Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
08.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

8. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

1. Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y''' - y'' - 6y' = 0$ und lösen Sie die Differentialgleichung unter den Anfangsbedingungen $y(0) = 3$, $y'(0) = 12$ und $y''(0) = 3$.
2. Bestimmen Sie alle Lösungen von $y'' + y' = x^3 e^{-x}$.

LÖSUNG: 1. Die charakteristische Gleichung der Differentialgleichung ist

$$\lambda^3 - \lambda^2 - 6\lambda = (\lambda - 3)(\lambda + 2)\lambda, \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 3.$$

Die allgemeine Lösung lautet also

$$y(x) = c_0 + ce^{-2x} + c_2 e^{3x}.$$

Einsetzen der Anfangswerte liefert

$$c_1 = -\frac{21}{10}, \quad c_2 = \frac{33}{10}, \quad c_3 = \frac{9}{5}.$$

2. Das charakteristische Polynom lautet

$$\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1), \quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(x) = c_1 + c_2 e^{-x}$. Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite ist

$$y_n(x) = x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3)e^{-x}.$$

Setzen wir $y_n(x)$ in die Gleichung ein, dann bekommen wir

$$((2a_2 - a_1) + (6a_3 - 2a_2)x + (2a_4 - 3a_3)x^2 - 4a_4 x^3)e^{-x} = x^5 e^{-x}.$$

Wir erhalten $a_4 = -\frac{1}{4}$, $a_3 = -1$, $a_2 = -3$ und $a_1 = -6$.

(G 2)

Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y''' + 3y'' + 3y' + y = \sin x.$$

LÖSUNG: Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3, \quad \lambda_{1,2,3} = -1.$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung ist $y(x) = (c_1 + c_2 x + c_2 x^2)e^{-x}$. Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite ist

$$y = a\cos x + b\sin x.$$

Wir erhalten

$$a\cos x + b\sin x + 3(-a\sin x + b\cos x) + 3(-a\cos x - b\sin x) + a\sin x - b\cos x = \sin x,$$

woraus sich $a = b = -\frac{1}{4}$ ergibt.

(G 3) (Differentialgleichung 1. Ordnung)

Die Funktion $y(t)$ gebe die Temperatur in Grad Celsius nach t Millisekunden in einem Explosionsprozess an. Durch die Explosion soll ein Motor ein Fahrzeug antreiben. Es sei bekannt, dass die Rate, mit der sich die Temperatur ändert, proportional zur Summe aus der aktuellen Temperatur und der dritten Potenz der aktuellen Temperatur sei. Dabei kann der Proportionalitätsfaktor $c > 0$ durch Veränderungen an der Steuerung des Motors beeinflusst werden. Der Explosionsprozess im Motor werde zur Zeit $t = 0$ gestartet und dabei herrsche im Motor eine Temperatur von 80 Grad Celsius.

1. Geben Sie das Anfangswertproblem an, das y löst.
2. Berechnen Sie die Funktion y.
3. Damit der Motor optimal funktioniert, soll die Explosion 15 Millisekunden nach dem Start stattfinden. Wie muss der Parameter c dazu gewählt werden?

LÖSUNG:

1. Die Rate, mit der sich die Temperatur zur Zeit t ändert, ist $c \cdot (y(t) + y(t)^3)$. Somit erfüllt y das Anfangswertproblem

$$y'(t) = c(y(t) + y(t)^3), \quad y(0) = 80, \quad t \in (0, T),$$

wobei T der Zeitpunkt der Explosion ist.

2. Die Differentialgleichung $y' = c(y + y^3)$ ist eine Bernoulli-Gleichung. Dann folgt mit $z = y^{-2}$

$$z' = -2cz - 2c, \quad t \geq 0.$$

Die allgemeine Lösung z_h der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$z_h(t) = Ce^{-2ct}, \quad t \geq 0,$$

mit $C \in \mathbb{R}$. Mit der Methode der Variation der Konstanten ist die Lösung der inhomogenen Gleichung gegeben durch

$$z(t) = \frac{6401}{6400}e^{-2ct} - 1, \quad t \geq 0.$$

Wegen $y = 1/\sqrt{z}$ folgt schließlich

$$y(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{6401}{6400}e^{-2ct} - 1}}, \quad t \in [0, T).$$

Dabei ist die maximale Existenzzeit T der Lösung (also der Zeitpunkt der Explosion) gegeben durch

$$\frac{6401}{6400}e^{-2cT} = 1, \qquad T = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{6401}{6400}\right).$$

3. Damit die Explosion 15 Millisekunden nach der Aktivierung des Airbags stattfindet, muss also $T = 15$ gelten. Somit folgt aus Teil b)

$$c = \frac{1}{2T}\ln\left(\frac{6401}{6400}\right) = \frac{1}{30}\ln\left(\frac{6401}{6400}\right) = 0{,}00000521.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung

$$y^{(5)} + 3y^{(4)} + 7y''' + 13y'' + 12y' + 4y = 0.$$

Hinweis: Bestimmen Sie die Vielfachheit der Nullstelle -1. Testen Sie die Lösungen auf lineare Unabhängigkeit mit Hilfe der Wronski-Determinanten, am besten für $x_0 = 0$.

LÖSUNG: Die charakteristische Gleichung ist

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 7\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = (\lambda + 1)^3(\lambda^2 + 4), \quad \lambda_{1,2,3} = -1,\ \lambda_{4,5} = \pm 2i.$$

Wir bekommen folgendes Fundamentalsystem der Differentialgleichung:

$$y_1(x) = e^{-x},\ y_2(x) = xe^{-x},\ y_3(x) = x^2e^{-x},\ y_4(x) = \cos(2x),\ y_5(x) = \sin(2x).$$

Die Wronskideterminante in $x_0 = 0$ ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 2 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & -6 & 0 & -8 \\ 1 & -4 & 12 & 16 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

(H 2) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(4)} - 4y'' = 1 + \cosh(2x).$$

LÖSUNG: Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^4 - 4\lambda^2 = \lambda^2(\lambda^2 - 4), \quad \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_{3,4} = \pm 2.$$

Die allgemeine Lösung zur homogenen Differentialgleichung ist

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-2x} + c_4e^{2x}.$$

Ein Ansatz vom Typ der rechten Seite ist

$$y_n(x) = ax^2 + bxe^{2x} + cxe^{-2x}.$$

(H 3) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

In einem Raum, der $100m^3$ Luft enthält, befinden sich 15 Personen, wobei alle Fenster und Türen geschlossen sind. Dabei atme jede Person pro Minute etwa 0,25 Liter CO_2 mehr aus als sie in dieser Zeit einatme. Nun werden durch eine Belüftungsanlage pro Minute $20m^3$ Frischluft, die 0,03 Prozent CO_2 enthalte, in den Raum geblasen. Die Frischluft vermische sich sofort mit der Luft im Raum und von dieser Mischung werden durch die Belüftung pro Minute $20m^3$ aus dem Raum entfernt. Die Funktion $y(t)$ gebe den CO_2-Gehalt in Litern der Luft im Raum t Minuten nach dem Einschalten der Belüftungsanlage an ($t \geq 0$). Zum Zeitpunkt des Einschaltens der Belüftungsanlage enthalte die Luft im Raum 0,3 Prozent CO_2.

1. Es sei $\tau > 0$ klein und $t \geq 0$. Bestimmen SIe näherungsweise die Differenz $y(t+\tau) - y(t)$. Nehmen Sie dabei an, dass der CO_2-Gehalt der durch die Belüftung aus dem Raum entfernten Luft zwischen den Zeitpunkten t und $t+\tau$ Minuten konstant bleibt. Zeigen Sie dann durch einen geeigneten Grenzübergang, dass y näherungsweise die Differentialgleichung $y' = -\frac{1}{5}y + 9,75$ für $t \geq 0$ erfüllt.
2. Berechnen Sie die Funktion $y(t), t \geq 0$, durch lösen des zugehörigen Anfangswertproblems.
3. Wie lange dauert es nach dem Einschalten der Belüftung, bis die Luft im Raum noch 0,06 Prozent CO_2 enthält?

LÖSUNG: 1. Zwischen den Zeitpunkten t und $t+\tau$ Minuten kommen $15 \cdot 0,25 \cdot \tau = 3,75\tau l$ CO_2 durch die atmenden Personen in die Raumluft, die sie pro Minute $15 \cdot 0,25 = 3,75l$ mehr CO_2ausatmen als sie einatmen. Außerdem kommen durch die Belüftung $20000 \cdot 0,0003 \cdot \tau = 6\tau l$ CO_2 zwischen den Zeitpunkten t und $t+\tau$ Minuten in den Raum. Zum Zeitpunkt t enthält der Raum $y(t)$ Liter CO_2, also enthält jeder LiterRaumluft $\frac{y(t)}{100000}$ Liter CO_2. Da zwischen den Zeitpunkten t und $t+\tau$ Minuten durch die Belüftung $20000 \cdot \tau l$ Luft aus dem Raum entfernt werden, werden mit dieser LUft gemäß der Annahme $\frac{y(t)}{100000} \cdot 20000 \cdot \tau = \frac{1}{5}y(t) \cdot \tau l$ CO_2 aus dem Raum entfernt. Daher gilt näherungsweise

$$y(t+\tau) - y(t) = -\frac{1}{5}y(t) \cdot \tau + 6\tau + 3,75\tau.$$

Es folgt

$$\frac{y(t+\tau) - y(t)}{\tau} = -\frac{1}{5}y(t) \cdot +9,75.$$

Mit dem Grenzübergang $\tau \to 0$ erhält man dann, dass y näherungsweise die Differentialgleichung

$$y'(t) = -\frac{1}{5}y(t) + 9,75$$

erfüllt.

2. Die allgemeine Lösung y_h der homogenen Gleichung ist gegeben durch

$$y_h(t) = ce^{-\frac{t}{5}}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Mit der Methode der Variation der Konstanten erhält man die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung

$$y(t) = 251,25 \cdot e^{-\frac{t}{5}} + 48,75, \quad t \geq 0,$$

für den Anfangswert $y(0) = 100000 \cdot 0,003 = 300$.

3. Es sei t_0 der Zeitpunkt nach dem Einschalten der Belüftung, an dem die Raumlift $0,06$ Prozent CO_2 enthält. Es folgt

$$t_0 = -5 \ln\left(\frac{11,25}{251,25}\right) = 15,53.$$

Daher dauert es nach dem Einschalten der Belüftungsanlage ungefähr 15,5 Minuten, bis die Luft im Raum noch 0,06 Prozent CO_2 enthält.