

Mathematisches Modellieren für LaG/M

Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Reduktion der Ordnung)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $y'' = e^y$.
2. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

(G 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Wir betrachten eine Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter haben. Die Funktion $y(t)$ gebe die Anzahl dieser Menschen an, die nach t Jahren noch leben ($t \geq 0$). Zu Beginn bestehe die Gruppe aus 100000 Menschen. Die zeitliche Entwicklung von y werde durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = -a(t)y(t), \quad t \geq 0,$$

beschrieben. Dabei werde die Sterbeintensität a im Laufe der Zeit immer größer und entwickle sich gemäß der Differentialgleichung

$$a'(t) = \frac{1}{20}a(t), \quad t \geq 0,$$

wobei $a(0) = \frac{1}{100}$ gelte.

1. Berechnen Sie zunächst die Funktion $a(t), t \geq 0$, und lösen Sie dann das Anfangswertproblem, das $y(t), t \geq 0$, erfüllt.
2. Eine andere Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter wie die zuvor betrachteten Menschen haben, sei durch eine Naturkatastrophe stark geschwächt und bestehe zu Beginn ebenfalls aus 100000 Menschen. Diese Gruppe entwickle sich gemäß der Differentialgleichung

$$x'(t) = -a(t)x(t) - 10e^{t/20}, \quad t \geq 0,$$

wobei $x(t)$ die Anzahl der nach t Jahren noch lebenden Menschen dieser Gruppe angebe. Berechnen Sie die Funktion $x(t), t \geq 0$.

3. Beschreiben Sie die Unterschiede, die in der zeitlichen Entwicklung der beiden Gruppen auf lange Sicht auftreten.

Hausübungen

(H 1) (Reduktion der Ordnung, 6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$;
2. $xy'' - (x + 1) \cdot y' + y = 0$ (eine spezielle Lösung $y_1(x) = e^x$).

(H 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

In einer chemischen Reaktion reagiert ein Atom Zink mit einem Atom Schwefel zu einem Molekül Zinksulfid. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich in einem Behälter a Mol Zink, b Mol Schwefel und noch kein Zinksulfid, wobei $a > 0, b > 0$ und $a \neq b$ gelte. Die Funktion $u(t)$ gebe die Menge Zinksulfid in Mol im Behälter nach t Zeiteinheiten, $t \geq 0$, an. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$u' = r(a - u)(b - u), \quad t \geq 0,$$

wobei r eine Konstante ist.

1. Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems.
2. Wie verhalten sich die Stoffmengen von Zink, Schwefel und Zinksulfid für sehr große Zeiten t in Abhängigkeit von den zu Beginn vorhandenen Stoffmengen a und b ? Welche Bedeutung könnte die Konstante r in diesem Modell haben?