Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
25.05.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

6. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Reduktion der Ordnung)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $y'' = e^y$.
2. $x^2y'' - xy' + y = 0$.

LÖSUNG: 1. Wir multiplizieren beide Seiten mit $2y'$ und erhalten

$$2y' \cdot y'' = 2e^y y' \iff (y')^2 = 2e^y + c \Rightarrow y' = \pm\sqrt{2e^y + c}\,.$$

Dies ist eine Differentialgleichung erster Ordnung mit getrennten Variablen für y:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{2e^y + c}} = \pm \int dx.$$

2. Die Funktion $y_1(x) = x$ ist eine Lösung der DGL. Wir machen den Ansatz $y = xu$. Dann gilt

$$x^2y'' - xy' + y = 0 \iff u''x + u' = 0.$$

Die Substitution $v = u'$ liefert die DGL $v'x + v = 0$. Diese kann mit der Methode der Trennung der Variablen gelöst werden:

$$\frac{v'}{v} = -\frac{1}{x} \Rightarrow v = \frac{1}{x} \Rightarrow u = \ln x; \quad y = x \ln x.$$

(G 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Wir betrachten eine Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter haben. Die Funktion $y(t)$ gebe die Anzahl dieser Menschen an, die nach t Jahren noch leben ($t \geq 0$). Zu Beginn bestehe die Gruppe aus 100000 Menschen. Die zeitliche Entwicklung von y werde durch die Differentialgleichung

$$y'(t) = -a(t)y(t), \quad t \geq 0,$$

beschrieben. Dabei werde die Sterbeintensität a im Laufe der Zeit immer größer und entwickle sich gemäß der Differentialgleichung

$$a'(t) = \frac{1}{20}a(t), \quad t \geq 0,$$

wobei $a(0) = \frac{1}{100}$ gelte.

1. Berechnen Sie zunächst die Funktion $a(t), t \geq 0$, und lösen Sie dann das Anfangswertproblem, das $y(t), t \geq 0$, erfüllt.

2. Eine andere Gruppe von Menschen, die alle dasselbe Alter wie die zuvor betrachteten Menschen haben, sei durch eine Naturkatastrophe stark geschwächt und bestehe zu Beginn ebenfalls aus 100000 Menschen. Diese Gruppe entwickle sich gemäß der Differentialgleichung

$$x'(t) = -a(t)x(t) - 10e^{t/20}, \quad t \geq 0,$$

wobei $x(t)$ die Anzahl der nach t Jahren noch lebenden Menschen dieser Gruppe angebe. Berechnen Sie die Funktion $x(t), t \geq 0$.

3. Beschreiben Sie die Unterschiede, die in der zeitlichen Entwicklung der beiden Gruppen auf lange Sicht auftreten.

LÖSUNG: 1. Die Lösung des Anfangswertproblems $a'(t) = \frac{1}{20}a(t),\ a(0) = \frac{1}{100}$ ist gegeben durch

$$a(t) = \frac{1}{100}e^{t/20}, \quad t \geq 0.$$

Mittels der Methode der Trennung der Variablen erhält man die Lösung vom Anfangswertproblem $y'(t) = -a(t)y(t),\ y(0) = 100000$:

$$y(t) = 100000 \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)}, \quad t \geq 0.$$

2. Die allgemeine Lösung x_h der homogenen Diff.Gl. $x' = a(t)x$ ist gegeben durch

$$x_h(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)},$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ beliebig ist. Mit der Methode der Variation der Konstanten bestimmen wir eine partikuläre Lösung der inhomogenen Gleichung $x'(t) = -a(t)x(t) - 10e^{t/20}$ mit dem Ansatz

$$x_p(t) = c(t) \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)}.$$

Die Funktion $c(t)$ erfüllt die Diff.Gl.

$$c'(t) = -10 \cdot e^{t/20} \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)},$$

die die folgende Lösung hat:

$$c(t) = -1000 \cdot e^{\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)}.$$

Die Lösung $x(t)$ ist also gegeben durch

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t) = c \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)} - 1000, \quad t \geq 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R}$ so gewählt werden muss, dass $x(0) = 100000$ gilt. Es folgt

$$x(t) = 101000 \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t/20}-1)} - 1000, \quad t \geq 0.$$

3. Da die Funktion $x(t)$ für große t negativ wird, macht es nur Sinn, $x(t)$ für $t \in [0, t_0]$ zu betrachten, wobei t_0 die Zeit ist, für die $x(t_0) = 0$ gilt und alle Mitglieder der Gruppe gestorben sind. Für t_0 muss also die Bedingung

$$101000 \cdot e^{-\frac{1}{5}(e^{t_0/20}-1)} = 1000,$$

also

$$t_0 = 20 \cdot \ln(1 + 5\ln(101)) = 63,6.$$

Nach ungefähr 63,6 Jahren sind also alle Mitglieder der geschwächten Gruppe gestorben. Zur gleichen Zeit leben noch etwa 990 Mitglieder der ersten Gruppe. Wegen $y(t) > 0$ für alle $t \geq 0$ und $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$ werden theoretisch auch alle Mitglieder der ersten Gruppe gestorben sein. So lebt nach etwa 81,4 Jahren noch ein Mitglied der ersten Gruppe. Die Mitglieder der geschwächten Gruppe sterben also im Mittel deutlich früher als die Mitglieder der anderen Gruppe.

Hausübungen

(H 1) (Reduktion der Ordnung, 6 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Differentialgleichungen:

1. $yy'' = (y')^2 - (y')^3$;
2. $xy'' - (x+1) \cdot y' + y = 0$ (eine spezielle Lösung $y_1(x) = e^x$).

LÖSUNG: 1. Die FiffGl-en für die Umkehrfunktion ist

$$x'' = -(x')^3 f(y, \frac{1}{x'}) = -\frac{x'}{y} + \frac{1}{y}.$$

Mit der Substitution $v = x'$ erhält man eine Differentialgleichung erster Ordnung:

$$v' = -\frac{v}{y} + \frac{1}{y} \qquad \text{(Variation der Konstante)}.$$

Das ist die lineare inhomogene Gleichung. Die Lösung von dieser DiffGl lautet

$$v(y) = \frac{c_1}{y} + 1,$$

wobei $c_1 \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Und schließlich

$$x(y) = y + c_1 \ln|y| + c_2,$$

wobei $c_2 \in \mathbb{R}$ eine weitere Konstante ist.

2. $y_1(x) = e^x$ ist die Lösung der DGL. Die Substitution $y(x) = v(x)e^x$ liefert, dass v die Gleichung

$$xv'' + (1-x)v' = 0$$

löst. Diese Gleichung lösen wir mit der Methode der Trennung der Variablen für $u = v'$ $\big(xu' + (1-x)u = 0\big)$

$$\ln u = x - \ln|x| + \ln c_1 \quad \text{oder} \quad \ln u = \ln\big(c_1 \frac{e^x}{|x|}\big).$$

Daraus schließen wir, dass $u = c_1 \frac{e^x}{|x|}$. Dann ist die Lösung der DGL mit $v(x) = \int c_1 \frac{e^x}{x}\, dx$

$$y(x) = v(x)e^x.$$

(H 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

In einer chemischen Reaktion reagiert ein Atom Zink mit einem Atom Schwefel zu einem Molekül Zinksulfid. Zur Zeit $t = 0$ befinden sich in einem Behälter a Mol Zink, b Mol Schwefel und noch kein Zinksulfid, wobei $a > 0, b > 0$ und $a \neq b$ gelte. Die Funktion $u(t)$ gebe die Menge Zinksulfid in Mol im Behälter nach t Zeiteinheiten, $t \geq 0$, an. Dann erfüllt u die Differentialgleichung

$$u' = r(a-u)(b-u), \qquad t \geq 0,$$

wobei r eine Konstante ist.

1. Berechnen Sie die Funktion $u(t)$, $t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems.

2. Wie verhalten sich die Stoffmengen von Zink, Schwefel und Zinksulfid für sehr große-Zeiten t in Abhängigkeit von den zu Beginn vorhandenen Stoffmengen a und b? Welche Bedeutung könnte die Konstante r in diesem Modell haben?

LÖSUNG: 1. Mit der Anfangswertbedingung $u'(0) = 0$ folgt mit der Methode der getrennten Variablen

$$\int_0^{u(t)} \frac{dz}{(a-z)(b-z)} = \int_0^t r ds = rt.$$

Wegen $a \neq b$ gilt weiterhin

$$\frac{1}{(a-z)(b-z)} = \frac{1}{(b-a)} \left(\frac{1}{(a-z)} - \frac{1}{(b-z)} \right).$$

Damit erhält man die Gleichung

$$rt = \int_0^{u(t)} \frac{1}{(b-a)} \left(\frac{1}{(a-z)} - \frac{1}{(b-z)} \right) dz = \frac{1}{(b-a)} \ln \left(\frac{a(b-u(t))}{b(a-u(t))} \right)$$

und daher

$$\frac{a(b-u(t))}{b(a-u(t))} = e^{r(b-a)t}, \quad t \geq 0.$$

Schließlich

$$u(t) = a \left(1 + \frac{a-b}{b \cdot e^{r(b-a)t} - a} \right), \quad t \geq 0.$$

2. Bezeichnen $v(t)$ die Stoffmenge von Zink und $w(t)$ die Stoffmenge von Schwefel in Mol nach t Zeiteinheiten, so gilt $v(t) = a - u(t)$ und $w(t) = b - u(t)$. Denn es wird die Menge an Zink verbraucht, die zu Zinksulfid reagiert, und Analoges gilt für Schwefel.

   Außerdem gilt im Fall $a < b$

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} a \left(1 + \frac{a-b}{b \cdot e^{r(b-a)t} - a} \right) = a.$$

   Es folgt also $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty} w(t) = b - a$. Somit reagiert auf lange Sicht das Komplette Zink mit der gleichen Menge Schwefel zu Zinksulfid, so dass $b - a$ Mol Schwefel übrig bleiben und a Mol Zinksulfid entstehen.

   Im Fall $a > b$ gilt

$$\lim_{t\to\infty} u(t) = \lim_{t\to\infty} a \left(1 + \frac{a-b}{b \cdot e^{r(b-a)t} - a} \right) = b.$$

   Es folgt also $\lim_{t\to\infty} v(t) = b - a$ und $\lim_{t\to\infty} w(t) = 0$. Somit reagiert auf lange Sicht der komplette Schwefel mit der gleichen Menge Zink zu Zinksulfid, so dass $b - a$ Mol Zink übrig bleiben und b Mol Zinksulfid entstehen.

   Der Stoff mit der zu Beginn kleineren Stoffmenge reagiert also auf lange Sicht komplett zu Zinksulfid.

   Die Konstante r bestimmt die Größe der Ableitung u' und kann daher ein Maß für die Geschwindigkeit der Reaktion von Zink und Schwefel zu Zinksulfid sein. Je größer r ist, desto höher ist diese Reaktionsgeschwindigkeit.