Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
15.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Übung

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y(2) = \cos x + x \cdot e^{-x}.$$

(G 2) (Lotka-Volterra-Gleichungen)

Die Lotka-Volterra-Gleichungen beschreiben die populationsdynamischen Interaktionen zweier Arten, bei denen die eine, die Raubtiere, sich von der anderen, den Beutetieren, ernährt. Sie lauten

$$N_1' = N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2), \quad N_2' = N_2(-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1),$$

wobei mit $N_1 = N_1(t)$ die Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt t und mit $N_2 = N_2(t)$ die Anzahl der Raubtiere zum Zeitpunkt t bezeichnet ist. $\epsilon_1, \gamma_1, \epsilon_2$ und γ_2 sind positive Konstanten. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

1. **(Erhaltung der Mittelwerte)**

   Die Mittelwerte über eine Periode T einer nicht-konstanten maximalen Lösung (N_1, N_2) des Lotka-Volterra-Systems sind, unabhängig von den Anfangsbedingungen,

   $$\bar{N_1} := \frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)dt = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}, \qquad \bar{N_2} := \frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)dt = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}.$$

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Differentialgleichungen für $\ln N_1$ und $\ln N_2$.

2. **(Störung der Mittelwerte)**

   Wird das Lotka-Volterra-System auf die folgende Weise mit einem reellen Parameter $\alpha \in (0, \epsilon_1)$ gestört,

   $$N_1' = N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) - \alpha N_1, \qquad N_2' = N_2(-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1) - \alpha N_2,$$

   so vergrößert sich der Mittelwert von N_1, während sich der Mittelwert von N_2 verkleinert.

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

(H 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

In einer Chemiefabrik wird in einem großen Behälter eine Flüssigkeit durch eine Reaktion von zwei Stoffen gewonnen. Die Reaktion kann nur bei hohen Temperaturen stattfinden, bei diesen Temperaturen ist die entstehende Flüssigkeit aber sehr explosiv. Damit keine Explosion stattfindet, muss Flüssigkeit abgepumpt werden, wenn zuviel davon im Behälter vorhanden ist. Die Funktion $y(t)$ beschreibe das Volumen der Flsšigkeit im Behälter in m^3. Da das Heizen des Behälters sehr teuer ist, möchte die Firma die Heizung nun zum Zeitpunkt $t = 0$ abstellen und möchte wissen, wie sich das Volumen der Flüssigkeit im Behälter dann entwickelt. Es wird angenommen, dass sich das Volumen der Flüssigkeit zur Zeit $t \geq 0$ nun mit der Rate

$$\frac{6 - 2y(t)}{y(t) + 3 + 3t}$$

ändert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei noch keine Flüssigkeit im Behälter, sondern nur die beiden Stoffe, aus denen die Flüssigkeit entsteht.

1. Stellen Sie das Anfangswertproblem, das y löst, auf und berechnen Sie $y(t)$ für $t \geq 0$ impliziert, indem Sie eine Gleichung für $y(t)$ bestimmen, in der keine Ableitungen oder Integrale vorkommen.
2. Was kann man aus der in Teil a) bestimmten Gleichung für die Menge der Flüssigkeit im Behälter für sehr große Zeiten t schließen?