Universität Duisburg-Essen
Fachbereich Mathematik
Dr. Sergiy Nesenenko
Christian Hubacsek
Christian Thiel

Sommersemester 2011
15.06.2011

Mathematisches Modellieren für LaG/M
Gewöhnliche Differentialgleichungen

9. Übung mit Lösungshinweisen

Gruppenübungen

(G 1)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$y^{(5)} + y^{(4)} + y^{(3)} + y(2) = \cos x + x \cdot e^{-x}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom der Gleichung ist

$$P(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + \lambda^3 + \lambda^2 = 0.$$

Daraus ergibt sich:

$$\lambda^2(\lambda^3 + \lambda^2 + \lambda + 1) = 0, \quad \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = -1.$$

Da $(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1) = (\lambda+1)(\lambda^2+1)$ ist, erhalten wir die weiteren Nullstellen vom charakteristischen Polynom

$$\lambda_4 = i, \quad \lambda_5 = -i.$$

Hieraus ergibt sich das Fundamentalsystem

$$y_1(x) = 1,\ y_2(x) = x,\ y_3(x) = e^{-x},\ y_4(x) = \cos x,\ y_5(x) = \sin x.$$

Da $-i, i$ Nullstellen des charakteristischen Polynoms sind, bestimmen wir eine partikuläre Lösung $y^*(x)$ durch folgenden Ansatz vom Typ der Störungsfunktion

$$\begin{aligned} y^*(x) &= (a_1 + a_2 x) x e^{-x} + x(b_1 \cos x + b_2 \sin x). \\ (y^*)' &= (a_1 + 2a_2 x)e^{-x} - (a_1 x + a_2 x^2)e^{-x} \\ &\quad + (b_1 \cos x + b_2 \sin x) + x(-b_1 \sin x + b_2 \cos x), \dots . \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ergibt a_1, a_2, b_1, b_2. Dann ist die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y(x) = c_1 + c_2 x + c_3 e^{-x} + c_4 \cos x + c_5 \sin x + y^*(x).$$

(G 2) (Lotka-Volterra-Gleichungen)

Die Lotka-Volterra-Gleichungen beschreiben die populationsdynamischen Interaktionen zweier Arten, bei denen die eine, die Raubtiere, sich von der anderen, den Beutetieren, ernährt. Sie lauten

$$N_1' = N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2), \quad N_2' = N_2(-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1),$$

wobei mit $N_1 = N_1(t)$ die Anzahl der Beutetiere zum Zeitpunkt t und mit $N_2 = N_2(t)$ die Anzahl der Raubtiere zum Zeitpunkt t bezeichnet ist. $\epsilon_1, \gamma_1, \epsilon_2$ und γ_2 sind positive Konstanten. Beweisen Sie die folgenden Aussagen aus der Vorlesung:

1. **(Erhaltung der Mittelwerte)**

   Die Mittelwerte über eine Periode T einer nicht-konstanten maximalen Lösung (N_1, N_2) des Lotka-Volterra-Systems sind, unabhängig von den Anfangsbedingungen,

$$\bar{N_1} := \frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)dt = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}, \qquad \bar{N_2} := \frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)dt = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}.$$

   Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Differentialgleichungen für $\ln N_1$ und $\ln N_2$.

2. **(Störung der Mittelwerte)**

   Wird das Lotka-Volterra-System auf die folgende Weise mit einem reellen Parameter $\alpha \in (0, \epsilon_1)$ gestört,

$$N_1' = N_1(\epsilon_1 - \gamma_1 N_2) - \alpha N_1, \qquad N_2' = N_2(-\epsilon_2 + \gamma_2 N_1) - \alpha N_2,$$

   so vergrößert sich der Mittelwert von N_1, während sich der Mittelwert von N_2 verkleinert.

LÖSUNG: 1. Wir bestimmen zunächst eine Gleichung für die logarithmische Ableitung der ersten Komponente N_1 der Lösung:

$$\frac{d}{dt}\ln N_1(t) = \frac{N_1'(t)}{N_1(t)} = \epsilon_1 - \gamma_1 N_2(t).$$

Integriert man die beiden Seiten dieser Gleichung über eine Periode T, so erhält man für die linke Seite

$$\int_0^T \frac{d}{dt}\ln N_1(t)dt = \ln N_1(T) - \ln N_1(0) = 0$$

wegen $N_1(T) = N_1(0)$ (Periodizität), und für die rechte Seite

$$\int_0^T (\epsilon_1 - \gamma_1 N_2(t))dt = \epsilon_1 T - \gamma_1 \int_0^T N_2(t)dt.$$

Dies ergibt für den Mittelwert von $N_2(t)$ über dem Intervall $[0, T]$:

$$\frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)dt = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1} =: \bar{N_2}.$$

Genauso beweist man auch die Gleichung

$$\frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)dt = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2} =: \bar{N_1}.$$

2. Sei (N_1, N_2) eine maximale Lösung des ungestörten Systems, und sei $(\bar{N_1}, \bar{N_2})$ eine maximale Lösung des gestörten Systems. Das gestörte System entsteht hierbei aus dem ungestörten dadurch, dass man anstelle des Parameters ϵ_1 den verminderten Parameter $\epsilon_1 - \alpha > 0$ einsetzt, und anstelle des Parameters ϵ_2 den vergrößerten Wert $\epsilon_2 + \alpha$. Daher lässt sich die Aussage 1 dieser Aufgabe sowohl im gestörten als auch im ungestörten Fall anwenden.

   Für die Mittelwerte der Anzahl der Beutetiere N_1 entlang der Lösungen (N_1, N_2) und $(\bar{N_1}, \bar{N_2})$ gilt also

$$\frac{1}{T}\int_0^T N_1(t)dt = \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \bar{N_1}(t)dt = \frac{\epsilon_2 + \alpha}{\gamma_2} > \frac{\epsilon_2}{\gamma_2}.$$

   Auf der Seite der Raubtiere hat man die Gleichungen

$$\frac{1}{T}\int_0^T N_2(t)dt = \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}, \qquad \frac{1}{T}\int_0^T \bar{N_2}(t)dt = \frac{\epsilon_1 - \alpha}{\gamma_1} < \frac{\epsilon_1}{\gamma_1}.$$

Hausübungen

(H 1) (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x \cos x.$$

LÖSUNG: Das charakteristische Polynom $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ hat die einfachen Nullstellen $1 \pm i$, also ist $y_h(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x)$. Da $\alpha + i\beta = 1 + i$ einfache Nullstelle von $p(\lambda)$ ist, kann man den Ansatz

$$y_p(x) = x(A \cos x + B \sin x)e^x$$

machen. Eingehen in die Gleichung ergibt nach längerer Rechnung

$$(2B \cos x - 2A \sin x)e^x = e^x \cos x,$$

also $2B \cos x - 2A \sin x = \cos x$. Koeffizientenvergleich liefert nun $2B = 1$, $-2A = 0$, also $A = 0$, $B = 1/2$. Somit haben wir $y_p(x) = \frac{x}{2} e^x \sin x$. Die allgemeine Lösung der inhomogenen Gleichung ist

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = \frac{x}{2} e^x \sin x + e^x(c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

(H 2) (Differentialgleichung 1. Ordnung, 6 Punkte)

In einer Chemiefabrik wird in einem großen Behälter eine Flüssigkeit durch eine Reaktion von zwei Stoffen gewonnen. Die Reaktion kann nur bei hohen Temperaturen stattfinden, bei diesen Temperaturen ist die entstehende Flüssigkeit aber sehr explosiv. Damit keine Explosion stattfindet, muss Flüssigkeit abgepumpt werden, wenn zuviel davon im Behälter vorhanden ist. Die Funktion $y(t)$ beschreibe das Volumen der Flüssigkeit im Behälter in m^3. Da das Heizen des Behälters sehr teuer ist, möchte die Firma die Heizung nun zum Zeitpunkt $t = 0$ abstellen und möchte wissen, wie sich das Volumen der Flüssigkeit im Behälter dann entwickelt. Es wird angenommen, dass sich das Volumen der Flüssigkeit zur Zeit $t \geq 0$ nun mit der Rate

$$\frac{6 - 2y(t)}{y(t) + 3 + 3t}$$

ändert. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sei noch keine Flüssigkeit im Behälter, sondern nur die beiden Stoffe, aus denen die Flüssigkeit entsteht.

1. Stellen Sie das Anfangswertproblem, das y löst, auf und berechnen Sie $y(t)$ für $t \geq 0$ impliziert, indem Sie eine Gleichung für $y(t)$ bestimmen, in der keine Ableitungen oder Integrale vorkommen.
   Hinweis: Lösen Sie die Gleichung für y durch Substitution $s = t + 2$ und $z(s) = y(s - 2) - 3$.
2. Was kann man aus der in Teil a) bestimmten Gleichung für die Menge der Flüssigkeit im Behälter für sehr große Zeiten t schließen?

LÖSUNG: 1. Die Funktion y löst das AWP

$$y' = \frac{6 - 2y(t)}{y(t) + 3 + 3t}, \quad y(0) = 0, \quad t \geq 0.$$

Mit der Substitution $s = t + 2$ und $z(s) = y(s - 2) - 3$ gilt dann

$$z' = \frac{-2z}{3s + z} = f\left(\frac{z}{s}\right).$$

Die Substitution $u(s) = z(s)/s$ auf die Gleichung

$$u' = -\frac{1}{s}\frac{u^2 + 5u}{u + 3}.$$

Die Anfangsbedingung führt auf $u(2) = -3/2$. Mit der Methode der getrennten Variablen und der Partialbruchzerlegung erhält man nun

$$\ln 2 - \ln s = \int_{-3/2}^{u(s)} \left(\frac{3/5}{x} + \frac{2/5}{x+5} \right) dx = \ln \left(\frac{|u(s)|^{3/5} \cdot |u(s) + 5|^{2/5}}{(3/2)^{3/5} \cdot (7/2)^{2/5}} \right),$$

also

$$\frac{2}{s} = \frac{|u(s)|^{3/5} \cdot |u(s) + 5|^{2/5}}{(3/2)^{3/5} \cdot (7/2)^{2/5}}.$$

Mit $s = t - 2$ und $u(s) = \frac{y(t)-3}{t+2}$ folgt schließlich die Gleichung

$$|y(t) - 3|^{3/5} \cdot |y(t) - 3 + 5(t+2)|^{2/5} = 3^{3/5} \cdot 7^{2/5}.$$

2. Da die Gleichung

$$|y(t) - 3|^{3/5} \cdot |y(t) - 3 + 5(t+2)|^{2/5} = 3^{3/5} \cdot 7^{2/5}$$

für beliebig grosse Zeiten t erfüllt sein muss, muss entweder $y(t) - 3$ oder $y(t) - 3 + 5(t+2)$ für $t \to \infty$ gegen 0 konvergieren Somit gibt es die Möglichkeit, dass entweder $y(t) \to 3$ oder $y(t) \to -\infty$ für $t \to \infty$ folgt. Das das Volumen einer Flüssigkeit nicht negativ ist, wird sich entweder das Volumen der Flüssigkeit im Behälter für grosse Zeiten nahe bei 3 m^3 befinden oder es wird nach einer endlichen Zeit keine Flüssigkeit mehr im Behälter sein.