

Mathematisches Modellieren für LaG/M

Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Picard–Iteration)

Für das Anfangswertproblem

$$y' = x \cdot y, \quad y(0) = 1$$

berechnen Sie 3 sukzessive Näherungslösungen. Mit welchem Wert starten Sie am günstigsten? Vergleichen Sie die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.

(G 2) (Reduktion der Ordnung)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $x^2 y'' = (y')^2$.
2. $y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$.

(G 3)

Ein Massenpunkt P der Masse $m = 2$ bewege sich längs der x -Achse und werde in Richtung des Ursprungs $x = 0$ von einer Kraft K , die proportional zu x ist (Proportionalitätsfaktor 8), angezogen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich P an der Stelle $x = 10$ in Ruhelage.

1. Geben Sie ein mathematisches Modell für den Fall an, dass
 - (a) keine weiteren Kräfte auf P einwirken;
 - (b) zusätzlich eine Dämpfungskraft berücksichtigt wird, deren Betrag den achtfachen Wert der augenblicklichen Geschwindigkeit hat.
2. Lösen Sie die im ersten Teil der Aufgabe gefundenen Differentialgleichungen. Skizzieren Sie die zugehörigen Lösungskurven.

Hinweis: $(\tan t)' = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

Hausübungen

(H 1) (Reduktion der Ordnung, 6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;
2. $2yy'' = (y')^2 + 1$.

(H 2) (6 Punkte)

Zwei Steine werden mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0 , aber im zeitlichen Abstand t_0 , im Schwerfeld der Erde senkrecht nach oben geworfen.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese!
2. Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Steine?
3. Wie groß sind dann ihre Geschwindigkeiten?

(H 3) (Anfangswertproblem, 4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' = x \exp(-x), \quad y(0) = 2, y'(0) = 4.$$