Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
01.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

7. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1) (Variation der Konstanten)

Für $x > 0$ sei die Differentialgleichung

$$x(x+1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 2x(x+1)$$

gegeben. Überprüfen Sie, ob die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung bilden. Berechnen Sie die allgemeine Lösung durch Variation der Konstanten.

Lösung: Die Funktionen $y_1(x) = (x+1)^2$ und $y_2(x) = x^2$ bilden ein Fundamentalsystem der homogenen Gleichung, denn ihre Wronski-Matrix

$$W(x) = \begin{pmatrix} (x+1)^2 & x^2 \\ 2(x+1) & 2x \end{pmatrix}$$

hat die Determinante $\det W(x) = 2x(x+1) > 0$ für $x > 0$.

Wir suchen Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung in der Form

$$y_n(x) = c_1(x)y_1(x) + c_2(x)y_2(x).$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt das lineare Gleichungssystem für c_1', c_2':

$$\begin{pmatrix} (x+1)^2 & x^2 \\ 2(x+1) & 2x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Integration ergibt

$$c_1(x) = -x + \ln(x+1) + d_1; \quad c_2(x) = x + \ln x + d_2; \quad d_1, d_2 \in \mathbb{R}.$$

(G 2) (Differentialgleichung 2. Ordnung)

In einem neu entdeckten Universum befinden sich der Körper P mit der Masse M und der Körper K mit der Masse m. Dabei nehmen wir an, daß die Massen beider Körper in ihrem Mittelpunkt konzentriert sind, so daß wir beide Körper als Massenpunkte annehmen können. In diesem Universum wirkt zwischen den beiden Körpern die Gravitationskraft $F(x) = -\frac{\alpha M m}{x^3}$, wobei $\alpha > 0$ die Gravitationskonstante in diesem Universum und x der Abstand zwischen den beiden Körpern ist. Die Masse M sei sehr viel großer als die Masse m. Somit könen wir annehmen, daß Körper P in einem Punkt fixiert ist, während Körper K sich auf Körper P zubewegt.

1. Es sei $x(t)$ der Abstand der beiden Körper zur Zeit $t \geq 0$, wobei $x(0) = x_0 > 0$ gelte und K sich zur Zeit $t = 0$ mit der Geschwindigkeit $v_0 = \frac{\sqrt{\alpha M}}{x_0}$ auf P zu bewege. Bestimmen Sie zunächst eine Differentialgleichung zweiter Ordnung für x, die die Wirkung der Gravitationskraft in diesem Universum auf K beschreibt.
2. Lösen Sie die Differentialgleichung für x' und bestimmen Sie damit die Zeit t_0, nach der Körper K auf Körper P auftrifft.

LÖSUNG: 1. Mit dem Neutonschen Gesetz folgt

$$mx''(t) = F(x(t)) = -\frac{\alpha Mm}{x^3}, \quad t \geq 0,$$

solange $x(t) > 0$ gilt. Es sei nun $t_0 > 0$ der Zeitpunkt, an dem K auf P auftrifft. Nach Voraussetzungen gilt außerdem $x(0) = x_0$ und $x'(0) = -v_0$ (da K sich auf P zu bewegt, muss $x' \leq 0$ gelten). Multipliziert man obige Gleichung mit x'. so erhält man

$$x''(t) \cdot x'(t) = -\frac{\alpha M}{x^3(t)} x'(t), \quad t \in [0, t_0).$$

Durch Integration von 0 bis t ergibt sich für $t \in (0, t_0)$

$$\frac{1}{2}((x'(t))^2 - (x'(0))^2) = -\alpha M \left(-\frac{1}{2x^2(t)} + \frac{1}{2x^2(0)} \right).$$

Verwendet man nun die Anfangswertbedingungen, so erhält man

$$\frac{1}{2}(x'(t))^2 = \frac{\alpha M}{2x^2(t)}.$$

Da $x'(t) \leq 0$ für $t \in [0, t_0)$ wegen $x'(0) = 0$ und $x''(s) \leq 0$ für alle $s \in [0, t_0)$ gilt, folgt

$$x'(t) = -\frac{\sqrt{\alpha M}}{x(t)}, \quad t \in [0, t_0).$$

2. Die erhaltene Gleichung für $x'(t)$ ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen. Wir erhalten somit

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 - 2\sqrt{\alpha M} \cdot t}, \quad t \in (0, t_0)$$

wegen $x(t) > 0$ für $t \in (0, t_0)$. Wegen $x(t_0) = 0$ folgt daher

$$t_0 = \frac{x_0^2}{2\sqrt{\alpha M}}.$$

Zu dieser Zeit treffen die beiden Körper aufeinander.

Hausübungen

(H 1) (Variation der Konstanten oder Reduktionsverfahren, 6 Punkte)

Mittels des Reduktionsverfahrens oder der Methode der Variation der Konstanten geben Sie die allgemeine Lösung der folgenden Differentialgleichung auf dem geeigneten Intervall an:

$$(1 - x)xy'' - (1 - 2x)y' + (1 - 3x + x^2)y = (1 - x)^3.$$

Hinweis: Erraten Sie zuerst eine partikuläre Lösung.
Hinweis: Die Funktion $y_1(x) = e^x$ ist eine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung (Probe!).

LÖSUNG: Wir suchen Lösungen der inhomogenen Differentialgleichung auf dem Intervall $(1, +\infty)$.
Wir erraten die partikuläre Lösung: $y_p(x) = -x$.
Mit dem Ansatz

$$y_h(x) = e^x v(x)$$

erhalten wir aus der homogenen Differentialgleichung

$$x(1-x)v'' + (4x - x^2 - 1)v' = 0.$$

Die Substitution $z = v'$ liefert

$$x(1-x)z' + (4x - x^2 - 1)z = 0.$$

Mit der Methode der Trennung der Variablen erhalten wir die Lösung dieser Differentialgleichung

$$z(x) = c_1 e^{-2x} x(1-x),$$

wobei $c_1 \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Aus (siehe von Finckenstein, Band I, K. 23)

$$\int e^{-2x} x(1-x) dx = \frac{1}{2} e^{-2x} x^2$$

ergibt sich, dass

$$v(x) = c_1 \frac{1}{2} e^{-2x} x^2 + c_2,$$

wobei $c_2 \in \mathbb{R}$ eine weitere Konstante ist, und somit die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung

$$y_h(x) = c_1 \frac{1}{2} e^{-x} x^2 + c_2 e^x.$$

Wir zeigen, dass zwei Lösungen e^x und $e^{-x}x^2$ ein Fundamentalsystem bilden. Ihre Wronski-Determinante ist

$$\det W(x) = 2x(x-1) > 0$$

für $x > 1$.
Die allgemeine Lösung der Differentialgleichung ist damit ($c_3 = c_1/2$)

$$y(x) = c_3 e^{-x} x^2 + c_2 e^x - x.$$

(H 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

Eine Population, die zur Zeit t die Große $y(t)$ hat, entwickle sich gemäß

$$y' = ay - by^\alpha, \quad t \geq 0, \ \ y(0) = y_0 > 0, \ \ \alpha > 2,$$

wobei a und b positive Konstanten seien.

1. Lösen Sie das obige Anfangswertproblem und zeigen Sie insbesondere, dass die Lösung für alle $t \geq 0$ existiert.
2. Wie verhält sich die Population für $t \to \infty$? Interpretieren Sie das Ergebnis.

LÖSUNG: 1. Da die Diff-Gl. eine Bernoulli-Gleichung mit Parameter α ist, definieren wie $z := y^{1-\alpha}$ und erhalten die lineare Gleichung

$$z' = -(\alpha - 1)az + (\alpha - 1)b$$

mit der Anfangsbedingung $z(0) = 1/y_0^{\alpha-1}$. Die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$z_h(t) = ce^{-(\alpha-1)at}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten bekommen wir die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$z(t) = \left(\frac{1}{y_0^{\alpha-1}} - \frac{b}{a} \right) e^{-(\alpha-1)at} + \frac{b}{a}, \quad t \geq 0.$$

Da $a, b, \alpha - 1$ und y_0 positiv sind, folgt $e^{-(\alpha-1)at} \leq 1$ für $t \geq 0$ und insbesondere

$$z(t) = \frac{1}{y_0^{\alpha-1}} e^{-(\alpha-1)at} - \frac{b}{a} e^{-(\alpha-1)at} + \frac{b}{a} \geq \frac{1}{y_0^{\alpha-1}} e^{-(\alpha-1)at} > 0, \quad t \geq 0.$$

Somit existiert $y = 1/z^{\frac{1}{\alpha-1}}$ und das ursprünliche Anfangswertproblem:

$$y(t) = \frac{1}{\left(\left(\frac{1}{y_0^{\alpha-1}} - \frac{b}{a} \right) e^{-(\alpha-1)at} + \frac{b}{a} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}}, \quad t \geq 0.$$

2. Aus Teil 1) folgt

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}} > 0,$$

so dass sich die Population $y(t)$ in der Nähe von $\left(\frac{a}{b} \right)^{\frac{1}{\alpha-1}}$ für grosse Zeiten befindet. Insbesondere konvergiert die Population gegen einen positiven Gleichgewichtspunkt, d.h. die Population wird nicht aussterben.