Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
11.05.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

4. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Satz von Picard–Lindelöf)

Zeigen Sie bei dem folgenden Anfangswertproblem, dass es genau eine Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzt:

$$y' = \sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})y, \qquad y(3/2) = 10^3.$$

LÖSUNG: Wegen $3x - x^2 - 2 = (x - 1)(2 - x) \geq 0$ für $x \in [1, 2]$ ist $\sin(\sqrt{3x - x^2 - 2})$ auf $[1, 2]$ definiert.

Wir wählen den Streifen $S = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ y \in \mathbb{R}\}$.

Wegen $|\sin\phi| < 1$ für alle $\phi \in \mathbb{R}$ liegt Lipschitz-Bedingung auf S vor mit $L = 1$. Mit dem Satz von Picard–Lindelöf folgt die Behauptung.

(G 2) (Freier Fall unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes)

Untersuchen Sie die Abhängigkeit der Fallgeschwindigkeit v von der Fallzeit t unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes. Auf einen frei fallenden Körper der Masse m wirken dabei die folgenden äußeren Kräfte ein:

1. Die Schwerkraft: $F_1 = mg$
2. Der Luftwiderstand, der proportional zum Quadrat der Geschwindigkeit angenommen wird: $F_2 = -kv^2$

(g: Ergbeschleunigung; k: Reibungskoeffizient).

Zeigen Sie, dass für $t \to \infty$ strebt die Fallgeschwindigkeit gegen den Endwert

$$v_E = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Nehmen Sie dabei an, dass der freie Fall aus der Ruhe heraus erfolgt: $v(0) = 0$.

Skizzieren Sie den Verlauf der Fallgeschwindigkeit v unter Berücksichtigung des Luftwiderstandes als Funktion der Fallzeit t.

LÖSUNG: Der Luftwiderstand wirkt der Schwerkraft stets entgegen. Nach dem Newtonschen Grundgesetz der Mechanik gilt dann:

$$mv' = mg - kv^2.$$

Diese Gleichung ist druch Trennung der Variablen lösbar. Wir bringen diese Gleichung mit Hilfe der Substitution

$$x = \sqrt{\frac{k}{mg}}v$$

auf die folgende Form

$$\sqrt{\frac{m}{gk}}x' = 1 - x^2.$$

Wir trennen nun die Variablen und integrieren anschließend beide Seiten der DGL, wobei wir beachten müssen, dass $0 \leq x < 1$ ist:

$$\sqrt{\frac{m}{gk}}\operatorname{artanh}(x) = t + C.$$

Durch Rücksubstitution folgt weiter

$$\operatorname{artanh}\left(\sqrt{\frac{k}{mg}}v\right) = \sqrt{\frac{gk}{m}}(t + C).$$

Diese Gleichung lösen wir nach v auf und erhalten:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}(t + C)\right).$$

Aus dem Anfangswert lÓaßt sich dann die Integrationskonstante C berechnen:

$$C = 0.$$

Für die Fallgeschwindigkeit erhalten wir damit das Zeitgesetz:

$$v = \sqrt{\frac{mg}{k}}\tanh\left(\sqrt{\frac{gk}{m}}t\right), \qquad t \geq 0.$$

Für $t \to \infty$ strebt die Fallgeschwindigkeit gegen den Endwert

$$v_E = \lim_{t\to\infty} v(t) = \sqrt{\frac{mg}{k}}.$$

Der Körper fällt dann kräftefrei, d.h. mit konstanter Geschwindigkeit v_E, da sich Gewichtskraft und Reibungskraft (Luftwiderstand) in ihrer Wirkung gerade aufheben. Die Geschwindigkeit-Zeit-Funktion läßt sich auch in der Form

$$v = v_E\tanh\left(\frac{g}{v_E}t\right), \qquad t \geq 0,$$

darstellen. Den Graph von tanh kann man in Wikipedia finden.

Hausübungen

(H 1) (Satz von Picard–Lindelöf, 6 Punkte)

Zeigen Sie bei dem folgenden Anfangswertproblem, dass es genau eine Lösung im Intervall $[1, 2]$ besitzt:

$$y' = \sin\left(\sqrt{3x - x^2 - 2}\right)y^2, \qquad y(3/2) = 1/4.$$

Lösung: Wegen $3x - x^2 - 2 = (x - 1)(2 - x) \geq 0$ für $x \in [1, 2]$ ist $\sin\left(\sqrt{3x - x^2 - 2}\right)$ auf $[1, 2]$ definiert.

Wir wählen das Rechteck $R = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2,\ -3/4 \leq y \leq 5/4\}$.

Es liegt Lipschitz-Bedingung auf R vor mit $L = 5/2$. Ferner ist: $x_0 = 3/2$, $a = 1/2$, $b = 1$, $M = 25/16$, also $\alpha = 1/2$. Mit dem Satz von Picard–Lindelöf folgt die Behauptung.

(H 2) (Näherungslösungen vom Anfangswertproblem, 6 Punkte)

Gegeben sei das Anfangswertproblem $y' = \frac{y}{x^2} + x,\ y(1) = 0$. Erfüllt die rechte Seite eine Lipschitzbedingung bzgl. y auf $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y \in \mathbb{R}\}$? Begründen Sie, warum das Anfangswertproblem eine für alle $x > 0$ definierte eindeutige Lösung besitzt. Ausgehend von der Anfangsnäherung $y_0(x) = 0$ berechnen Sie dann die Näherungslösungen y_1, y_2, y_3 mit Picarditeration.

Lösung: 1. Schritt:
Lipschitzbedingung erfüllt im Streifen

$$\mathcal{S}_n = \{(x, y) : \frac{1}{n} < x < n,\ y \in \mathbb{R}\}.$$

2. Schritt:
Für $\mathcal{S}_m$, $m > n$ stimmt die Lösung $y_m : [\frac{1}{m}, m] \to \mathbb{R}$ auf dem Intervall $[\frac{1}{n}, n]$ mit y_n überein, weil sonst das Anfangswertproblem im Streifen $\mathcal{S}_n$ zwei Lösungen hätte.

3. Schritt:
Also existiert eine Lösung $y(\infty)$ auf

$$(0, \infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\frac{1}{n}, n].$$

4. Schritt:

$$\begin{aligned}
y_0(x) &= 0 \\
y_1(x) &= \int_1^x (\frac{0}{t^2}) dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \\
y_2(0) &= \int_1^x (\frac{\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}}{t^2} + t) dt = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{3}{2} \\
y_3(x) &= \int_1^x (\frac{\frac{1}{2}t + \frac{1}{2t} + \frac{1}{2}t^2 - 1}{t^2} + t) dt \\
&= \frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4t^2} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{t} + \frac{1}{2}t^2 + \text{const}
\end{aligned}$$