Prof.Dr.Patrizio Neff
Dirk Damjantschitsch
Universität Duisburg-Essen
Campus Essen 12.4.2011

Sobolevräume und Variationsrechnung
Übung 01

Gruppenübung:

Aufgabe 1:
Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge, $1 \leq p \leq \infty$ und $C_0^\infty(\Omega) := \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}\phi \subseteq \Omega, \operatorname{supp}\phi \text{ kompakt}\}$ sowie $u, v \in L^p(\Omega)$. Wir nennen dann v schwache Ableitung von u nach x_i, wenn für alle für alle $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$

$$\int_\Omega v(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\frac{\partial}{\partial x_i}\phi(x)dx$$

gilt.
Sei $I = [-1, 1]$. Betrachte die Betragsfunktion $b : I \to \mathbb{R}, b(x) := |x|$. Wir wollen die schwache Ableitung von b bestimmen. Weiter wollen wir zeigen, dass die schwache Ableitung b' keine Ableitung im schwachen Sinne besitzt.
Aufgabe 2:
Wir betrachten Funktionen der Form $f : (x, u, \xi) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Weiter sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion.

1. $f(x, u, \xi) := \frac{\xi^2+u}{x}$.
2. $f(x, u, \xi) := 2\pi u\frac{\xi^3}{1+\xi^2}$.
3. $f(x, u, \xi) := \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{2u}}$.

Bestimmen Sie die Ableitungen nach allen Komponenten sowie die totale Ableitung $\frac{d}{dx}f(x, u(x), u'(x))$.

Aufgabe 3:

Der Gaußsche Satz liefert einen einfachen Zusammenhang zwischen dem Flächenmaß und den Trägheitsmomenten von S^{N-1} und dem Lebesgue-Maß bzw. den Trägheitsmomenten der Einheitskugel des $\mathbb{R}^N$. Welchen?
Die Hausübungen werden nicht korrigiert. Die Bearbeitung der Übungsaufgaben dient einzig und allein Ihrer eigenen Leistungskontrolle.

Hausübung:

Aufgabe 1:

Sei

$$u(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} x & : & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & : & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{array} \right\}.$$

Definieren wir weiterhin

$$v(x) := \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & : & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & : & \text{für } 1 < x \leq 2 \end{array} \right\}.$$

Zeigen Sie, $u' = v$ im schwachen Sinne.

Aufgabe 2:
Wie in der Präsenzübung seien u und f definiert. Weiter sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.

1. $f(x, u, \xi) := \sqrt{1 + \xi^2}$
2. $f(x, u, \xi) := \frac{1}{2}\xi^2 - u$
3. $f(x, u, \xi) := \frac{m}{2}\xi^2 - g(x)u$

Bestimmen Sie wieder alle partiellen Ableitungen und die totale Ableitung.

Aufgabe 3: Es sei $K(x, a) := |x - a|_2^{-N}(x - a),\ K : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, a$\in \mathbb{R}^N$ beliebig, aber fest. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, das die Voraussetzungen des Satzes von Gauß erfüllt und $n(x)$ seine äußere Einheitsnormale. Bestimmen Sie $\int_{\partial\Omega} \langle n(x), K(a, x)\rangle dS$ für alle $a \in \mathbb{R}$.
Tipp:Für $a \in \Omega$ betrachten Sie $\Omega_\epsilon := \Omega - \overline{U(a, \epsilon)},\ \epsilon > 0$.