Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
18.05.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

5. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Picard–Iteration)

Für das Anfangswertproblem

$$y' = x \cdot y, \quad y(0) = 1$$

berechnen Sie 3 sukzessive Näherungslösungen. Mit welchen Wert starten Sie am günstigsten? Vergleichen Sie die gefundene Approximation mit der exakten Lösung.

LÖSUNG: Die Iteration startet günstigerweise mit $y^0 = y(0) = 1$ und ist gegeben durch

$$\begin{aligned} y^{n+1}(k) &= y(0) + \int_0^x f\big(x, y^n(x)\big) = y(0) + \int_0^x xy^n\,dx; \\ y^1 &= 1 + \int_0^x t\,dt = \frac{t^2}{2} + 1;\ y^2 = 1 + (1/2)x^2 + (1/8)x^4; \\ y^3 &= 1 + (1/2)x^2 + (1/8)x^4 + (1/48)x^6. \end{aligned}$$

Die exakte Lösung ist durch $y = e^{1/2x^2}$ gegeben und die Näherungslösungen sind gerade die Partialsummen der Exponentialreihe der exakten Lösung.

(G 2) (Reduktion der Ordnung)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $x^2 y'' = (y')^2$.
2. $y'' + 2y \cdot (y')^3 = 0$.

LÖSUNG: 1. Mit der Substitution $z = y'$ erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$x^2 z' = z^2 \quad (\text{oder } \frac{z'}{z^2} = \frac{1}{x^2}).$$

Mit der Trennung der Veränderlichen löst man diese Gleichung auf:

$$z^{-1} = c_1 + \frac{1}{x} \iff z(xc_1 + 1) = x.$$

Also ist $y' = \frac{x}{xc_1+1}$. Die Trennung der Veränderlichen liefert die Lösung

$$c_1 x - c_1^2 y = \ln|c_1 x + 1| + c_2.$$

2. Die FiffGl-en für die Umkehrfunktion ist

$$x'' = -(x')^3 f(y, \frac{1}{x'}) = 2y.$$

Die Lösung von dieser DiffGl ist

$$x(y) = \frac{1}{3}y^3 + c_1 y + c_2,$$

wobei $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ zwei Konstanten sind.

(G 3)

Ein Massenpunkt P der Masse $m = 2$ bewege sich längs der $x-$Achse und werde in Richtung des Ursprungs $x = 0$ von einer Kraft K, die proportional zu x ist (Proportionalitätsfaktor 8), angezogen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich P an der Stelle $x = 10$ in Ruhelage.

1. Geben Sie ein mathematisches Modell für den Fall an, dass
   (a) keine weiteren Kräfte auf P einwirken;
   (b) zusätzlich eine Dämpfungskraft berücksichtigt wird, deren Betrag den achtfachen Wert der augenblicklichen Geschwindigkeit hat.
2. Lösen Sie die im ersten Teil der Aufgabe gefundenen Differentialgleichungen. Skizzieren Sie die zugehörigen Lösungskurven.

   Hinweis: $(\tan t)' = 1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$.

LÖSUNG: 1. Die Kraft K wirkt der Bewegung stets entgegen. Also $K = -8x$ ist, wobei $x(t)$ die Bewegung längs der $x-$Achse bezeichnet.
   (a) Die gesuchte Gleichung nach dem Neutonschen Gesetz ist $x'' + 4x = 0$. Da P sich zum Zeitpunkt $t = 0$ an der Stelle $x = 10$ in Ruhelage befindet, bekommt man, dass $x(0) = 10$ und $x'(0) = 0$ sind.
   (b) Wenn noch zusätzlich eine Dämpfungskraft ($F = -8x'$) berücksichtigt wird, erhält man die folgende Gleichung $x'' + 4x' + 4x = 0$ für x. Die Funktion x erfüllt die Anfangsbedingungen $x(0) = 10$ und $x'(0) = 0$.

2. Die beiden DiffGl-en sind lineare homogene DiffGl-en zweiter Ordnung (Typ IV aus der Vorlesung). Wir lösen zunächst die erste Gleichung:

$$x'' = -4x, \quad x(0) = 10, \; x'(0) = 0.$$

Eine nichttrivialle Lösung dieser Gleichung lautet

$$x_1(t) = \cos 2t.$$

Nach desm Satz 4.1 in von Finckenstein (s. 36) ist die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = v(t)x_1(t)$$

gegeben, wobei

$$v(t) = c_1 \int \exp(h(t))dt + c_2, \quad h(t) = \int \Big(\frac{4\sin 2t}{\cos 2t}\Big)dt$$

ist. Also

$$h(t) = \ln\Big(\frac{1}{\cos^2 2t}\Big)$$

und (Hinweis)

$$x(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t.$$

Aus der Anfangswertbedingungen erhalten wir, dass $c_1 = 0$ und $c_2 = 10$ sind.

Analog für die zweite Gleichung:
Eine nichttrivialle Lösung dieser Gleichung lautet

$$x_1(t) = \exp(-2t).$$

Nach desm Satz 4.1 in von Finckenstein (s. 36) ist die allgemeine Lösung durch

$$x(t) = v(t)x_1(t)$$

gegeben, wobei

$$v(t) = c_1 \int \exp(h(t))dt + c_2, \quad h(t) = 0$$

ist. Also

$$x(t) = (c_1 t + c_2)\exp(-2t).$$

Aus der Anfangswertbedingungen erhalten wir, dass $c_1 = 20$ und $c_2 = 10$ sind.

Hausübungen

(H 1) (Reduktion der Ordnung, 6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $2xy'y'' = (y')^2 - 1$;
2. $2yy'' = (y')^2 + 1$.

LÖSUNG: 1. Die Substitution $u = y'$ liefert die DGL $2xu^3u' = u^2 - 1$, die mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden kann.

$$\begin{aligned} 2\frac{uu'}{u^2-1} &= \frac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad \int \frac{d(u^2-1)}{u^2-1} = \ln|x| + \ln c \\ \ln|u^2-1| &= \ln(c|x|) \iff u^2 - 1 = cx \\ y' &= \pm\sqrt{cx-1} \quad \text{(die Methode der Trennung der Variablen).} \end{aligned}$$

2. Die FiffGl-en für die Umkehrfunktion ist

$$x'' = -(x')^3 f(y, \frac{1}{x'}) = -\frac{x'}{2y} - \frac{(x')^3}{2y}.$$

Mit der Substitution $v = x'$ erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$v' = -\frac{v}{2y} - \frac{v^3}{2y}.$$

Das ist die Bernoullische Gleichung. Mit der Substitution $z = v^{-2}$ bekommt man die lineare inhomogene DiffGl

$$z' = \frac{z}{y} + \frac{1}{y}, \qquad \text{(Variation der Konstante).}$$

Die Lösung von dieser DiffGl lautet

$$z(y) = c_1 y - 1,$$

wobei $c_1 \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Dann

$$v(y) = \frac{1}{(c_1 y - 1)^2}$$

und schlie§lich

$$x(y) = -\frac{1}{c_1}\frac{1}{c_1 y - 1} + c_2,$$

wobei $c_2 \in \mathbb{R}$ eine weitere Konstante ist.

(H 2) (6 Punkte)

Zwei Steine werden mit gleicher Anfangsgeschwindigkeit v_0, aber im zeitlichen Abstand t_0, im Schwerefeld der Erde senkrecht nach oben geworfen.

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen auf und lösen Sie diese!
2. Nach welcher Zeit treffen sich die beiden Steine?
3. Wie groß sind dann ihre Geschwindigkeiten?

LÖSUNG: 1. Es handelt sich hier um ein eindimensionales Problem. Nach dem Newtonschen Gesetz gilt

$$my'' = -mg,$$

wobei g die konstante Erdbeschleunigung ist. Dann gilt

$$y'(t) = y'(t_s) - g(t - t_s).$$

Hier: t_s ist die Startzeit, $y'(t_s) = v_0$ ist die Anfangsgeschwindigkeit. Da $y(t_s) = 0$ (Erdboden) ist, bekommt man

$$y(t) = v_0(t - t_s) - \frac{1}{2}g(t - t_s)^2.$$

2. 1. Stein: $t_s = 0$, dann $y_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$.
   2. Stein: $t_s = t_0$, dann $y_2(t) = v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2$.

   Die beiden Steine treffen sich zur Zeit t_x, die sich aus

   $$y_1(t_x) = y_2(t_x)$$

   zu

   $$t_x = \frac{v_0}{g} + \frac{1}{2}t_0$$

   bestimmt.

3.
$$y_1'(t_x) = -\frac{1}{2}gt_0, \quad (Abwaertsbewegung),$$
$$y_2'(t_x) = \frac{1}{2}gt_0, \quad (Aufwaertsbewegung).$$

(H 3) (Anfangswertproblem, 4 Punkte)

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'' + y' = x \exp(-x), \quad y(0) = 2, y'(0) = 4.$$

LÖSUNG: Die Substitution $z = y'$ liefert

$$\begin{cases} z' + z = x \exp(-x), \\ z(0) = 4. \end{cases}$$

Mit $z(x) = v(x)e^{-x}$ erhalten wir

$$\begin{cases} v'(x) = x \\ v(0) = 4 \end{cases} \quad \Rightarrow v(x) = 4 + \frac{1}{2}x^2.$$

Dann ist

$$\begin{cases} y'(x) = (4 + \frac{1}{2}x^2)e^{-x} \\ y(0) = 2 \end{cases} \quad \Rightarrow y(x) = -(5 + x + x^2/2)e^{-x} + 7.$$