

# **Mathematisches Modellieren für LaG/M**

## **Gewöhnliche Differentialgleichungen**

### 1. Übung

#### **Gruppenübungen**

##### **(G 1)**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned}y'(t) &= 2ty^2(t) \\y(0) &= y_0 > 0\end{aligned}$$

Geben Sie das maximale Intervall an, in dem die Lösung existiert.

##### **(G 2)**

Wir betrachten die Differentialgleichung  $y'(x) = \sqrt{|y(x)|}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .

- Zeigen Sie, dass für jedes  $x_0 \in \mathbb{R}$  die Funktion

$$y(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_0)^2}{4}, & \text{falls } x \geq x_0, \\ 0, & \text{falls } x < x_0 \end{cases}$$

eine Lösung dieser Differentialgleichung ist und erraten Sie noch eine weitere (offensichtliche) Lösung.

- Skizzieren Sie eine Auswahl dieser Lösungen in ein Schaubild.
- Zeigen Sie, dass das Anfangswertproblem zu dieser Differentialgleichung mit  $y(0) = 0$  unendlich viele Lösungen hat.
- Gibt es ein  $y_0 > 0$ , so dass das Anfangswertproblem mit  $y(0) = y_0$  eindeutig lösbar ist?

#### **Hausübungen**

##### **(H 1) (6 Punkte)**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(t) = y^3(t), \quad t \in I, \quad y(0) = 1$$

und bestimmen Sie das maximale Intervall  $I \subset \mathbb{R}$ , für das die Lösung existiert. Wie verhält sich die Lösung am Rand dieses Intervalls? Begründen Sie, warum sich die Lösung nicht fortsetzen lässt.

## (H 2) (6 Punkte)

Gegeben sei eine Differentialgleichung, mit der Form  $y'(t) = f(y/t)$ , d.h. die rechte Seite ist eine Funktion von  $y/t$ .

- Zeigen Sie, dass eine solche Differentialgleichung in eine Gleichung umgeformt werden kann, die durch Trennung der Variablen gelöst werden kann.
- Lösen Sie die Gleichung

$$y'(t) = 2\frac{y}{t} + \left(\frac{y}{t}\right)^2$$

für  $t > 0$ , falls  $y > 0$ .

- Es sei  $g(y, t) = \frac{t+y}{t-y}$ . Geben Sie eine Funktion  $f$  an, so dass  $f(y/t) = g(y, t)$  gilt. Wieso ist es trotzdem schwierig, die zugehörige Differentialgleichung  $y'(t) = g(y, t)$  explizit zu lösen?

## (H 3) (6 Punkte)

- Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'(x) = x(1 + y^2(x)), \quad x > 0, \quad y(0) = 0.$$

- Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = \cos(x + y)$$

Hinweis: Substitutieren Sie  $z(x) = x + y(x)$