Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
01.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung

Gruppenübungen

(G 1) (Variation der Konstanten)

Für $x > 0$ sei die Differentialgleichung

$$x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden. Berechnen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

(G 2) (Differentialgleichung 2. Ordnung)

In einem neu entdeckten Universum befinden sich der Körper P mit der Masse M und der Körper K mit der Masse m. Dabei nehmen wir an, daß die Massen beider Körper in ihrem Mittelpunkt konzentriert sind, so daß wir beide Körper als Massenpunkte annehmen können. In diesem Universum wirkt zwischen den beiden Körpern die Gravitationskraft $F(x) = -\frac{\alpha M m}{x^3}$, wobei $\alpha > 0$ die Gravitationskonstante in diesem Universum und x der Abstand zwischen den beiden Körpern ist. Die Masse M sei sehr viel großer als die Masse m. Somit könen wir annehmen, daß Körper P in einem Punkt fixiert ist, während Körper K sich auf Körper P zubewegt.

1. Es sei $x(t)$ der Abstand der beiden Körper zur Zeit $t \geq 0$, wobei $x(0) = x_0 > 0$ gelte und K sich zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = \frac{\sqrt{\alpha M}}{x_0}$ auf P zu bewege. Bestimmen Sie zunächst eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für x, die die Wirkung der Gravitationskraft in diesem Universum auf K beschreibt.
2. Lösen Sie die Differentialgleichung für x' und bestimmen Sie damit die Zeit t_0, nach der Körper K auf Körper P auftrifft.

Hausübungen

(H 1) (Variation der Konstanten oder Reduktionsverfahren, 6 Punkte)

Mittels des Reduktionsverfahrens oder der Methode der Variation der Konstanten geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung auf dem geeigneten Intervall an:

$$(1-x)xy'' - (1-2x)y' + (1-3x+x^2)y = (1-x)^3.$$

Hinweis: Erraten Sie zuerst eine partikuläre Lösung.
Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = e^x$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (Probe!).

(H 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

Eine Population, die zur Zeit t die Große $y(t)$ hat, entwickle sich gemäß

$$y' = ay - by^{\alpha}, \qquad t \geq 0, \quad y(0) = y_0 > 0, \quad \alpha > 2,$$

wobei a und b positive Konstanten seien.

1. Lösen Sie das obige Anfangswertproblem und zeigen Sie insbesondere, dass die Lösung für alle $t \geq 0$ existiert.
2. Wie verhält sich die Population für $t \to \infty$? Interpretieren Sie das Ergebnis.