fallzeit t.

Hausübungen

(H 1) (Satz von Picard–Lindelöf, 6 Punkte)

Zeigen Sie bei dem folgenden Anfangswertproblem, dass es genau eine Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzt:

$$y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y^2, \qquad y(3/2) = 1/4.$$

(H 2) (Näherungslösungen vom Anfangswertproblem, 6 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x^2} + x,\ y(1) = 0$. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$? Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem eine für alle $x > 0$ definierte eindeutige Lösung besitzt. Ausgehend von der Anfangsnäherung $y_0(x) = 0$ berechnen Sie dann die Näherungslösungen y_1, y_2, y_3 mit Picarditeration.