Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
08.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

8. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - y'' - 6y' = 0$ und lösen Sie die Differentialgleichung unter den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$, $y'(0) = 12$ und $y''(0) = 3$.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' + y' = x^3 e^{-x}$.

(G 2)

Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \sin x.$$

(G 3) (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Die Funktion $y(t)$ gebe die Temperatur in Grad Celsius nach t Millisekunden in einem Explosionsprozess an. Durch die Explosion soll ein Motor ein Fahrzeug antreiben. Es sei bekannt, dass die Rate, mit der sich die Temperatur ändert, proportional zur Summe aus der aktuellen Temperatur und der dritten Potenz der aktuellen Temperatur sei. Dabei kann der Proportionalitätsfaktor $c > 0$ durch Veränderungen an der Steuerung des Motors beeinflusst werden. Der Explosionsprozess im Motor werde zur Zeit $t = 0$ gestartet und dabei herrsche im Motor eine Temperatur von 80 Grad Celsius.

1. Geben Sie das Anfangswertproblem an, das y löst.
2. Berechnen Sie die Funktion y.
3. Damit der Motor optimal funktioniert, soll die Explosion 15 Millisekunden nach dem Start stattfinden. Wie muss der Parameter c dazu gewählt werden?

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 7y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0.$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle -1. Testen Sie die Lösungen auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe der Wronski-Determinanten, am besten für $x_0 = 0$.

(H 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 4y'' = 1 + \cosh(2x).$$

(H 3) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

In einem Raum, der $100m^3$ Luft enthält, befinden sich 15 Personen, wobei alle Fenster und Türen geschlossen sind. Dabei atme jede Person pro Minute etwa 0,25 Liter CO_2 mehr aus als sie in dieser Zeit einatme. Nun werden durch eine Belüftungsanlage pro Minute $20m^3$ Frischluft, die 0,03 Prozent CO_2 enthalte, in den Raum geblasen. Die Frischluft vermische sich sofort mit der Luft im Raum und von dieser Mischung werden durch die Belüftung pro Minute $20m^3$ aus dem Raum entfernt. Die Funktion $y(t)$ gebe den CO_2-Gehalt in Litern der Luft im Raum t Minuten nach dem Einschalten der Belüftungsanlage an ($t \geq 0$). Zum Zeitpunkt des Einschaltens der Belüftungsanlage enthalte die Luft im Raum 0,3 Prozent CO_2.

1. Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen SIe näherungsweise die Differenz $y(t+\tau) - y(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass der CO_2-Gehalt der durch die Belüftung aus dem Raum entfernten Luft zwischen den Zeitpunkten t und $t + \tau$ Minuten konstant bleibt. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass y näherungsweise die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{5}y + 9,75$ für $t \geq 0$ erfüllt.
2. Berechnen Sie die Funktion $y(t), t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems.
3. Wie lange dauert es nach dem Einschalten der Belüftung, bis die Luft im Raum noch 0,06 Prozent CO_2 enthält?