

Universität Duisburg-Essen  
Campus Duisburg

---

Physikalisches Praktikum  
für den Bachelor-Studiengang  
Maschinenbau

Versuchsanleitungen

## Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b> .....	E.1-2
<b>Hinweise für Praktikumssteilnehmer</b> .....	E.3-4
<b>Laborordnung und Sicherheitshinweise</b> .....	E.5-8

### Versuche

#### Nr. Bezeichnung

B 8	Bestimmung der spezifischen Ladung $e/m$ .....	B8.1-6
B 10	Versuch mit Röntgenstrahlen.....	B10.1-10
D 5	Spektralanalyse.....	D5.1-6
D 8	Temperaturstrahlung.....	D8.1-12

<b>Anhang</b>	Fehlerrechnung.....	F.1-10
---------------	---------------------	--------

### Einleitung

In der vorliegenden Anleitung sind die Versuche zusammengestellt, die von den Studierenden des Bachelor-Studiengangs Maschinenbau im Physikalischen Anfängerpraktikum durchzuführen sind. Es handelt sich dabei um Versuche aus verschiedenen Grundgebieten der Physik.

Die Beschreibung jedes Versuches enthält zunächst Hinweise auf die zum Stoffgebiet gehörende Literatur und einen Stichwortkatalog, mit den physikalischen Begriffen, die bei der Erarbeitung der Grundlagen des Versuchs wichtig sind. Beachten Sie, dass die in jeder Versuchsanleitung beschriebenen Grundlagen nur einen einführenden Charakter haben. Es wird daher nachdrücklich empfohlen, weiterführende Zusammenhänge, die bei der Vorbereitung zu den

Versuchen notwendig sind, anhand der angegebenen Lehrbücher zu erarbeiten. Die am Ende einer jeden Anleitung aufgelisteten Fragen dienen dabei Ihrer Selbstkontrolle.

Achten Sie bei der Versuchsdurchführung darauf, so gewissenhaft wie möglich zu arbeiten. Es kommt bei den Versuchen nicht darauf an, dass irgendein Messergebnis, das viele Studienkollegen vor Ihnen schon erzielt haben, noch einmal mit gleichem Wert *reproduziert* wird, sondern Sie sollen lernen (unabhängig vom sicher bekannten Ergebnis), selbstständig Messreihen so verlässlich wie möglich aufzunehmen. Der Fehler, mit dem dann das bei der Auswertung von Ihnen erzielte Ergebnis behaftet ist, entscheidet über die Güte des von Ihnen durchgeführten Experiments und die Verlässlichkeit des Resultats. In der späteren Berufspraxis, wenn Sie Problemen gegenüberstehen, deren Lösung a priori nicht bekannt ist, wird das genauso sein. Studieren Sie deshalb eingehend die im Anhang gegebene Einführung zur Fehlerrechnung und geben Sie zu jedem Ergebnis den Fehler an. Ein experimentell ermittelter Messwert ohne Fehlerangabe ist wertlos! Runden Sie das Ergebnis so ab, dass die angegebenen Werte innerhalb der Fehlergrenzen sinnvoll sind. (Von Taschenrechnern kann man heute viele Stellen ablesen, prüfen Sie den Sinn dieser *Nachkommastellen!*) Diskutieren Sie in den Messprotokollen, die zu jedem Versuch anzufertigen sind, die Ursachen für auffällig große (manchmal auch auffällig kleine) Messfehler. Sie müssen in Ihrer Versuchsdurchführung liegen.

Beachten Sie schließlich bitte die im folgenden angegebenen **Hinweise für Praktikumssteilnehmer** sowie die **Laborordnung mit Sicherheitshinweisen**, in denen Richtlinien für den technischen Ablauf des Praktikums und für das Verhalten im Praktikum insbesondere bei Gefahrensituationen gegeben werden.

Prof. Dr. M. Farle  
 Dr. R. Meckenstock  
 Universität Duisburg-Essen  
 Fakultät für Physik  
 Experimentalphysik

## Hinweise für Praktikumsteilnehmer

Im Physikalischen Anfängerpraktikum werden die Versuche von den studentischen Teilnehmern in Gruppen von 2 bis 3 Studenten durchgeführt. Die zeitliche Reihenfolge und die Auswahl der durchzuführenden Versuche sind durch die Gruppeneinteilung festgelegt. Diese erfolgt zusammen mit der Ausgabe dieser Versuchsanleitung während der Vorbesprechung bzw. der Anmeldung zu diesem Praktikum zu dem im Vorlesungsverzeichnis angegebenen Termin. (Man beachte zusätzlich die Aushänge vor ME142!)

Für jeden Praktikumsteilnehmer werden zwei Karteikarten geführt, in denen von Ihnen in **lesbarer** Schrift (Druckschrift) der Name und Vorname, die Matrikelnummer, die Studienrichtung sowie die Gruppennummer (rechts oben) und die durchzuführenden Versuche mit Nummer und Bezeichnung einzutragen sind. Eine der Karteikarten verbleibt im Praktikum, die andere wird an Sie ausgegeben. Diese Karte ist von Ihnen zu jedem Praktikumstermin, zu allen Antestaten und zum Abtestat mitzubringen. Diese 2. Karte dient also als Ihre Doppelkarte und somit zu Ihrer eigenen Sicherheit.

Bereiten Sie sich gründlich auf die Versuche und die damit zusammenhängenden physikalischen Fragestellungen z.B. anhand der in den Anleitungen angegebenen Literaturzitate vor. Zur Überprüfung Ihrer Vorbereitung wird an jedem Versuchstag von dem betreuenden Dozenten ein **mündliches Antestat** durchgeführt. Dieses dient zugleich zur Sicherheit der Praktikumsteilnehmer sowie zur Bewahrung der Praktikumsgeräte vor Beschädigung oder Zerstörung. Daher wird dieses Antestat in der Regel auch direkt zu Beginn des Versuchs durchgeführt. Der Dozent entscheidet dabei, ob er das Antestat Gruppen- oder Versuchsweise (also mit mehreren Gruppen zugleich) durchführt. Eine **handschriftliche** Vorbereitung ist dabei von jeder Gruppe unaufgefordert vorzulegen. Diese Vorbereitung ist dann als Einführung in den Versuch dem Versuchsprotokoll beizufügen (siehe unten). Achten Sie darauf, dass jedes bestandene Antestat auf beiden Karteikarte vom betreuenden Dozenten entsprechend vermerkt wird (Datum, Unterschrift).

Bei nicht bestandener Antestat muss der **gesamte** Versuch (einschl. Antestat) zum angegebenen Nachholtermin wiederholt werden. Falls ein Student allein das Antestat nicht bestanden hat, kann der Rest der Gruppe den Versuch allerdings durchführen. Maximal kann pro Semester von jedem Teilnehmer jeweils nur **ein** Versuch wiederholt werden. Dies gilt auch für fehlen bei Krankheit (nur mit Vorlage eines Attestes). Wird der Nachholtermin nicht erfolgreich abgeschlossen

gilt das Praktikum dann als nicht bestanden.

Jede Gruppe hat nach jedem Versuch das **Tagesprotokoll** mit den Messergebnissen vom Versuchsbetreuer abzeichnen zu lassen. Anschließend ist zu Hause ein **Versuchsprotokoll** anzufertigen.

Jedes Versuchsprotokoll sollte einen kurzen Text der physikalischen Zusammenhänge (1 - 3 **handschriftliche** Seiten, die wie schon erwähnt vor dem Versuch als Vorbereitung vorliegen muss) enthalten, dazu eine knappe Darstellung des Versuchsaufbaus und der Versuchsdurchführung. Darauf sollte die Auswertung sowie eine kurze Diskussion der Messergebnisse inklusive **Fehlerdiskussion** folgen. Vergleichen Sie Ihre Ergebnisse, wenn möglich, mit Literaturdaten. Das Deckblatt des Protokolls sollte entsprechend dem im Praktikum ausliegenden Muster beschriftet sein. Die untere Hälfte dieses Deckblattes ist für Korrekturbemerkungen des Betreuers freizuhalten. Legen Sie **unbedingt** das abgezeichnete Tagesprotokoll dem Versuchsprotokoll bei.

Jedes Versuchsprotokoll **muss zum nächsten** Versuch (beim letzten Versuch zum Nachholtermin) in den Praktika dem entsprechenden Betreuer des Versuchs abgegeben werden. Bei (unbegründeter) späterer Abgabe ist der Versuch ungültig und muss wiederholt werden. Nach Durchsicht des Protokolls durch den stud. Betreuer wird dieses mit entsprechend zu beachtenden Vermerken wie z.B. "Rü" (Rücksprache) oder "i.O." (in Ordnung) an Sie zurückgegeben. Im Falle einer Rücksprache muss das Protokoll gegebenen Falls noch einmal bearbeitet.

Alle Protokolle müssen abschließend zum so genannten **Abtestat-Termin** dem betreuenden Dozenten mit dem Vermerk "i.O." vorgelegt werden. Dieser befragt Sie dann bei der Durchsicht über den Inhalt und zum Verständnis der Physik hinter den Versuchen. Mit der zufriedenstellenden Beantwortung der Fragen und der Annahme aller Protokolle durch den Dozenten ist die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum nachgewiesen. Sie wird durch die Erteilung des **Abtestats** vermerkt. Ort und Termin zur Erteilung des Abtestats werden im Laufe des Praktikums per Aushang und im Internet bekanntgegeben. Bringen Sie also zum Abtestat Ihre Karteikarte und alle Protokolle mit. Achten Sie bitte darauf, dass die Erteilung des Abtestats auf beiden Karteikarten vom Betreuenden Dozenten (mit Datum und Unterschrift) vermerkt wird.

Einen schriftlichen Leistungsnachweis über die erfolgreiche Teilnahme am Praktikum erhalten Sie durch die Unterschrift auf Ihrer Karteikarte. Die erfolgreiche Teilnahme wird auch an Ihr jeweiliges Prüfungsamt durch den Praktikumsleiter weitergeleitet.

## **Laborordnung und Sicherheitshinweise**

### **Allgemeines Verhalten im Praktikum**

Die Praktikumssteilnehmer haben sich in den Räumen des Praktikums so zu verhalten, dass Personen nicht gefährdet sowie Einrichtungen, Geräte und Versuchsaufbauten nicht beschädigt werden.

Die von den betreuenden Dozenten und studentischen Hilfskräften sowie in den Praktikumsanleitungen gegebenen Hinweise zur Handhabung der Geräte und Versuchsanordnungen sind unbedingt zu beachten.

Vor Beginn eines Versuches ist die Einweisung durch den Versuchsbetreuer abzuwarten. Nach Beenden des Versuches ist der Arbeitsplatz aufgeräumt und sauber zu verlassen. Essen, Trinken und Rauchen sowie die Benutzung von Handys ist im Praktikum nicht gestattet.

### **Arbeiten mit elektrischen Schaltungen**

Das Berühren stromführender Teile aus Stromquellen mit Gleich- und Wechselspannungen von mehr als 50 V kann unmittelbar zu lebensgefährlichen Schäden führen. Überspannungen und -ströme infolge von Kurzschlüssen in Stromkreisen können Geräteschäden und Brände verursachen.

Beim Arbeiten an elektrischen Aufbauten mit gefährlichen Spannungen müssen mindestens zwei Personen im Praktikumsraum anwesend sein. In Notfällen ist im Praktikumsraum die gesamte Netzspannung abzuschalten. Dies geschieht durch Drücken des Notausschalters (roter Knopf am Verteilerkasten neben der Tür). Machen Sie sich vor Beginn des Versuches mit der Lage dieses Schalters vertraut.

Alle Versuchsaufbauten mit elektrischen Schaltungen sind vor Inbetriebnahme grundsätzlich durch den Versuchsbetreuer zu überprüfen. Der Auf-, Ab- und Umbau elektrischer Schaltungen hat stets im spannungslosen Zustand zu erfolgen (Stromversorgungsgeräte am Versuchsplatz ausgeschaltet). Zur Vermeidung von Schaltfehlern sind Schaltungen möglichst übersichtlich, d. h. mit Kabeln geeigneter Länge und Farbkennzeichnung aufzubauen. Beim Arbeiten mit elektrischen Messgeräten ist auf die richtige Polung, auf die Einstellung des richtigen

Messbereichs und der richtigen Messeingänge zu achten.

Nach Ende eines Experiments sind alle elektrischen Geräte und Sicherungen der Verteilersteckdosen des Versuchs auszuschalten, Batterien von Stromkreisen abzutrennen, sowie selbst aufgebaute Schaltungen abzubauen.

### **Umgang mit Chemikalien und flüssigem Stickstoff**

Im Praktikum werden einige flüssige Chemikalien zur Reinigung und Kühlung von Gefäßen benutzt. Diese Flüssigkeiten sind leicht flüchtig und entzündlich. Offene Flammen und Kontakt mit heißen Gegenständen sind unbedingt zu vermeiden. Dämpfe generell nicht einatmen, für ausreichende Lüftung sorgen!

Der Transport und das Umfüllen von flüssigem Stickstoff zur Kühlung in Isoliergefäßen ist nur vom Betreuer des betreffenden Versuchs durchzuführen. Hierbei Schutzbrille und Handschuhe tragen! Vorsicht Verbrennungsgefahr!

In einigen der im Praktikum benutzten Thermometer und Barometer befindet sich Quecksilber. Tritt Quecksilber aus diesen Geräten aus: Vorsicht! Vergiftungsgefahr durch Kontakt und Einatmen des Dampfes! Keine eigenständige Entsorgung versuchen sondern sofort den Versuchsbetreuer verständigen!

### **Umgang mit ionisierenden Strahlern und Lasern**

Die im Praktikum eingesetzten radioaktiven Präparate sind Strahlungsquellen mit Aktivitäten unterhalb bestimmter zulässiger Grenzen (Freigrenzen). Sie werden in einem strahlenabsorbierenden abschließbaren Behälter im Raum MD 148 aufbewahrt. Die Präparate werden bei Versuchsbeginn vom Versuchsbetreuer in die jeweilige Apparatur eingesetzt und nach Versuchsende von ihm wieder entfernt und in den Behälter zurückgelegt.

Die Präparate sind  $\alpha$ -,  $\beta$ - und  $\gamma$ -Strahler,  $\alpha$ -Strahlung ist stark ionisierend und hat nur geringe Reichweite in Luft. Sie schädigt Hautzellen bei äußerer Exposition, innere Organe bei innerer Kontamination. Entscheidend für den Grad möglicher Schädigung ist die aufgenommene Strahlendosis. Bei sachgemäßem Umgang besteht im Praktikum keine Strahlengefahr. Es sind die Anweisungen des Betreuers zu befolgen. Zur Minimierung der Strahlendosis ist der direkte Kontakt mit den Präparaten zu vermeiden, ein möglichst großer Abstand ( $> 0,5$  m) von den ungeschirmten Strahlern einzuhalten sowie die Aufenthaltszeit in der Nähe der Strahler minimal zu halten.

Hochenergetische elektromagnetische Strahlung wie Röntgenstrahlung durchdringt menschliches Gewebe und schädigt es ebenfalls durch seine ionisierende Wirkung entsprechend der absorbierten Strahlendosis. Die im Praktikum benutzten Röntgengeräte sind Vollschutz-Schulgeräte mit sehr geringer Strahlendosisleistung außerhalb des Gehäuses, die an der unteren Nachweisgrenze liegt. Beim Öffnen des Gehäuses wird automatisch die Strahlung abgeschaltet. Jede Manipulation und jeder Versuch, den Schutz des Gehäuses zu umgehen, ist untersagt.

Im Praktikum kommen He-Ne-Laser mit Strahlleistung bis 5 mW zum Einsatz. Beim Experimentieren mit diesen Lasern besteht vor allem die Gefahr der Schädigung bzw. Zerstörung der Netzhaut, falls das enge Strahlenbündel hoher Energiedichte direkt ins Auge gelangt. Deshalb nicht in den direkten Laserstrahl schauen! Unkontrolliert reflektierende Gegenstände wie Schmuck oder Armbanduhr sind beim Arbeiten im Laserbereich zu vermeiden. Bei der Justage des Laserstrahls ist die Strahlintensität durch ein Graufilter zu reduzieren bzw. eine Schutzbrille zu tragen. Befolgen Sie die Anweisungen des Versuchsbetreuers!

### **Verhalten in Gefahrensituationen**

Ruhe bewahren! - Gefährdete Personen warnen! - Bei Hilfeleistung auf eigene Sicherheit achten!

#### **Unfall**

Zur Erstversorgung von Verletzten befindet sich im Raum ME 142 (Raum der Hilfskräfte) und Raum MD 147 ein Erste-Hilfe-Kasten mit Verbandsmaterial.

Zur weiteren Hilfeleistung Unfall an Leitwarte (Rufnr. **92211**) oder Feuerwehr (Rufnr. **112**) melden! Dabei angeben:

- Wer meldet den Unfall?
- Was ist passiert?
- Wo ist es passiert?
- Gibt es Verletzte?
- Wann ist es passiert?

#### **Brandfall**

Ertönt ein Alarmsignal müssen die Praktikumssteilnehmer die Praktikumsdurchführung sofort abbrechen, Wertsachen und Oberbekleidung mitnehmen und das Gebäude auf kürzestem Weg verlassen (s. Fluchtwegbezeichnung in den Fluren

und Foyers). Keine Aufzüge benutzen! Sammelpunkt der Praktikumssteilnehmer ist der Parkplatz hinter der Schule in der vor der Mensa von der Lotharstr. abzweigenden Geibelstr.

Beim Ausbruch eines Brandes in den Praktikumsräumen sollten folgende Maßnahmen parallel eingeleitet werden:

Rettung von Menschen  
Brandbekämpfung mit Feuerlöschern

Brandmeldung an Leitwarte (Rufnr. **92211**) und Feuerwehr (Rufnr. **112**) mit Angaben:

Wer meldet? (Name, Einrichtung, Rufnr.)  
Wo brennt es? (Gebäude, Raumnr.)  
Was brennt?  
Sind Menschen in Gefahr?

Fenster und Türen schließen  
Verlassen des Raumes und Gebäudes.

Telefonanschlüsse im Praktikum: ME 142, MD147, MD 163, MD 165

### **Wichtige Rufnummern**

Feuer, Unfall:

Leitwarte **92211**  
Feuerwehr: **112**

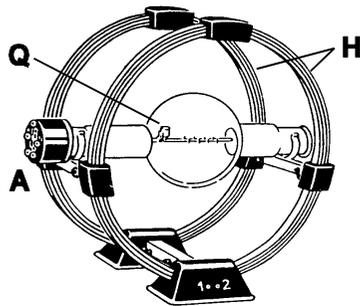
## Versuch B 8: Bestimmung der spezifischen Ladung $e/m$

**1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Experimentalphysik, Bd. II  
Pohl, Einführung in die Physik, Bd. 2  
Dobrinski/Krakau/Vogel, Physik für Ingenieure

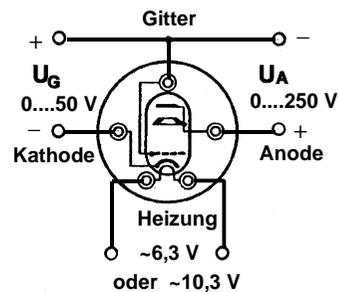
**Stichworte:** Elektronenröhre, Kraftwirkung elektromagnetischer Felder auf bewegte Ladungen, magnetische Feldstärke und Induktion, Ionisation, Rekombination, Lichtemission, Millikan-Versuch

### 2. Grundlagen

In diesem Versuch soll die spezifische Ladung  $e/m$  des Elektrons durch Ablenkung eines Elektronenstrahls im Magnetfeld bestimmt werden. Ähnliche Versuche wurden erstmals von H. Busch (1922) durchgeführt.



**Abb.1:** Fadenstrahlrohr mit Helmholtz-Spulen H, Elektronenstrahlquelle Q, Sockel mit Anschlussbuchsen A



**Abb.2:** Anschlussbuchsen mit Schalt-schema für Strahlerzeugungseinheit

Abb. 1 zeigt das benutzte Fadenstrahlrohr mit dem Helmholtz-Spulenpaar. Abb. 2 gibt die Stirnfläche der Röhre mit dem Schalt-schema und den Anschlussbuchsen für die Glühkathode, das Gitter und die mit einem Loch versehene Anode wieder. Durch thermisch induzierte Elektronenemission (Heizen der Kathode) und an-

schließende Beschleunigung und Fokussierung der Elektronen wird ein Elektronenstrahl erzeugt. Liegt zwischen der Kathode und der Anode eine Beschleunigungsspannung  $U$ , so verlassen die Elektronen (Ladung  $e$ , Masse  $m$ ) das Beschleunigungssystem durch das Anodenloch mit einer bestimmten Geschwindigkeit  $v$ . Es gilt nach dem Energieerhaltungssatz:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eU \quad (1)$$

Im feldfreien Raum würden die Elektronen nach Verlassen der Anode gradlinig mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  weiterfliegen. Bewegen sich die Elektronen jedoch in einem Magnetfeld der Flussdichte  $B$ , so wirkt auf sie die Lorentzkraft  $F_L$ :

$$\underline{F}_L = -e(\underline{v} \times \underline{B}) \quad (2)$$

Da die Kraft  $F_L$  immer senkrecht auf der von  $v$  und  $B$  aufgespannten Ebene steht, wird durch die Lorentzkraft nur die Richtung, nicht aber der Betrag der Geschwindigkeit der Elektronen geändert.

Betrachtet man die Bahn eines Elektrons, dessen Geschwindigkeitsvektor  $v$  senkrecht zum  $B$ -Vektor eines homogenen Magnetfeldes orientiert ist und geht zu Beträgen über, so vereinfacht sich Gl. (2) zu:

$$F_L = e v B \quad (3)$$

Die Lorentzkraft wirkt dann ständig mit konstanter Größe  $F_L$  senkrecht zu  $v$ . Das Elektron wird auf eine Kreisbahn gezwungen, wobei die Lorentzkraft gleich der Zentripetalkraft ist, und es gilt:

$$e v B = m \frac{v^2}{r} \quad (4)$$

wobei  $r$  der Bahnradius ist. Mit Gl. (1) und (4) erhält man:

$$\frac{e}{m} = \frac{2U}{r^2 B^2} \quad (5)$$

Die Beschleunigungsspannung  $U$  und der Bahnradius  $r$  werden im durchzuführenden Versuch direkt gemessen. Die Größe des B-Feldes muss hingegen aus der Geometrie des felderzeugenden Spulensystems und dem Spulenstrom  $I$  bestimmt werden. Im Vakuum gilt zwischen der magnetischen Induktion  $B$  und der magnetischen Feldstärke  $H$  die Beziehung:

$$B = \mu_0 H \tag{6}$$

$\mu_0 = 4 \pi \times 10^{-7} \text{ V s A}^{-1} \text{ m}^{-1}$  ist die *Induktionskonstante*. Prinzipiell lässt sich die magnetische Feldstärke jeder beliebigen Spule mit Hilfe des Biot-Savart'schen Gesetzes berechnen. Für die Feldstärke bzw. magnetische Induktion im Mittelpunkt einer Ringspule von  $n$  Windungen und dem Radius  $R$  ergibt sich, wenn die Länge der Spule  $l \ll R$  ist:

$$H = \frac{nI}{2R} \quad \text{bzw.} \quad B = \mu_0 \frac{nI}{2R} \tag{7}$$

Zur Erzeugung eines homogenen Magnetfeldes (nach Helmholtz) bedient man sich zweier Kreisspulen mit gleichem Radius, deren Mittelpunkte auf der gemeinsamen Achse im Abstand ihrer Radien liegen (s. Abb. 1). Ist der Strom in beiden Spulen gleich, so lässt sich die magnetische Flussdichte  $B$  im inneren Bereich eines solchen Helmholtz-Spulensystems aus dem mittleren Spulenradius  $R$ , der Windungszahl  $n$  einer jeden Spule und dem Spulenstrom  $I$  errechnen:

$$B = 0,715 \mu_0 \frac{nI}{R} \tag{8}$$

Der Faktor 0,715 ergibt sich aus der Geometrie der Spulenordnung. Aus Gl. (5) und (8) erhält man schließlich:

$$\frac{e}{m} = C \frac{U}{(rI)^2} \tag{9}$$

mit der Konstanten:

$$C = 2 \left( \frac{R}{0,715 \mu_0 n} \right)^2 \tag{10}$$

Der Radius des im Praktikum beutzten Spulensystems beträgt  $R = 20 \text{ cm}$ ; die Windungszahl je Spule ist  $n = 154$ . Bestimmt man  $U$ ,  $I$  und  $r$  experimentell, so kann die spezifische Ladung  $e/m$  nach Gl. (9) berechnet werden.

Die Bahn des Elektronenstrahls im Fadenstrahlrohr wird sichtbar, da die Elektronen mit den Gasmolekülen des Füllgases (Inertgas unter vermindertem Druck) zusammenstoßen und diese ionisieren (Stoßionisation). Nach der anschließenden Rekombination befinden sich die Gasmoleküle in angeregten Zuständen. Beim Übergang in energetisch tieferliegende Niveaus bzw. in den Grundzustand emittieren die Moleküle elektromagnetische Strahlung im sichtbaren Spektralbereich (Licht).

Da die Größe der Elektronenladung  $e = -1,6021 \times 10^{-19} \text{ C}$  unabhängig von der Masse bestimmt werden kann, (z.B. im Versuch von R.A. Millikan, 1910; geladene Öl-Tröpfchen in einem Kondensator), lässt sich aus dem Verhältnis von  $e/m$  die Elektronenmasse  $m_e = 9,1091 \times 10^{-31} \text{ kg}$  berechnen.

Technisch wird die Ablenkung von Elektronenstrahlen durch Magnetfelder bei Fernsehbildröhren und bei den magnetischen Linsen in Elektronenmikroskopen genutzt. Das Prinzip lässt sich jedoch auch auf andere geladene Teilchen (Protonen, Ionen uws.) anwenden. Dies geschieht z.B. in den Massenspektrometern und den Beschleunigungsanlagen der Elementarteilchen- und Kernforschung (Zyklotron, Synchrotron).

### 3. Aufgabenstellung

- 1. Aufgabe:** Am Fadenstrahlrohr ist aus mehreren Messungen der Beschleunigungsspannung und des Spulenstromes für verschiedene vorgegebene Radien des kreisförmigen Elektronenstrahls die spezifische Ladung  $e/m$  zu bestimmen.
- 2. Aufgabe:** Eine kritische Fehlerbetrachtung und -berechnung ist durchzuführen.

#### 4. Versuchsdurchführung

Zur Erzeugung des Magnetfeldes werden die beiden Spulen (siehe Abb. 1) in Reihe geschaltet und an eine stabilisierte, regelbare Gleichstromquelle angeschlossen. Der Spulenstrom  $I$  wird mit einem Amperemeter gemessen.

Das Fadenstrahlrohr ist gem. Abb. 2 an die Gleichspannungsquellen für die Anoden- und Gitterspannung  $U_A$  bzw.  $U_G$  (*Polung beachten!*) und die Wechselspannungsquelle für die Kathodenheizung anzuschließen. Die zu bestimmende Beschleunigungsspannung  $U$  ist die Summe von  $U_A$  und  $U_G$ . Sie wird mit einem Voltmeter (300 V=) gemessen, welches zwischen Kathode und Anode geschaltet wird. Die für die Heizung der Kathode notwendige Wechselspannung (6,3V~ oder 10,3V~) ist auf den Anschlussbuchsen des jeweils benutzten Fadenstrahlrohrs angegeben.

*Wichtig:* Vor dem Einschalten der Geräte muss die Schaltung vom Betreuer des Versuchs überprüft werden! Außerdem ist vor Inbetriebnahme des Fadenstrahlrohres darauf zu achten, dass die beiden Potentiometer der Spannungsquellen  $U_A$  und  $U_G$  auf Null stehen. Erst nach einer Anheizzeit von ca. 3 Minuten darf die Anodenspannung  $U_A$  im Bereich von 0 bis 250 V und die Gitterspannung  $U_G$  im Bereich von 0 bis 50 V eingestellt werden.

Durch eine geeignete Gitterspannung wird Schärfe und Helligkeit des Fadenstrahlrohres bestimmt. Bei längeren Messpausen sind Anoden- und Gitterspannung wieder auf Null zu stellen, die Kathodenheizung bleibt jedoch an. Ist nach der Anheizzeit der Fadenstrahl im abgedunkelten Raum sichtbar, wird eine bestimmte Beschleunigungsspannung  $U (= U_A + U_G)$  eingestellt, der Stromkreis zu den Helmholtzspulen geschlossen und durch vorsichtiges Drehen des Fadenstrahlrohres der Strahl so eingestellt, dass er das Strahlerzeugungssystem senkrecht zur Richtung des Magnetfeldes verlässt und bei geeigneter Größe des Magnetfeldes einen Vollkreis beschreibt. Der Spulenstrom ist so einzustellen, dass der Elektronenstrahl einen Kreis mit dem gewünschten Radius  $r$  beschreibt. Zur Bestimmung der Radien sind im Fadenstrahlrohr Messmarken angebracht, die  $r = 2, 3, 4$  und  $5$  cm entsprechen.

Folgende Messreihen sind aufzunehmen:

Bei vorgegebener fester Beschleunigungsspannung (z.B. 150 V) wird zu jedem der vier o.a. Radien der zugehörige Spulenstrom  $I$  viermal gemessen und dann der Mittelwert gebildet.

Der Versuch ist für mindestens 4 Beschleunigungsspannungen (z.B. 150 V, 200 V, 250 V und 300 V) durchzuführen.

#### 5. Auswertung

Zunächst ist die Konstante  $C$  zu berechnen (Gl. 10), dann (gem. Gl. 9) aus den zugehörigen Werten von  $U$ ,  $r$  und dem gemittelten Wert von  $I$  das Verhältnis  $e/m$ .

Es ist so für jede der 4 Beschleunigungsspannungen zu verfahren und dann der Mittelwert von  $e/m$  zu berechnen.

Führen Sie eine Fehlerrechnung durch und verwenden Sie hierfür:  $\Delta r = \pm 0,5\text{mm}$ ,  $\Delta R = \pm 2$  mm,  $\mu_0$  und  $n$  fehlerfrei.  $\Delta U$  und  $\Delta I$  sind der Güteklasse der Messgeräte zu entnehmen.  $\Delta I$  wird außerdem als Messunsicherheit (Standardabweichung des Mittelwertes) aus den 4 Messwerten bestimmt. Für die Weiterrechnung wird der größere der beiden Fehler benutzt. Zu berechnen sind nach dem Fehlerfortpflanzungsgesetz für jeden Radius  $r$  und jede Spannung  $U$  der relative Größtfehler von  $e/m$ . (Da  $e/m$  ein Potenzprodukt von  $R$ ,  $U$ ,  $r$  und  $i$  ist, ist die Berechnung des relativen Fehlers besonders einfach).

Diskutieren Sie die Ergebnisse, gehen Sie dabei auch auf mögliche systematische Fehler (z.B. elektrostatische Aufladung des Glases, Potenziale der Metallteile usw.) ein.

#### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie lassen sich - außer durch Glühemission - noch *freie* Elektronen erzeugen?
- 2) Wie hängen Radius und Kreisfrequenz der Elektronenbahn von der Geschwindigkeit bzw. Beschleunigungsspannung ab?
- 3) Wie können Sie feststellen, dass es sich tatsächlich um die Kreisbahn negativ geladener Teilchen handelt?
- 4) Welche Bahn beschreiben geladene Teilchen, die schräg zur Feldrichtung in ein Magnetfeld eintreten?
- 5) Warum werden für sehr große Beschleunigungsspannungen die Werte für  $e/m$  kleiner?
- 6) Was versteht man unter den Begriffen *Stoßionisation* und *Rekombination*?
- 7) Beschreiben Sie den mikroskopischen Mechanismus der atomaren Lichtemission.

## Versuch B 10: Versuch mit Röntgenstrahlen

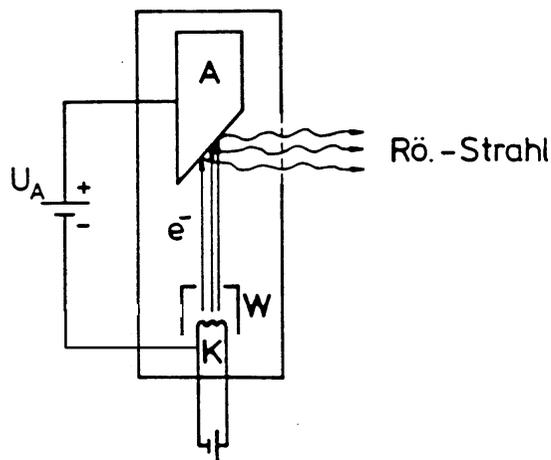
**1. Literatur:** Harbeck, Physik Oberstufe  
 Gerthsen, Kneser, Vogel, Physik  
 Pohl III, Optik u. Atomphysik  
 Finkelnburg, Atomphysik  
 Glocker, Materialprüfung mit Röntgenstrahlen

**Stichworte:** Erzeugung von Röntgenstrahlen, Röntgenbremsspektrum, Bohrsches Atommodell, Termschema der Atome, charakteristisches Röntgenspektrum, Moseley Gesetz, Absorptionsspektrum, Kristallgitter (Netzebenen), Braggsches Reflexionsgesetz, Nachweis von Röntgenstrahlung, Funktionsweise eines Zählrohres

## 2. Grundlagen

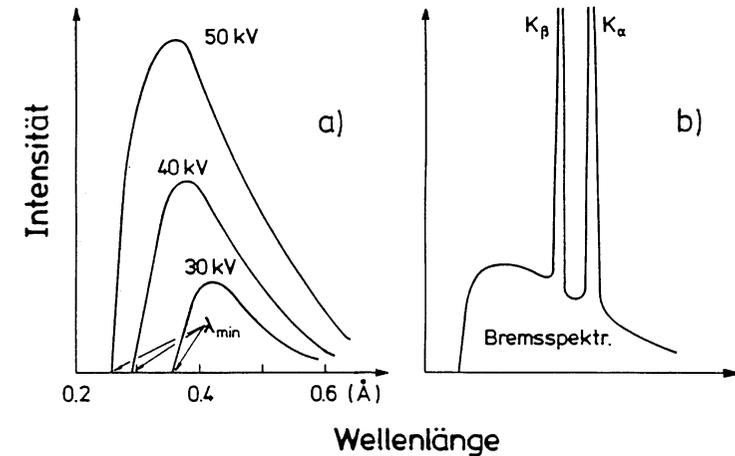
### 2.1 Röntgenbremsspektrum

In einer Röntgenröhre (siehe schematische Darstellung in Abb. 1) erzeugt man durch thermische Emission aus einer Glühkathode K freie Elektronen, bündelt sie mit einem Wehneltzylinder W und beschleunigt sie (im Vakuum) zur Anode A hin durch die Anodenspannung  $U_A$ .



**Abb.1:**  
Röntgenröhre  
(schematisch)

Beim Auftreffen auf die Anode (Material z.B. W oder Cu) werden diese Elektronen in den Elektronenhüllen der Atome der Anode durch Coulombwechselwirkung (was ist das?) abgebremst. Dabei wird ein Teil ihrer kinetischen Energie ( $\frac{1}{2}mv^2 = eU_A$ ) in elektromagnetische Strahlung, der andere (größere) Teil in Wärme umgewandelt. Es entsteht Röntgenstrahlung mit einem kontinuierlichen Spektrum, dem sog. *Röntgenbremsspektrum* (weißes Röntgenlicht, erstmals entdeckt von W. Röntgen, 1895).



**Abb.2:** a) Röntgenbremsspektrum, b) Röntgenbremsspektrum und Linienspektrum (schematisch)

Abbildung 2a zeigt die spektrale Verteilung der Röntgenbremssstrahlung. Das Bremspektrum ist vom Anodenmaterial unabhängig und besitzt eine allein von der vorgegebenen Anodenspannung abhängige, kurzwellige Grenze  $\lambda_{\min}$ . An dieser Grenze wird die gesamte kinetische Energie eines Elektrons auf einmal in Strahlung umgesetzt und es gilt die Beziehung:

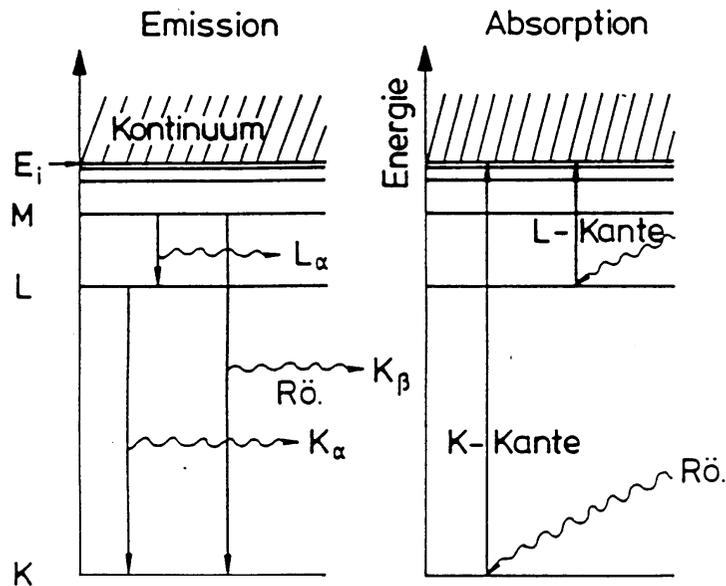
$$\frac{1}{2}mv^2 = eU_A = h\nu_{\max} = \frac{hc}{\lambda_{\min}} \quad (1)$$

Dies bedeutet,  $\lambda_{\min}$  bzw. die Maximalfrequenz  $\nu_{\max}$  des Röntgenbremsspektrums sind bei vorgegebener Spannung  $U_A$  allein durch die Elementarladung  $e$  und das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  bestimmt.

Für viele technische Zwecke und auch im vorliegenden Versuch liegen die Beschleunigungsspannungen  $U_A$  im Bereich 20 - 50 kV und damit die Wellenlängen des Röntgenlichts (gem. Gl. 1) im Bereich unter  $1 \text{ \AA}$  ( $= 10^{-10} \text{ m}$ ).

## 2.2 Linienspektrum

Das in Abb. 2a gezeigte Bremsspektrum ist meist noch von einer charakteristischen Eigenstrahlung der Atome der Anode überlagert. D.h. bei bestimmten Wellenlängen treten zusätzliche Röntgenlinien mit im Vergleich zum Bremsspektrum hoher Intensität auf (siehe Abb. 2b). Diese Linien werden durch elektronische Übergänge in den Atomen des Anodenmaterials hervorgerufen.



**Abb.3:** Termschema eines Atoms mit Vorgängen bei der Emission und Absorption von Röntgenlicht ( $E_i$  = Ionisierungsenergie)

Ihr physikalischer Ursprung kann im Rahmen des Bohrschen Atommodells leicht verstanden werden (vergl. Abb.3): Ein auf die Anode auftreffendes Elektron schlägt z.B. aus der (energetisch) untersten Schale (K-Schale) eines Atoms der

Anode ein Elektron heraus. Beim Übergang eines Elektrons, z.B. aus der nächsthöheren Schale (L-Schale) des Atoms, auf den freien Platz in der K-Schale wird ein der Energiedifferenz der Schalen  $\Delta E = h \nu = h c / \lambda$  entsprechendes charakteristisches Strahlungsquant (Röntgenphoton) ausgesandt, durch Übergänge z.B. von L nach K erscheint im Spektrum die sog.  $K_\alpha$ -Röntgenlinie.

Übergänge von der M-Schale auf die K-Schale führen zur  $K_\beta$ -Linie, analog Übergänge von M nach L zur  $L_\alpha$ -Linie, usw. Je nach energetischer Lage der Terme eines Atoms entsteht so das charakteristische oder Linienspektrum. Die Änderung der Frequenz bzw. Wellenlänge dieser Linien von Element zu Element des Anodenmaterials ist vom Quadrat der Ordnungszahl  $Z$  des betreffenden Elements im Periodensystem abhängig. Es gilt z.B. für die  $K_\alpha$ -Linie:

$$\nu_{K_\alpha} = \frac{3}{4} (Z - \sigma)^2 Ry, \quad \sigma = 1 \quad \text{Moseley - Gesetz} \quad (2)$$

mit der *Rydbergfrequenz*  $Ry = 3,29 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$ . Die *Abschirmkonstante*  $\sigma$  berücksichtigt die Abschirmung der Kernladung durch kernnahe Atomelektronen.

## 2.3 Absorptionsspektrum

Die Schwächung von Röntgenstrahlung in Materie wird verursacht durch *klassische (elastische) Streuung* (Richtungsänderung der Röntgenphotonen ohne Energieabgabe an die durchstrahlte Materie), *Comptonstreuung* (teilweise Energieabgabe des Photons an freie oder lose gebundene Elektronen) und durch *Absorption*. Das Absorptionsvermögen eines Stoffes wird durch den Absorptionskoeffizienten  $\tau_A$  beschrieben. Er hängt stark von der Ordnungszahl  $Z$  des Absorbermaterials und der Wellenlänge  $\lambda$  der Strahlung ab ( $\tau_A \sim Z^4 \lambda^3$ ). Bei der Absorption werden Elektronen von inneren Schalen der Atome des Absorbermaterials unter Aufnahme der gesamten Photonenenergie energetisch angeregt. Aus der Darstellung, Abb.3, geht hervor, dass im Absorptionsspektrum der Röntgenstrahlung keine charakteristischen Linien - wie bei der Emission - beobachtet werden können. Dies würde z.B. bei der  $K_\alpha$ -Linie das Anheben eines Elektrons von der K- auf die L-Schale erfordern. Diese Schale und auch die nächsthöheren sind jedoch i.a. bei den Elementen höherer Ordnungszahlen besetzt, so dass Übergänge bei Absorption bis zur Ionisierungsgrenze oder höher (ins sog. *Kontinuum*) erfolgen müssen. Es entsteht das beispielhaft in Abb. 4 gezeigte Röntgenabsorptionsspektrum, in dem neben dem Anstieg ( $\tau_A \sim \lambda^3$ ) sog. *Absorptionskanten* bei den für das Termschema des betreffenden Elements charakteristischen Wellenlängen auftreten. Die energetische Lage der Kanten (s. Abb. 3) ist wieder - bei Übergang von Element zu Element - durch das Moseley Gesetz, ähnlich (Gl. 2) gegeben.

$$v_K = (Z - \sigma)^2 Ry, \quad \sigma \approx 1 \quad (3)$$

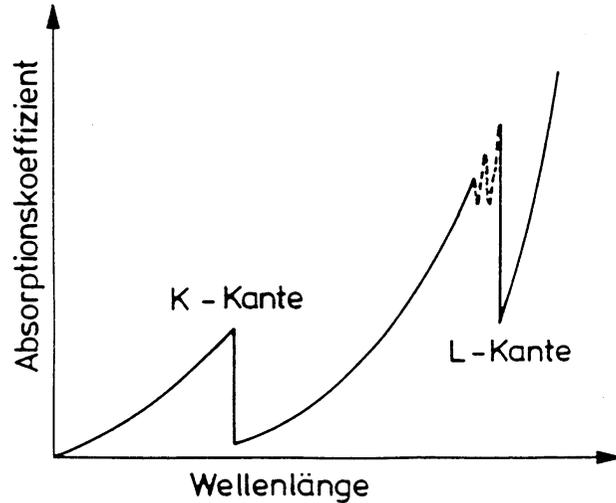


Abb.4: Röntgenabsorptionsspektrum (schematisch)

Durch geschickte Kombination des Anodenmaterials der Röhre (im vorliegenden Versuch Kupfer,  $Z = 29$ ) und eines in den Strahlengang des austretenden Röntgenspektrums geschalteten, absorbierenden Filtermaterials (hier z.B. Nickel,  $Z = 28$ ) kann man erreichen, dass das austretende Röntgenspektrum (Bremspektrum und charakteristisches Cu-Spektrum) im kurzwelligen Bereich so stark geschwächt wird, dass im wesentlichen nur die  $\text{Cu } K_\alpha$ -Linie, also monochromatisches Röntgenlicht mit  $\lambda_{K_\alpha} = 1,54 \text{ \AA} = 154 \text{ pm}$  erhalten bleibt.

## 2.4 Nachweis von Röntgenstrahlen

Röntgenstrahlen können durch ihre ionisierende Wirkung (Ionisationskammer, Zählrohre, Schwärzung von Photoplatten) nachgewiesen werden. Den Aufbau des im Versuch benutzten Geiger-Müller-Zählrohrs zum Nachweis ionisierender Strahlung beschreibt Abb. 5 schematisch:

Das Zählrohr besteht aus einem zylinderförmigen Metallgehäuse, das an einer Seite durch eine dünne, für  $\alpha$ - und  $\beta$ -Teilchen durchlässige Folie abgeschlossen ist. Durch das andere geschlossene Ende des Rohrs ragt axial ein dünner Metalldraht, der vom Gehäuse isoliert über einen Widerstand  $R (> 1 \text{ M}\Omega)$  mit dem

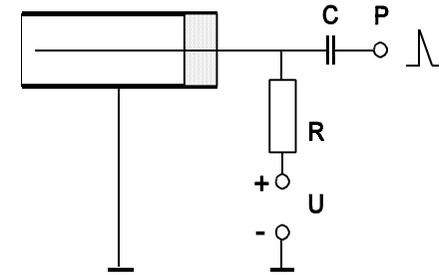


Abb. 5: Geiger-Müller-Zählrohr

Pluspol einer Spannungsquelle  $U$  (ca. 500 V) verbunden ist. Deren Minuspol ist mit dem (geerdeten) Gehäuse verbunden. Das Zählrohr ist mit Inertgas (z.B. Argon ca.100 mbar) und einem Zusatz von Alkoholdampf (ca.10 mbar) gefüllt. Tritt radioaktive Strahlung ( $\alpha, \beta$ ) in das Rohr, werden einzelne Gasatome ionisiert, die Elektronen werden zum positiv geladenen Draht in Richtung der Rohrachse, die positiven Ionen zum Gehäuse hin beschleunigt. Röntgen-Quanten setzen dagegen vorwiegend aus der Gehäusewand Elektronen frei (Photoeffekt).

Aufgrund der zur Rohrachse ansteigenden elektrischen Feldstärke werden die Elektronen so stark beschleunigt, dass sie auf dem Weg zum Draht weitere Gasatome ionisieren. Es kommt zu einer Entladung des Rohrs, die zeitlich durch den Alkoholzusatz begrenzt wird. Der Entladungsstrom erzeugt im Widerstand einen Spannungspuls, der über den Kondensator  $C$  am Punkt  $P$  als Zählpuls registriert wird.

Die Zählrate des Rohrs ist über einen weiten Bereich der Spannung  $U_0 < U < U_1$  nahezu unabhängig von  $U$  (sog. *Geigerplateau*). Unterhalb der Einsetzspannung  $U_0$  ist die Rate Null, oberhalb der Spannung  $U_1$  finden Nachentladungen des Rohrs statt.

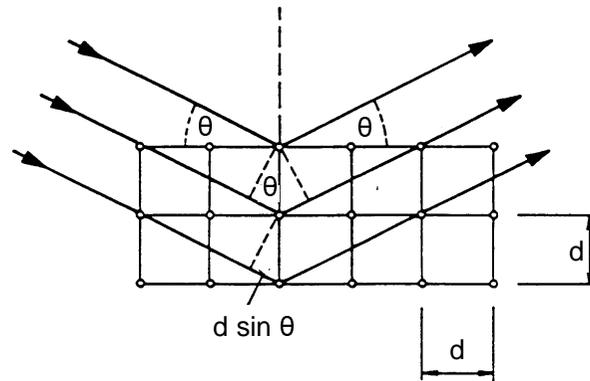
Zum Verständnis der Arbeitsweise des hier verwendeten Geiger-Müller-Zählrohrs studiere man die angegebene Literatur.

## 2.5 Braggsche Reflexion von Röntgenstrahlen

Historisch gesehen bemühte sich Röntgen vergebens, den Nachweis zu führen, dass es sich bei der Röntgenstrahlung um elektromagnetische Wellen handelt. Er konnte weder Beugung noch Interferenzerscheinungen beobachten. Dies gelang erst 1912 v. Laue, der auf den Gedanken kam, Kristallgitter als Beugungsgitter für

Rö-Strahlen zu benutzen. Kristalle bilden Raumgitter mit den Atomen auf festen Gitterplätzen (Gitterebenen oder Netzebenen) mit Abständen in der Größenordnung von Å, d.h. von der Größenordnung der Wellenlänge des Rö-Lichts. (Warum ist das wichtig? Man überlege sich die Analogie zum Beugungsversuch D7).

Die Netz- oder Gitterebenen von Kristallen (im vorliegenden Versuch NaCl und LiF mit einfach kubischer Struktur) reflektieren Röntgenlicht mit einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda$  nur unter ganz bestimmten Winkeln (sog. *Glanzwinkeln*). Da die Röntgenstrahlung in die Kristalle eindringt, spielen für die Reflexionen mehrere Netzebenen und damit der Netzebenenabstand  $d$  eine Rolle.



**Abb.6:** Braggsche Reflexion am Einkristall

Die Vorgänge verdeutlicht vereinfacht Abb. 6. Monochromatisches Rö-Licht fällt unter einem Winkel  $\theta$  auf die zueinander parallelen, im Abstand  $d$  voneinander angeordneten Netzebenen eines Einkristalls (was ist das?) und wird an diesen Netzebenen reflektiert. *Braggsche Reflexion*, d.h. Intensitätsverstärkung der unter dem Winkel  $\theta$  ausfallenden Strahlen erfolgt nur dann, wenn der Gangunterschied benachbarter Strahlen gleich einem ganzzahligen Vielfachen  $n$  der Wellenlänge  $\lambda$  ist. Der Gangunterschied berechnet sich in einfachster Weise aus den geometrischen Verhältnissen entsprechend Abb. 6. Es gilt:

$$n\lambda = 2d \sin \theta_n \quad \text{Braggsche Gleichung} \quad (4)$$

Die Reflexion an den Netzebenen kann physikalisch folgendermaßen verstanden

werden: Jeder Gitterbaustein des Kristalls führt unter Einstrahlung einer elektromagnetischen Welle (Rö-Strahl) erzwungene (Dipol-) Schwingungen aus und sendet in alle Raumrichtungen Strahlung der Wellenlänge  $\lambda$  aus. Diese Strahlen verstärken sich durch positive Interferenz in Reflexionsrichtung, während sie sich in anderen Richtungen auslöschen. Da die Interferenzmaxima besonders intensiv sind, hat man den Eindruck, als ob der Kristall die einfallende Strahlung unter festen Winkeln  $\theta_1, \theta_2, \text{etc.}$  reflektiert.

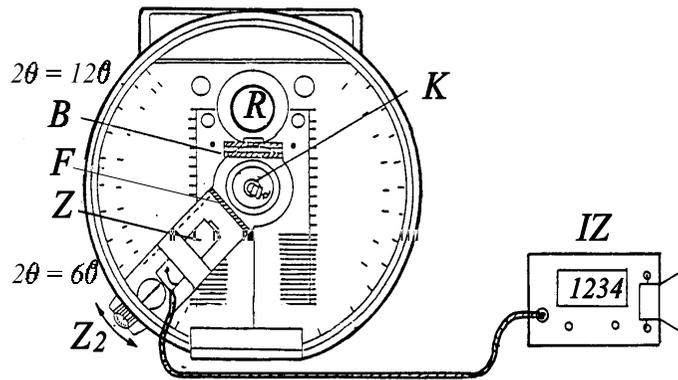
Mit Braggscher Reflexion kann man also den Netzebenenabstand  $d$  eines unbekanntes Gitters bestimmen, wenn die Wellenlänge  $\lambda$  des verwendeten monochromatischen Röntgenlichts bekannt ist, oder umgekehrt  $\lambda$ , wenn der Netzebenenabstand  $d$  des verwendeten Kristalls bekannt ist. Das erste hat technische Bedeutung bei der Strukturbestimmung von Kristallen (Debye-Scherrer-Verfahren, Drehkristall-Verfahren) wie überhaupt die Untersuchungen mit Röntgenstrahlen in der Materialprüfung einen breiten Raum einnehmen.

### 3. Aufgabenstellung

Mit dem Röntgengerät (Cu-Anode und vorgeschaltetem Ni-Filter:  $\lambda_{\text{K}\alpha} = 154 \text{ pm}$ ) sind für einen NaCl-Einkristall die Braggschen Winkel  $\theta$  zu bestimmen. Berechnen Sie daraus den Netzebenenabstand  $d$  von NaCl und vergleichen Sie diesen mit dem Literaturwert  $d_{\text{NaCl}} = 282,0 \text{ pm}$ .

### 4. Versuchsaufbau

Den Versuchsaufbau mit dem Röntgengerät zeigt Abb. 7 schematisch. Die Röntgenröhre ist in einer runden Experimentierkammer sichtbar unterhalb einer Bleiglasabschirmung montiert (warum Bleiglas?). Durch eine Blendenöffnung gelangt der Röntgenstrahl in der Mitte der Experimentierkammer auf den um eine vertikale Achse drehbaren NaCl-Einkristall, wird dort (*Bragg*)-reflektiert und gelangt nach Passieren des Ni-Filters in das Zählrohr, die beide auf einem um die Drehachse schwenkbaren Messarm angeordnet sind. Dessen Winkeleinstellung  $2\theta$  kann auf dem äußeren Rand des Kammerbodens abgelesen werden. Durch mechanische Kopplung wird der Kristall entsprechend auf den Winkel  $\theta$  eingestellt. Zur Bestimmung der vom Zählrohr registrierten Strahlintensität ( $\sim$ Impulsrate, Impulse/s) dient ein Impulszähler mit Start-Stopp-Schalter und Rückstelltaste, zur akustischen Anzeige ein kleiner, auf den Zähler aufgesteckter Lautsprecher. Bedingt durch die geringe Strahlintensität des Röntgengerätes genügt zur Abschirmung der Kammer nach außen eine Aluminium/Blei-Platte sowie eine Plexiglashaube, die den von der Röhre ausgehenden Primärstrahl sowie die Streustrahlung absorbieren bzw. so stark abschwächen, dass eine Gefährdung



**Abb. 7:** Röntgengerät: R Röntgenröhre, B Blende, K Kristall, F Filter, Z Zählrohr, Z<sub>2</sub> Zeiger ( $2\theta$ ), IZ Impulszähler

des Experimentators ausgeschlossen ist. Das Gerät kann nur bei geschlossener Haube betrieben werden. Der Betriebszustand (eingeschaltete Hochspannung) wird durch Leuchten einer roten Warnlampe (neben der Röhre) angezeigt.

### 5. Versuchsdurchführung und Auswertung

Zunächst wird bei abgeschaltetem Röntgengerät die Impulsrate  $N_0$  (in Imp/s) (entsprechend der Intensität der Umgebungsstrahlung) mit einer Zählzeit von 100 s bestimmt. Diese Rate ist gegebenenfalls von den im nachfolgenden Versuch ermittelten Impulsraten abzuziehen. Danach ist das Röntgengerät *nur durch den betreuenden Assistenten* einschalten zu lassen.

Bestimmen Sie nun die Impulsrate  $N(2\theta)$ , bei kleinem Winkel beginnend, im Winkelbereich  $2\theta$  von  $20^\circ$  bis  $120^\circ$  in Stufen von jeweils  $4^\circ$ . Die Angabe der Zählzeiten pro Winkel erfolgt durch den betreuenden Assistenten. Zur genaueren Ermittlung der Bragg-Winkel ist in einem zweiten Messdurchgang wieder mit ansteigendem Winkel die Impulsrate in unmittelbarer Nähe der zuvor beobachteten Maxima in entsprechend kleineren Winkelintervallen zu messen ( $2\theta = 2^\circ; 1^\circ; \dots$ ). Tragen Sie zur Kontrolle während des Versuches die gemessenen Raten über  $\theta$  auf!

**Hinweis:** Man benutze zur Bestimmung der Bragg-Winkel auch die akustische

Anzeige der Impulse bei gleichzeitiger, langsamer Winkeländerung!

In der Auswertung trage man (auf Millimeterpapier) die Impulsrate  $N$  über  $\theta$  auf und bestimme die Bragg-Winkel. Mit Gl. (4) und  $\lambda = 1,54 \text{ \AA}$  für Cu  $K_\alpha$  bestimme man den Netzebenenabstand  $d$  von NaCl. Schätzen Sie die Fehler für die ermittelten Bragg-Winkel und  $d$  ab!

### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Wie funktioniert eine Röntgenröhre?
- 2) Welche verschiedenen Röntgenspektren unterscheidet man (Zeichnung)?
- 3) Wieso gibt es eine kurzwellige Grenze des Bremspektrums?
- 4) Wie kommt das charakteristische Spektrum zustande?
- 5) Wie lautet das Moseley-Gesetz?
- 6) Wie sieht ein Röntgenspektrum in Absorption aus? Wie kommt es zustande?
- 7) Wie weist man nach, dass es sich bei Röntgenstrahlen um elektromagnetische Wellen handelt?
- 8) Wie lautet das Braggsche Gesetz?
- 9) Wie kann man Röntgenstrahlen nachweisen?
- 10) Wie funktioniert ein Zählrohr?

## Versuch D 5: Spektralanalyse

**1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. 3: Optik  
 Pohl, Optik und Atomphysik  
 Walcher, Praktikum der Physik

**Stichworte:** Prismenspektrometer, Gitterspektrometer, Emissionsvermögen von Gasen, Beugung, Dispersion, Brechungsgesetz

### 2. Grundlagen

#### 2.1 Linienspektrum

Das einfachste und bekannteste Modell, das Aufschluss über den mikroskopischen Bau der Atome gibt, ist das *Bohrsche Atommodell*. Dieses Modell, von Bohr zunächst für das Wasserstoffatom aufgestellt, verbindet die Gesetze der klassischen mit denen der Quantenmechanik. Ähnlich wie in einem mikroskopischen Planetensystem kreisen im Atom die Elektronen auf festen Bahnen um den Atomkern, d.h. es sind für die Elektronen energetisch nur bestimmte, feste Bahnen erlaubt (Quantenzustände). Die Energie dieser Zustände nimmt mit zunehmender Entfernung von Atomkern zu, der energetische Abstand jeweils benachbarter Bahnen jedoch ab.

Will man ein Elektron z.B. von der innersten Bahn, auf der es die Energie  $E_1$  besitzt, auf die (energetisch) nächst höhere Bahn mit der Energie  $E_2$  bringen, so ist dazu ein definierter Energieaufwand  $\Delta E = E_2 - E_1$  notwendig. Umgekehrt wird diese Energiedifferenz frei, wenn das Elektron von der zweiten auf die erste Bahn zurückfällt. Die freigesetzte Energie wird dabei als Lichtwelle nach außen abgestrahlt, wobei das Licht eine bestimmte Frequenz  $\nu$  hat, die durch die Beziehung  $\Delta E = E_2 - E_1 = h\nu$  gegeben ist;  $h$  ist das Plancksche Wirkungsquantum ( $h = 6,625 \times 10^{-34} \text{ W s}^2$ ). Mit der Beziehung  $\lambda = c/\nu$  ist damit auch die Wellenlänge  $\lambda$  des Lichts festgelegt, da die Lichtgeschwindigkeit  $c$  eine Konstante ist. (Wie groß ist  $c$  ?).

Atome, die schwerer als das H-Atom sind, d.h. deren Kerne mehr positive Ladung (Protonen) (und auch Neutronen) aufweisen, besitzen (aus Neutralitätsgründen) auch mehr Elektronen. Diese verteilen sich im Atom nach bestimmten Gesetzen auf feste Bahnen, welche in Schalen um den Atomkern angeordnet sind. Die energetische Lage der Bahnen ändert sich dabei von Element zu Element. Dies bedeutet, dass bei Übergängen der Elektronen zwischen den Bahnen von Element zu Element ganz verschiedene und damit für ein Element jeweils charakteristische

Lichtwellen (Linien auf der Spektralskala) ausgesandt werden. Erfolgen Übergänge zwischen mehreren Niveaus gleichzeitig, so wird ein elementtypisches sog. *Linienspektrum* ausgestrahlt. Man beachte noch, dass Übergänge zwischen Energieniveaus, die mit Elektronen voll besetzt sind, nicht erfolgen können. Bei den optischen Linienspektren hat man es mit Übergängen von Elektronen in den äußersten (unbesetzten oder nur teilweise besetzten) Schalen der Atome zu tun. Die Wellenlängen des ausgestrahlten Lichts liegen dabei im sichtbaren Spektralbereich (400-800 nm) oder im angrenzenden Gebiet (infrarot, ultraviolett).

Wie man experimentell Gase (oder Dämpfe) zum Leuchten, d.h. Aussenden der charakteristischen Linien bringt, ist z.B. von den Neonreklameröhren her bekannt. Man bringt das Gas (Dämpfe von Flüssigkeiten oder verdampften Feststoffen) in eine evakuierte Röhre unter nicht zu hohem Druck ein und legt eine Hochspannung an. Durch Stöße mit Ionen und Elektronen werden die Gasatome *angeregt*, d.h. ihre Elektronen auf energetisch höhere Niveaus angehoben. Beim Zurückfallen auf die ursprünglichen Niveaus werden dann die charakteristischen Linien ausgesandt.

Zur Analyse ist es notwendig, das von den Gasatomen ausgesandte Licht nach seinen Spektralfarben zu selektieren. Dieses kann mit Hilfe eines optischen Gitters erfolgen, an dem das Licht gebeugt und durch konstruktive Interferenz in verschiedenen Richtungen, nach Farben sortiert, abgestrahlt wird. Häufiger

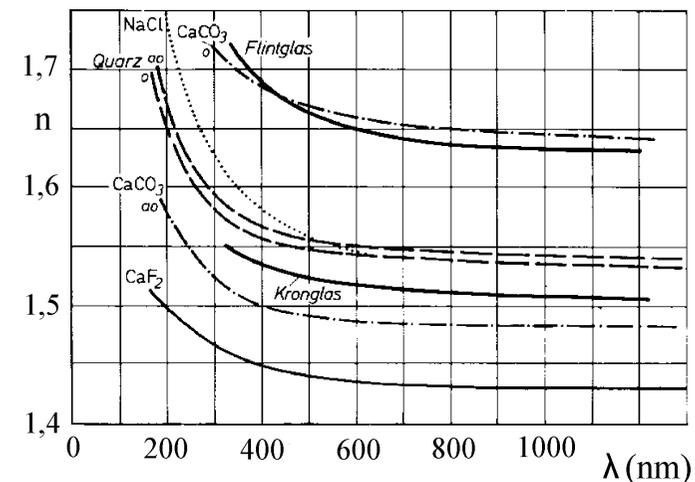


Abb.1: Dispersionskurven  $n(\lambda)$  für verschiedene Prismenmaterialien

verwendet man jedoch für spektralanalytische Untersuchungen *Prismenspektrometer*, die zur Selektion der Spektralfarben die *Dispersion* des Lichtes durch das Prisma nutzen. Hierbei wird Licht unterschiedlicher Farbe (Frequenz) vom Prisma verschieden stark gebrochen. Die Abhängigkeit der Brechzahl  $n$  von der Frequenz  $\nu$  bzw. Wellenlänge  $\lambda$  des Lichtes ist für das jeweilige Prisma charakteristisch (siehe Dispersionskurven, Abb.1). Nimmt man für ein bestimmtes Prisma den Verlauf  $n(\lambda)$  mit einem bekannten Spektrum einmal auf (Eichkurve), lassen sich aus dieser Kurve die Frequenzen (das Linienspektrum) einer nicht bekannten Lichtquelle ablesen, wenn man ihre jeweiligen Brechzahlen bestimmt hat.

Die Brechzahl  $n(\lambda)$  zeigt für viele Prismengläser im sichtbaren Bereich des Spektrums (400-800 nm) die sog. *normale* Dispersion. In diesem Fall nimmt  $n$  mit wachsender Wellenlänge  $\lambda$  ab (s. Abb. 1). Dieser Zusammenhang ergibt sich aus der frequenzabhängigen elektronischen Polarisierbarkeit der Atomhüllen des Prismenglases, welche durch das eindringende Licht zu erzwungenen Schwingungen angeregt werden.

## 2.2 Prismenspektrometer

Den prinzipiellen Aufbau eines Prismenspektrometers zeigt Abb.2. Das zu untersuchende Licht der Lichtquelle beleuchtet einen Spalt. Das von dort ausgehende divergente Lichtbündel durchläuft das Spaltrohr, fällt als Parallel-

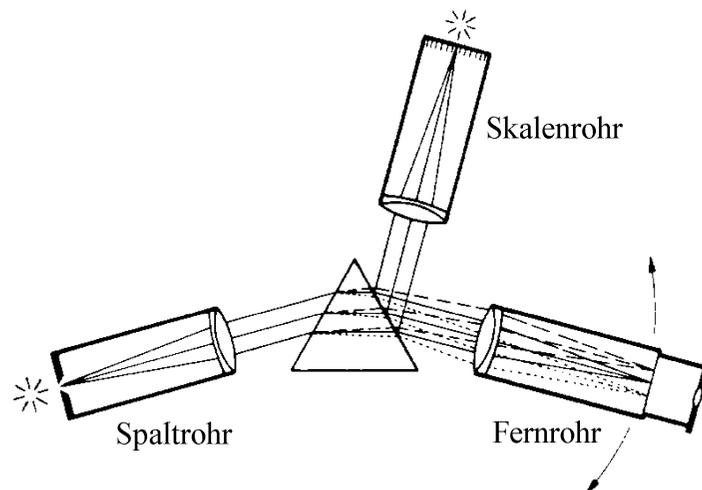


Abb.2: Prismenspektrometer

strahl in ein Prisma und tritt nach der Dispersion in ein auf unendlich eingestelltes Fernrohr. In der Brennebene des Fernrohrobjektivs entstehen so nebeneinander angeordnete Spaltbilder (Spektrallinien), die für die Lichtquelle charakteristisch sind. Ihre Lagen  $s$  auf einer horizontalen Skala sind ein Maß für den Brechungswinkel im Prisma und über die Dispersion  $n(\lambda)$  von der Wellenlänge des Lichtes abhängig. Anstatt in der Brennebene eine Skala direkt anzubringen, wird mittels des Skalenrohres das reelle Bild einer Skala in den Strahlengang projiziert.

Das Prismenspektrometer ist für eine absolute Wellenlängenmessung nicht geeignet. Die Skala muss deshalb mit Spektrallinien bekannter Wellenlänge geeicht werden. Dazu dient z.B. eine Heliumlampe. Durch die Auftragung der ermittelten Skalenteile  $s$  über einer geeigneten Funktion der bekannten Wellenlängen  $\lambda$  des Heliumlichtes erhält man eine Eichkurve (Winkeldispersionskurve), mit deren Hilfe die Wellenlängen der Spektren unbekannter Stoffe ermittelt werden können. Die Winkeldispersion  $s(\lambda)$  ist von der Dispersion  $n(\lambda)$  und der Form des Prismas sowie der Einstellung des Spektrometers abhängig. Die Kenntnis dieses Zusammenhangs ist für die im vorliegenden Versuch durchzuführenden Analysen nicht notwendig.

## 3 Aufgabenstellung

- Aufgabe:** Ermitteln Sie mit Hilfe der im Fernrohr abgebildeten Skala die Lagen  $s$  der sichtbaren Spektrallinien des Heliums und ordnen Sie diese mittels der Spektraltafel (Tab. 1) den entsprechenden  $\lambda$ -Werten zu.
- Aufgabe:** Tragen Sie die beobachteten Skalenteile gegen  $1/\lambda^2$  für die entsprechenden Wellenlängen des Heliums auf und verbinden Sie die Messpunkte durch eine glatte Kurve (Winkeldispersionskurve).
- Aufgabe:** Nehmen Sie die Emissionsspektren zweier Substanzen unbekannter Zusammensetzung auf und analysieren Sie die Substanzen mit Hilfe der in der 2. Aufgabe ermittelten Kurve und der Spektraltafel (Tab. 1).

## 4. Versuchsdurchführung und Auswertung

Nach Einstellen der Skalenbeleuchtung wird das Skalenbild im Fernrohr scharf abgebildet. Der Spalt des justierten Spektrometers wird mit einer Helium-Spektrallampe beleuchtet. Nach kurzer Einbrennzeit sieht man die Spaltbilder (Spektrallinien) im Fernrohr.

Für die Eichung des Spektrometers werden die Skalenteile  $s$  der im Fernrohr sichtbaren Spektrallinien des Heliums genau ermittelt, wobei die sehr schwach zu erkennenden Linien vernachlässigt werden können. Die ermittelten Skalenteile werden mit den aus der Spektraltafel, Tab. 1, zugeordneten Wellenlängen in ein Diagramm  $s(1/\lambda^2)$  eingetragen und die Winkeldispersionskurve konstruiert. Bei der hier gewählten Auftragung lassen sich die Messpunkte mit einem Kurvenlineal durch eine nur wenig gekrümmte Kurve verbinden.

Vor dem Spalt werden nun nacheinander die Lampen mit unbekannter Substanz aufgestellt und die Skalenteile der im Fernrohr sichtbaren Spektrallinien genau ermittelt. Aus der Winkeldispersionskurve werden die zugehörigen Wellenlängen bestimmt. Durch Vergleich der Linienanordnungen mit denen der Spektraltafel werden die unbekannt Substanzen identifiziert.

### 5. Fehlerbetrachtung

Schätzen Sie über die Eichkurve  $s(\lambda)$  den Fehler in der Wellenlängenbestimmung der Spektrallinien der analysierten Substanzen ab, welcher aus einem Ablesefehler  $\Delta s = \pm 0,01$  Skt. resultiert. Vergleichen Sie diesen Fehler mit dem mittleren Betrag der Abweichung der aus der Eichkurve ermittelten Wellenlängen von den Werten in der Spektraltafel, Tab.1. Wie kann die Genauigkeit der Wellenlängenbestimmung verbessert werden?

### 6. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Welche Anregungsprozesse liegen der Lichterzeugung zugrunde?
- 2) Welche physikalische Größen charakterisieren die Eigenschaften und die Ausbreitung des Lichts?
- 3) Was bestimmt die Farbe des Lichts: Frequenz oder Wellenlänge?
- 4) Wie lautet das Brechungsgesetz?
- 5) Was ist Beugung, was Brechung?
- 6) Was versteht man unter Dispersion?
- 7) Wie funktioniert ein Fernrohr?
- 8) Was versteht man unter dem *Auflösungsvermögen* eines Prismenspektralapparates und wovon hängt es ab?

**Tab. 1:** Spektrallinien einiger Elemente nach Elementen geordnet

Element (Symbol)			Element (Symbol)		
$\lambda$ (nm)	Farbeindruck	Helligkeitseindruck	$\lambda$ (nm)	Farbeindruck	Helligkeitseindruck
Wasserstoff (H)			noch Natrium (Na)		
656,28	rot	stark	567,57	gelbgrün	schwach
486,13	blaugrün	mittel	567,02	gelbgrün	schwach
434,05	violett	mittel	Kalium (K)		
410,17	violett	schwach	769,90	dunkelrot	stark
Helium (He)			766,49	dunkelrot	stark
706,54	dunkelrot	schwach	404,72	violett	mittel
667,82	rot	stark	404,41	violett	mittel
587,56	gelb	sehr stark	Cadmium (Cd)		
504,77	grün	schwach	643,85	rot	stark
501,57	grün	mittel	635,99	gelbrot	schwach
492,19	blaugrün	mittel	508,58	grün	stark
471,31	blau	schwach	479,99	blaugrün	stark
447,15	blau	stark	467,82	blau	stark
438,79	violett	schwach	441,46	blau	mittel
Lithium (Li)			Quecksilber (Hg)		
670,78	rot	stark	579,07	gelb	sehr stark
610,36	gelbrot	mittel	576,96	gelb	sehr stark
460,29	blau	schwach	546,07	grün	stark
Natrium (Na)			491,60	blaugrün	mittel
616,08	gelbrot	mittel	435,84	blau	stark
615,42	gelbrot	mittel	407,78	violett	mittel
589,59	gelb	stark	404,66	violett	mittel
589,00	gelb	mittel			

## Versuch D 8: Temperaturstrahlung

**1. Literatur:** Bergmann-Schaefer, Lehrbuch der Experimentalphysik, Bd. III, Optik  
 Pohl, Einführung in die Physik, Bd. III, Optik  
 Gerthsen-Kneser-Vogel, Physik  
 Walcher, Praktikum der Physik

**Stichworte:** Schwarzer Körper, absolute Temperatur, Temperaturstrahlung, Emissions- und Absorptionsvermögen, Kirchhoffsches Gesetz, Plancksches Strahlungsgesetz, Wiensches Verschiebungsgesetz, Strahlungsgesetz von Stefan-Boltzmann, Strahlungsgesetz von Wien, grauer Strahler, Pyrometer, Thermosäule

### 2. Grundlagen

#### 2.1 Temperaturstrahlung (Kirchhoffsches Gesetz)

Jeder auf einer absoluten Temperatur  $T > 0$  (gemessen in *Kelvin*) befindliche Körper sendet in seine Umgebung Strahlung (elektromagnetische Wellen) aus, deren Energie und spektrale Intensität (Bandbreite) im wesentlichen von der Temperatur des Körpers abhängen (*Temperaturstrahlung*). Die spektrale Bandbreite verdeutlicht ein Vergleich der Sonne mit einem Heizkörper. Die Sonne (Oberflächentemperatur  $T = 5700$  K) emittiert Strahlung sowohl im ultravioletten und sichtbaren Bereich (Wellenlänge  $\lambda = 400-800$  nm) als auch im ultraroten Bereich (Wärmestrahlung), ein Heizkörper mit  $T = 350$  K jedoch ausschließlich Strahlung im UR-Bereich und diese, erfahrungsgemäß, auch mit wesentlich geringerer Strahlungsleistung. Während  $1 \text{ m}^2$  Oberfläche der Sonne in den Halbraum eine über die spektrale Bandbreite integrierte Strahlungsleistung bzw. einen Strahlungsfluss  $\Phi = 6,1 \times 10^7 \text{ W}$  aussendet, strahlt  $1 \text{ m}^2$  Fläche des Heizkörpers mit  $T = 350$  K einen um den Faktor  $10^5$  kleineren Fluss in den Halbraum ab.

Der Strahlungsfluss  $d\Phi$ , der von einem Flächenelement  $dF$  eines auf der Temperatur  $T$  befindlichen Temperaturstrahlers in den Halbraum vor seiner Oberfläche im Wellenlängenintervall zwischen  $\lambda$  und  $\lambda + d\lambda$  ausgesandt wird, ist gegeben durch:

$$d\Phi = E(\lambda, T) dF d\lambda \quad (1)$$

Die Größe  $E(\lambda, T)$  wird *Emissionsvermögen* genannt. Sonne und Heizkörper unterscheiden sich also, wie oben verdeutlicht, in ihrem Emissionsvermögen - sowohl in dessen spektraler Verteilung als auch in dessen Integral über alle Wellenlängen.

Strahlung wird von Körpern nicht nur emittiert sondern auch absorbiert bzw. reflektiert (Durchlässigkeit wird hier nicht beachtet). Entsprechend definiert man das *Absorptionsvermögen*  $A$  eines Körpers als das Verhältnis von absorbiertem zu auftreffendem Strahlungsfluss bzw. das *Reflexionsvermögen*  $R$  als das Verhältnis von reflektiertem zu auftreffendem Strahlungsfluss.  $A$  und  $R$  sind ihrer Definition nach dimensionslose Größen. Es gilt:

$$R = 1 - A \quad (2)$$

wenn die Durchlässigkeit  $D = 0$  ist. Die Größen  $A$  und  $R$  hängen von der Wellenlänge der auftreffenden Strahlung, der Temperatur des Körpers sowie - und das ist nachteilig - von seinen physikalischen Eigenschaften wie z.B. seiner Oberflächenbeschaffenheit ab ( $A(\lambda, T, \dots)$ ,  $R(\lambda, T, \dots)$ ).

Um von diesen Materialeigenschaften unabhängig zu werden, betrachte man zwei beliebige Körper 1 und 2 in festem Abstand (klein relativ zu ihren Abmessungen) gegenübergestellt. Im stationären Zustand (beide Körper auf gleicher Temperatur) strahlt Körper 1 nach 2 den Fluss  $\Phi_1$ , außerdem reflektiert er den nicht absorbierten Bruchteil  $(1 - A_1)$ , des von 2 zurückgestrahlten Flusses  $\Phi_2$ . Entsprechendes gilt für die von 2 nach 1 gesandte Strahlung. Im Gleichgewicht ist:

$$\Phi_1 + (1 - A_1)\Phi_2 = \Phi_2 + (1 - A_2)\Phi_1$$

bzw. 
$$\frac{\Phi_1}{A_1} = \frac{\Phi_2}{A_2} \quad (3)$$

Dem folgt mit Gl. (1) das *Gesetz von Kirchhoff*:

$$\frac{E_1(\lambda, T)}{A_1(\lambda, T)} = \frac{E_2(\lambda, T)}{A_2(\lambda, T)} = f(\lambda, T) \quad (4)$$

Diese Beziehung gilt für zwei ganz beliebige Körper. Daher muss das Verhältnis  $E(\lambda, T)/A(\lambda, T)$  von allen Materialeigenschaften unabhängig sein und kann nur von

$\lambda$  und T abhängen. Diese Aussage heißt *Kirchhoffsches Gesetz*.

Eine Sonderstellung bei der physikalischen Beschreibung von Strahlungsvorgängen nimmt der sog. *schwarze Körper* ein. Ein schwarzer Körper absorbiert die gesamte auftreffende Strahlung, d.h. sein Absorptionsvermögen ist für alle Temperaturen und Wellenlängen gleich 1;  $A_s = 1$ . Setzt man dies in Gl. (4) ein, so erkennt man, dass die Funktion  $f(\lambda, T)$  dem Emissionsvermögen des schwarzen Körpers  $E_s(\lambda, T)$  entspricht und das Kirchhoffsche Gesetz die Form erhält:

$$\frac{E(\lambda, T)}{A(\lambda, T)} = E_s(\lambda, T) \quad (5)$$

In der Natur kommt kein absolut schwarzer Körper vor. Er lässt sich jedoch experimentell in guter Näherung durch einen allseitig geschlossenen Hohlkörper (Ofen) mit einem kleinen Loch im Deckel realisieren. Die durch die Öffnung eintretende Strahlung wird durch Vielfachreflexion an den Innenwänden so stark geschwächt, dass näherungsweise kein Anteil durch die Öffnung wieder nach außen tritt, d.h. die auftreffende Strahlung vollständig absorbiert wird.

Als einen *grauen Strahler* bezeichnet man einen Körper, dessen Absorptionsvermögen von der Wellenlänge und Temperatur unabhängig ist und einen Wert  $A < 1$  hat. Im Unterschied zum schwarzen Körper können viele in der Natur vorkommende Strahler (auch die im Versuch vorliegende Lampe) als graue Strahler bezeichnet werden, meist jedoch nur für einen beschränkten Spektralbereich.

## 2.2 Strahlungsgesetz des schwarzen Körpers

Für das Emissionsvermögen des schwarzen Körpers  $E_s(\lambda, T)$  wurde 1900 von Max Planck eine auf der Quantenmechanik basierende Formel vorgeschlagen, deren Richtigkeit durch das Experiment und spätere quantenmechanische Ableitung von ihm streng bewiesen wurde. Wesentlich hierbei ist, dass im Hohlraum ein elektromagnetisches Strahlungsfeld besteht, welches bei der Wechselwirkung mit dem schwarzen Körper Energie nur quantenhaft mit seinen Atomen austauschen kann. Dies bedeutet, dass die Aufnahme und Abgabe von Energie der Oszillatoren des Strahlungsfeldes nicht klassisch in beliebiger kleiner Menge sondern nur in einem Vielfachen der *Photonenenergie*  $\Delta E = h\nu = hc/\lambda$  erfolgen kann ( $\nu =$  Strahlungsfrequenz,  $h =$  Plancksches Wirkungsquantum).

Die Oszillatoren, die im Hohlraum des schwarzen Körpers alle untereinander in Wechselwirkung stehen, sind bei  $T = 0$  in Ruhe (Nullpunktsenergie vernach-

lässigt) und werden mit steigender Temperatur bzw. thermischer Energie  $k_B T$  immer mehr angeregt ( $k_B =$  Boltzmann-Konstante,  $k_B = 1,38 \times 10^{-23}$  J/K). Dabei wird Strahlung mit dem schwarzen Körper ausgetauscht.

Für das Emissionsvermögen  $E_s(\lambda, T)$  des schwarzen Körpers ergibt sich das *Plancksche Strahlungsgesetz*\*:

$$E_s(\lambda, T) = 2\pi \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1} \quad (6)$$

bzw.

$$E_s(\lambda, T) = 2\pi \frac{c_1}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1} \quad (7)$$

mit den Konstanten:  $c_1 = h c^2 = 5,96 \times 10^{-17}$  W m<sup>2</sup>  
 $c_2 = h c/k_B = 1,439 \times 10^{-2}$  m K.

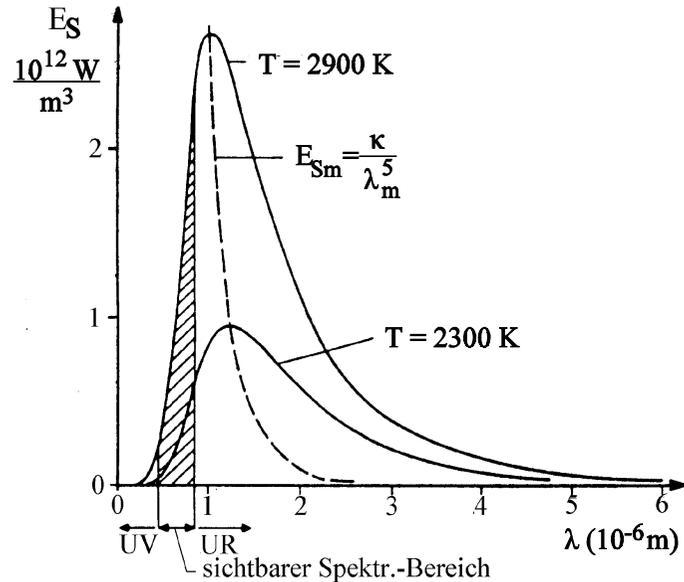
Abb. 1 zeigt zwei Strahlungsisothermen  $E_s(\lambda, T)$  des Planckschen Gesetzes (sichtbarer Bereich schraffiert). Man beachte die Einheiten von  $E_s$ !

Die historisch schon früher bekannten Strahlungsgesetze von Wien und Rayleigh-Jeans ergeben sich näherungsweise aus der Planckschen Formel, Gl. (6,7). Für den Grenzfall  $hc/\lambda \gg k_B T$ , d.h.  $\lambda T \ll 1,4 \times 10^{-2}$  m K kann man die 1 im Nenner der Gl. (7) vernachlässigen, und es ergibt sich für den kurzwelligen Teil des Spektrums das *Strahlungsgesetz von Wien*:

$$E_s(\lambda, T) = 2\pi \frac{c_1}{\lambda^5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}} \quad (8)$$

Dieses Gesetz ist für die Pyrometrie wichtig, da es im sichtbaren Bereich für Temperaturen bis ca. 5000 K gilt und das spektrale Emissionsvermögen des

\*) In der Literatur findet man die Plancksche Strahlungsformel, Gl.(6) u. (7), häufig für die *spektrale Strahlungsdichte*  $S_s(\lambda, T)$  des schwarzen Körpers, die der (spektralen) Strahlungsleistung der Flächeneinheit in die Raumwinkleinheit (Flächeneinheit auf der Einheitskugel) senkrecht zur Oberfläche entspricht und sich vom Emissionsvermögen  $E_s(\lambda, T)$  lediglich um den Faktor  $\pi$  unterscheidet:  $E_s(\lambda, T) = \pi S_s(\lambda, T)$ . Den Faktor  $\pi$  erhält man durch Integration von  $S_s$  über den Halbraum ( $2\pi$ ) unter Berücksichtigung aller Abstrahlungsrichtungen.



**Abb.1:** Strahlungsisothermen  $E_S(\lambda, T_i)$  des Planckschen Gesetzes (—), Maxima  $E_{Sm}(\lambda_m, T)$  (---)

schwarzen Körpers durch die Temperatur eindeutig bestimmbar ist (und umgekehrt!). Der andere Grenzfall  $hc/\lambda \ll k_B T$  (große Wellenlängen, Strahlungsformel von Rayleigh-Jeans) soll hier nicht näher betrachtet werden.

Jede Plancksche Isotherme besitzt, wie Abb. 1 zeigt, ein Maximum bei einer bestimmten Wellenlänge  $\lambda_m$ . Mit der Bedingung  $dE_S(\lambda, T)/d\lambda = 0$  folgt aus Gln. (7,8) das *Wiensche Verschiebungsgesetz*:

$$\lambda_m T = \text{const.} = w = 2,897 \times 10^{-3} \text{ mK} \quad (9)$$

Mit zunehmender Temperatur verschiebt sich also das Maximum zu kürzeren Wellenlängen (und umgekehrt). Die Maxima der Strahlungsisothermen liegen auf einer Hyperbel  $E_{Sm}(\lambda_m)$  (in Abb.1 gestrichelt gezeichnet), die sich aus der Gl. (7) ergibt, wenn man dort aus Gl. (9)  $w/\lambda_m$  für T einsetzt:

$$E_{Sm}(\lambda_m) = \frac{\kappa}{\lambda_m^5} \quad \text{mit } \kappa = 2,63 \times 10^{-18} \text{ W m}^2 \quad (10)$$

Entsprechend ergibt sich das Emissionsvermögen im Strahlungsmaximum als Funktion der Temperatur zu

$$E_{Sm}(T) = \tau T^5 \quad \text{mit } \tau = 1,29 \times 10^{-5} \text{ W m}^{-3} \text{ K}^{-5} \quad (11)$$

Dies bedeutet, dass bei der Temperatur  $T_2 = T_1/2$  einer vorgegebenen Temperatur  $T_1$  das Emissionsvermögen im Maximum nur noch 1/32 des Wertes bei  $T_1$  beträgt. Im Sonnenspektrum beobachtet man den Höchstwert  $E_{Sm}$  bei der Wellenlänge  $\lambda_m = 480 \text{ nm}$  (grün). Dem entspricht ein schwarzer Körper mit  $T \approx 6000 \text{ K}$ .

Der gesamte von einer (ebenen) Fläche  $F$  eines schwarzen Strahlers in den Halbraum ausgestrahlte Fluss (Leistung) pro Flächeneinheit (strahlender Fläche)  $\Phi/F$  ergibt sich aus den Gleichungen (1) und (6) durch Integration über die Wellenlänge zu:

$$\frac{\Phi}{F} = \int_{\lambda=0}^{\infty} E_S(\lambda, T) d\lambda = \sigma T^4 \quad \text{Stefan-Boltzmann-Gesetz} \quad (12)$$

mit  $\sigma = 2\pi^5 k_B^4 / 15 c^2 h^3 = 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$

### 2.3 Pyrometrie

Pyrometer sind Geräte zur berührungslosen Messung hoher Temperaturen ( $T > 1000 \text{ K}$ ), z.B. metallischer Schmelzen (Hochofen) und werden bevorzugt in Bereichen eingesetzt, wo die Anwendung von Thermoelementen nicht mehr möglich ist. Ein Pyrometer (s. Abb. 2) besteht aus einem Fernrohr, in dessen Zwischenebene ein gebogener Glühfaden einer Wolframlampe angebracht ist. Durch einen regelbaren Widerstand  $R$  im Lampenkreis lässt sich der Strom durch die Wolframlampe - und damit deren Helligkeit - variieren. Mit dem Objektiv wird der zu untersuchende Strahler (Schmelze, glühender Körper, Lampe) in die Glühfadenebene abgebildet und der Regelwiderstand so eingestellt, dass die Helligkeit des Glühfadens gerade mit der des Messobjektes übereinstimmt. Diese entspricht einem ganz bestimmten Wert des Stromes  $I$  durch den Wolframfaden.

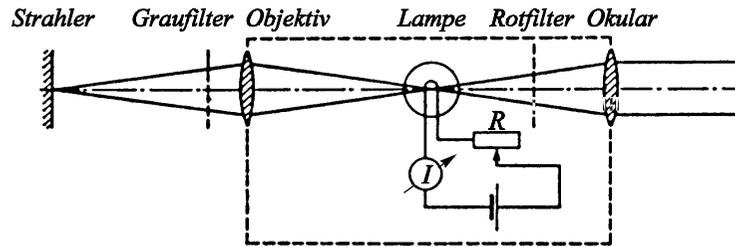


Abb.2: Pyrometer, schematisch

Durch ein in den Strahlengang des Pyrometers eingeschobenes Rotfilter ist man bei der Beobachtung auf einen kleinen Spektralbereich  $\Delta\lambda$  um 660 nm beschränkt (Teilstrahlpyrometer).

Die vom menschlichen Auge registrierte Helligkeit eines Temperaturstrahlers ist proportional zu seinem Emissionsvermögen im betrachteten Spektralbereich. Bei gleicher Helligkeit der Pyrometerlampe und des Messobjektes haben zwar beide das gleiche Emissionsvermögen jedoch i.a. nicht die gleiche Temperatur, da - wie die Diskussion in den vorangegangenen Abschnitten gezeigt hat - selbst für einen vorgegebenen (engen) Spektralbereich das Emissionsvermögen nicht nur von der Temperatur sondern auch von der Art des Strahlers abhängt. Zur Kalibrierung eines Pyrometers, dessen Lampenstrom nach dem Abgleich eine eindeutige Funktion der Temperatur des Messobjektes ist, verwendet man die Strahlung eines schwarzen Körpers. Die abgelesene Temperatur nennt man *schwarze Temperatur*  $T_s$ . Sie ist für das untersuchte Messobjekt nur gleich seiner wahren Temperatur  $T$ , wenn dieses auch wie ein schwarzer Körper strahlt. Dies ist - wie schon erwähnt - in der Praxis nicht der Fall, da man es (für einen engen Spektralbereich) i.a. mit grauen Strahlern ( $A = \text{const} < 1$ ) zu tun hat.

Befinden sich ein schwarzer und ein grauer Strahler auf gleicher Temperatur, so ist das Emissionsvermögen (Helligkeit) des grauen Strahlers um sein Absorptionsvermögen ( $A < 1$ ) geringer als das des schwarzen Strahlers. Wenn ein schwarzer und ein grauer Strahler in einem bestimmten Spektralbereich die gleiche Helligkeit zeigen, muss deshalb die (wahre) Temperatur  $T$  des grauen Strahlers stets größer als seine schwarze Temperatur  $T_s$  sein, welche zugleich die (wahre) Temperatur des schwarzen Strahlers ist.

Um eine Beziehung zwischen  $T$  und  $T_s$  herzustellen, reicht es für die praktische Anwendung aus, das Wiensche Strahlungsgesetz (Gl.(8)) anzuwenden, da  $\lambda T$  genügend klein ist. Mit Gl. (5) gilt bei gleicher Helligkeit (Emissionsvermögen)

von Messobjekt ( $E$ ) und Wolframfaden des Pyrometers ( $E_s$ ):

$$E(\lambda, T) = A E_s(\lambda, T) = E_s(\lambda, T_s) \quad (13)$$

Durch Verhältnissbildung folgt mit Gl. (8):

$$\frac{1}{T} - \frac{1}{T_s} = \frac{\lambda}{c_2} \ln A \quad (14)$$

Diese Gleichung gilt exakt für einen grauen Strahler, kann jedoch mit hinreichender Genauigkeit auch auf Metalle angewendet werden, bei denen die Temperaturabhängigkeit des Absorptionsvermögens nur gering ist. Da Metalle jedoch i.a. ein großes Reflexionsvermögen  $R$  und damit kleines Absorptionsvermögen  $A$  besitzen, kann die Abweichung zwischen  $T$  und  $T_s$  beträchtlich sein.

Aus Gleichung (14) folgt durch Umformen:

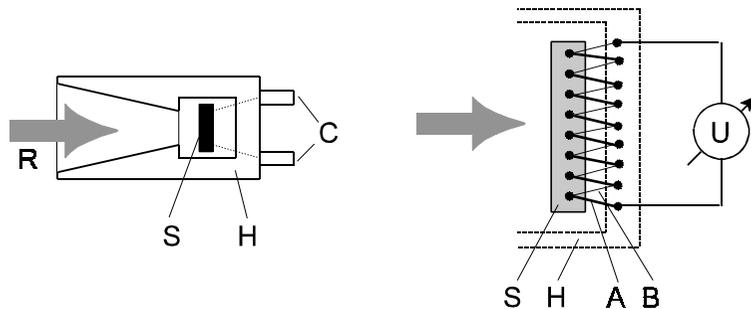
$$T = T_s \frac{1}{1 + T_s \frac{\lambda}{c_2} \ln A} = T_s k(T_s) \quad (15)$$

Der Korrekturfaktor  $k(T_s)$  ist für die im Versuch verwendete Wolframglühlampe in Abschnitt 5 angegeben.

## 2.4 Thermosäule

Abb. 3 zeigt schematisch den Aufbau einer Thermosäule. Sie besteht aus einem hohlen Metallzylinder  $H$  mit einer Öffnung an einem Ende, in den die Strahlung  $R$  eintritt. Sie wird an der konischen Innenwand des Zylinders reflektiert und auf die geschwärzte Oberfläche eines Sensorelements  $S$  geleitet, wo sie absorbiert wird. Dadurch erhöht sich die Temperatur des Sensors um einen kleinen Betrag  $\Delta T$  über die Temperatur des Gehäuses  $H$ . Die Temperaturdifferenz  $\Delta T$  zwischen  $H$  und  $S$  erzeugt in mehreren in Reihe geschalteten Thermoelement-Paaren  $A, B$  eine Thermospannung  $U_{Th}$ , die mit einem Millivoltmeter gemessen wird. Für kleine Temperaturunterschiede ist  $U_{Th}$  proportional zu  $\Delta T$  und proportional zur absorbierten Strahlungsleistung (Strahlungsfluss  $\Phi$ ) so dass

$$U_{Th} = c \Phi, \quad c = 0.16 \frac{\text{mV}}{\text{mW}} \quad (\text{Herstellerangabe}) \quad (16)$$



**Abb. 3:** Thermosäule schematisch: Links: Längsschnitt mit einfallender Strahlung R, Sensorelement S, Gehäuse H, elektrischem Anschluss C; rechts: Anschluss des Millivoltmeters U an die in Reihe geschalteten Thermolement-Paare A, B

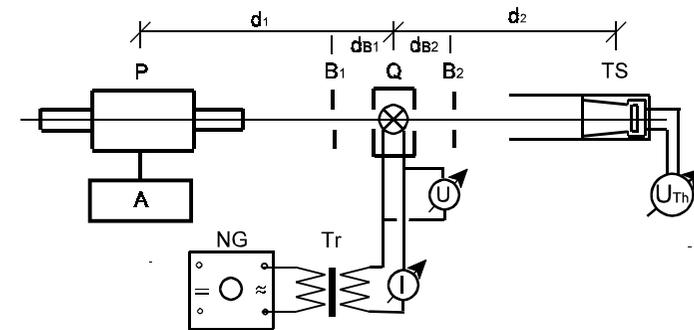
### 3. Aufgabenstellung

Der von einer Thermosäule registrierte Strahlungsfluss einer Wolframglühlampe ist als Funktion ihrer Wendeltemperatur zu bestimmen, die mit einem Teilstrahlpyrometer gemessen wird. Mit den ermittelten Daten ist die Gültigkeit des Stefan-Boltzmann-Gesetzes zu überprüfen.

### 4. Versuchsdurchführung

Den Versuchsaufbau zeigt Abb. 4 schematisch: Die zu untersuchende Wolframglühlampe Q wird an ein variables Wechselspannungsnetzgerät NG mit nachgeschaltetem Transformator Tr angeschlossen. Ihre aufgenommene elektr. Leistung  $P_{el}$  kann mit Strom- und Spannungsmessgeräten I und U bestimmt werden. Die an der Lampe anliegende Spannung U wird zwischen 1 und 5 V in Schritten von ca. 0,5 V in auf- und absteigender Folge variiert. Mit dem Teilstrahlpyrometer P ist die (schwarze) Temperatur  $t_s(U)$  der Glühlampenwendel, mit der Thermosäule TS die Thermospannung  $U_{Th}(U)$  entsprechend dem absorbierten Strahlungsfluss  $\Phi(U)$  zu bestimmen.

Die Messung der Glühlampentemperatur  $t_s$  erfolgt mit dem Teilstrahlpyrometer P. Vor Beginn der Messungen ist die Blende  $B_1$  (eine verstellbare Irisblende im Abstand  $d_{B1} \approx 15$  cm) so einzustellen, dass die Objektöffnung des Pyrometers gerade ausgeleuchtet ist, d.h. die andere Experimente störende Streustrahlung minimiert wird. Dann wird das Pyrometer durch zwei Stellräder am Stativ auf die



**Abb.4:** Versuchsaufbau zur Temperatur- und Strahlungsleistungsmessung der Glühlampe: Q Glühlampe; P Teilstrahlpyrometer mit Anzeigeeinheit A; TS Thermosäule mit Spannungsmesser  $U_{Th}$ ; NG Wechselspannungsnetzgerät mit Transformator Tr und Strom-, Spannungsmessern I, U;  $B_{1,2}$  Blenden; Abstände  $d_{1,2}$  bzw  $d_{B1, B2}$  siehe Text

Glühlampenwendel gerichtet Das dem Betrachter zugewandte Okular des Pyrometers ist zunächst (am Stellring vor der Augenklappe) so einzustellen, dass der leuchtende Glühfadens der Pyrometerlampe scharf sichtbar ist. Darauf wird die Wendel der zu untersuchenden Glühlampe in der Ebene des Glühfadens der Pyrometerlampe abgebildet (fokussiert). Dies geschieht durch Variation der Position der Objektivlinse durch ein Stellrad am Pyrometer. Voraussetzung für eine ausreichende Fokussierung ist ein genügend großer Abstand  $d_1 \geq 160$  cm zwischen Pyrometer und Glühlampe. Nach Einschalten des Rotfilters (an der dem Betrachter zugewandten Seite des Pyrometers) wird die Pyrometerlampe durch die Grob- und Feinregelung (an der linken und rechten Seite des Pyrometers) auf gleiche Helligkeit mit der Glühlampenwendel gebracht. Zur Erweiterung des Messbereiches kann am Pyrometer (ebenfalls an der Rückseite) ein Graufilter vorgeschaltet werden. Für die Schalterstellung am Pyrometer und entsprechend an der Anzeigeeinheit gelten folgende Temperaturbereiche:

Temperaturbereich $t_s$ (°C)	Schalterstellung	
	Anzeigeeinheit	Pyrometer
650 - 1450	I	1 (ohne Graufilter)
1450 - 3000	II	2 (mit Graufilter)

Für jede Betriebsspannung der Glühlampe ist aus jeweils drei Pyrometerabgleichungen der Mittelwert für die angezeigte *schwarze Temperatur*  $t_s$  (in °C) zu bestimmen.

Auf der dem Teilstrahlpyrometer gegenüber liegenden Seite der Glühlampe ist im Abstand  $d_2 = 50$  cm die Thermosäule TS mit dem Spannungsmesser der Thermospannung  $U_{Th}$  aufgestellt. Ein auf die Thermosäule aufgesteckter Tubus minimiert den Eintritt von Streustrahlung in die Thermosäule. Die im Abstand  $d_{B2} = 10$  cm aufgestellte Blende  $B_2$  (12 mm Ø) verhindert den Eintritt der Wärmestrahlung des Lampengehäuses in die Thermosäule.

Der Spannungsmesser  $U_{Th}$  ist mindestens 10 min. vor Beginn der Messungen mit der Glühlampe einzuschalten (Digitalvoltmeter: 20mV-Bereich; 1µV Auflösung). Danach ist (bei ausgeschalteter Lampe) die Anzeige möglichst genau auf Null ( $\pm 2$  Digits) einzustellen.

Warten Sie nach jeder Neueinstellung der Betriebsspannung  $U$  für die Glühlampe, bis sich die Anzeige  $U_{Th}$  (einigermaßen) stabilisiert hat. Geringe Änderungen von  $U_{th}$  sind auch durch Schwankungen der Betriebsspannung  $U$  bedingt. Bei der Messung ist unbedingt darauf zu achten, dass keine Fremdeinflüsse wie Luftbewegung oder fremde Wärmestrahlung im Bereich der Thermosäule das Ergebnis verfälschen.

### 5. Auswertung

Mit Gl. (16) ist aus der in der Thermosäule erzeugten Thermospannung  $U_{Th}$  der absorbierte Strahlungsfluss  $\Phi$  zu berechnen.

Die an der Anzeigeeinheit des Pyrometers abgelesene Temperatur  $t_s$  (in °C) entspricht der Temperatur eines schwarzen Körpers, der den gleichen Strahlungsfluss d.h. die gleiche Strahlungsleistung besitzt wie der untersuchte, heißere graue Körper. Die *wahre* Temperatur  $T$  des grauen Strahlers (Wolfram) (in K) wird ermittelt, indem  $T_s$  (in K) mit einem temperaturabhängigen Faktor  $k(T_s)$  multipliziert wird (vergl. Gl. (15):

$$T = k(T_s)T_s \quad \text{mit} \quad T_s = t_s + 273 \text{ K}$$

Die Werte für  $k(T_s)$  im betrachteten Spektralbereich (Rotfilter) entnehme man der nachfolgenden Tabelle durch Interpolation.

$T_s$ (K)	k	$T_s$ (K)	k
800	1,028	1600	1,063
1000	1,036	1800	1,073
1200	1,045	2000	1,083
1400	1,054	2200	1,092

**Tabelle:** Korrekturfaktor  $k(T_s)$  für Wolfram

Man trage den Strahlungsfluss  $\Phi$  als Funktion von  $T^4$  in einem Diagramm auf. Für die Messreihe ist eine Ausgleichsgerade durch die Datenpunkte zu legen. Diskutieren Sie das Ergebnis. Erörtern Sie mögliche Fehlerquellen!

### 5. Fragen zur Selbstkontrolle

- 1) Was versteht man unter Temperaturstrahlung?
- 2) Wie lautet das Kirchhoffsche Gesetz?
- 3) Wie hängen die Absorption und Reflexion zusammen, wenn die Durchlässigkeit Null ist?
- 4) Was versteht man unter einem schwarzen Körper?
- 5) Wie lautet das Kirchhoffsche Gesetz, wenn man das Emissionsvermögen des schwarzen Strahlers berücksichtigt?
- 6) Was ist ein grauer Strahler?
- 7) Wie lautet die Plancksche Strahlungsformel?
- 8) Wie lautet das Wiensche Verschiebungsgesetz?
- 9) Wie lautet das Strahlungsgesetz von Stefan-Boltzmann und wie erhält man es aus dem Plancksches Strahlungsgesetz?
- 10) Wie arbeitet ein Pyrometer?
- 11) Was versteht man unter der schwarzen, was unter der wahren Temperatur eines Grauen Strahlers?
- 12) Ist die wahre Temperatur größer oder kleiner als die schwarze Temperatur?
- 13) Wie funktioniert ein Strahlungsempfänger mit einer Thermosäule?

## Fehlerrechnung

### 1. Systematische und statistische Fehler

Jede Messung einer physikalischen Größe ist mit einem Fehler verbunden. Es ist daher notwendig bei der Angabe des Messwertes eine Fehlerabschätzung anzugeben.

Man unterscheidet systematische und zufällige, d.h. statistische Fehler. Die erste Fehlertyp hat ihre direkte Ursache im Messsystem und ist häufig daran zu erkennen, dass das Messergebnis grundsätzlich zu groß bzw. zu klein gegenüber theoretischen Werten oder Ergebnissen aus anderen Messarten ist. Um systematische Fehler zu minimalisieren muss das Messsystem, also die Versuchsanordnung geändert werden und/oder es müssen numerische Korrekturen des Messergebnisses angestellt werden.

Ein statistischer Fehler entsteht durch zufällige positive und negative Abweichungen beim Messen. Beispielsweise fällt bei einer Längenbestimmung die zu messende Strecke nicht mit einem Teilstrich eines Maßstabes zusammen und man muss daher Zwischenwerte schätzen. Oder aber der angezeigte (digitale oder analoge) Wert bei einer Spannungsmessung ist zeitlich nicht konstant sondern schwankt um einen mittleren Wert, so dass durch die Schätzung eines zeitlichen Mittelwertes oder durch den Zeitpunkt der Messung ein statistischer Fehler entsteht. Statistische Fehler sind durch eine Wahrscheinlichkeitsverteilung charakterisiert, welche angibt, wie wahrscheinlich eine gemessene Abweichung vom exakten (wahren), d.h. wahrscheinlichsten Wert (Erwartungswert) ist. Je häufiger ein Messvorgang wiederholt wird, desto genauer wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung und damit auch der wahrscheinlichste Wert ermittelt bzw. desto geringer wird dessen statistische Messunsicherheit (s.u.).

### 2. Mittelwert, Standardabweichung, Messunsicherheit

Die beste Schätzung für den wahrscheinlichsten Wert einer Messgröße  $x$  aus  $n$  verschiedenen Einzelmessungen  $x_i$  erhält man durch Bildung des *arithmetischen Mittelwertes*  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Häufig wird in der Literatur bei statistischen Formeln mit Summenausdrücken eine

verkürzte Schreibweise verwendet, die die Summationsgrenzen und den Laufindex unterdrückt:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum x \quad (2)$$

Diese abkürzende Schreibweise wird auch im weiteren Text benutzt.

Ist der Mittelwert  $\bar{x}$  bekannt, so geben die Differenzbeträge  $|x_i - \bar{x}|$  die Abweichungen der einzelnen Messergebnisse vom Mittelwert an und sagen so bereits etwas über die Genauigkeit der Messungen aus. Aus numerischen Gründen nimmt man statt der Differenzbeträge die Differenzquadrate  $(x_i - \bar{x})^2$  und definiert als *Standardabweichung*  $s$ :

$$s = \sqrt{\frac{\sum (\bar{x} - x)^2}{n - 1}}, \quad n > 1 \quad (3)$$

Die Standardabweichung gibt den mittleren statistischen Fehler einer Einzelmessung an. Die (positive) Wurzel wird eingeführt, damit die Größe  $s$  die gleichen Einheiten besitzt wie die Messgröße selbst und somit mit ihr vergleichbar wird. Die Division durch  $n - 1$  statt  $n$  berücksichtigt die Tatsache, dass bei nur einer Messung ( $n = 1$ ) keine statistische Aussage gemacht werden kann, d.h.  $s$  undefiniert ist.

Die in Gleichung (3) angegebene Definitionsgleichung für die Standardabweichung wird in dieser Form im allgemeinen nicht benutzt. Alle gängigen Taschenrechner verwenden die äquivalente Gleichung

$$s = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{1}{n} (\sum x)^2}{n - 1}}, \quad n > 1 \quad (4)$$

da hier nicht die Messergebnisse einzeln gespeichert werden müssen, lediglich deren Summe bzw. Quadratsumme.

Neben der Angabe von Mittelwert und Standardabweichung ist häufig auch die Angabe der statistischen Sicherheit des Mittelwertes von Interesse, da dieser ja lediglich eine Schätzung des Messergebnisses gem. Gl. (2) darstellt, die für eine geringe Anzahl  $n$  von Einzelmessungen sehr unsicher ist. Die *statistische*

Messunsicherheit  $u$  ist ein Maß für den mittleren (statistischen) Fehler des Mittelwertes

$$u = \frac{s}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2 - \frac{1}{n}(\sum x)^2}{n(n-1)}}, \quad n > 1 \quad (5)$$

Während die Standardabweichung  $s$  als Maß für die statistische Streuung der Einzelmessungen  $x_i$  für eine große Anzahl  $n$  gegen einen bestimmten Wert  $> 0$  strebt, wird die statistische Messunsicherheit  $u$  des Mittelwertes  $\bar{x}$  mit wachsender Anzahl  $n$  geringer und strebt für sehr große  $n$  gegen Null.

Sehr oft sind die Messwerte  $x_i$  normalverteilt, d.h. ihre relative Häufigkeit wird durch eine sog. *Normal- oder Gauß'sche Verteilung*  $\varphi(x)$  beschrieben:

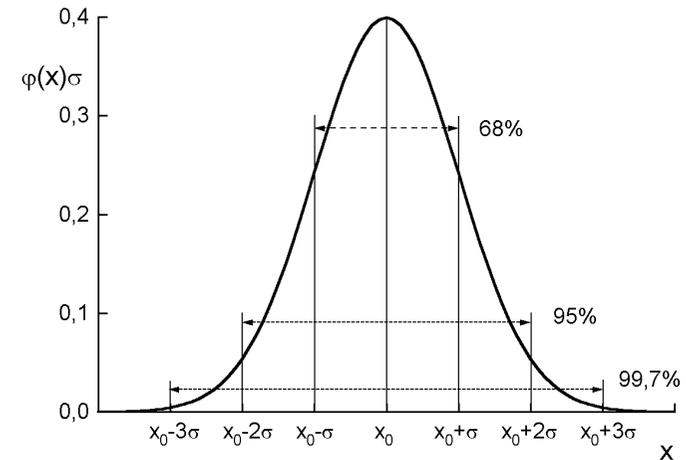
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (6)$$

Hierbei gibt das Integral

$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) dx \quad (7)$$

an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Messwerte  $x_i$  (für eine große Anzahl der Messungen,  $n \rightarrow \infty$ ) im Intervall  $(x_1, x_2)$  liegen. Der Verlauf der Funktion  $\varphi(x)$  ist, wie Abb. 1. zeigt, symmetrisch um den wahrscheinlichsten Wert  $x_0$  (den Erwartungswert) und hat die Form einer Glockenkurve mit der Halbwertsbreite von etwas mehr als  $2\sigma$ .

Für sehr große  $n$  strebt der aus der Messreihe bestimmte Mittelwert  $\bar{x}$  gegen den Wert  $x_0$  der Funktion  $\varphi(x)$ , die Standardabweichung  $s$  gegen den Wert  $\sigma$ . Die Wahrscheinlichkeit, dass das Ergebnis  $x_i$  einer Einzelmessung im Intervall  $\bar{x} \pm s$ , d.h.  $x_0 \pm \sigma$  liegt, beträgt mit Gl. (7) ca. 68 %, für das Intervall  $x_0 \pm 2\sigma$  ca. 95 % und für  $x_0 \pm 3\sigma$  schon 99,7 %. Ähnliches gilt für die statistische Messunsicherheit  $u$  des Mittelwertes: Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert  $x_0$  im sog. (einfachen)



**Abb.1:** Funktion  $\varphi(x)$  der Gauß'schen oder Normalverteilung mit wahrscheinlichstem Wert  $x_0$  und den Bereichen  $x_0 \pm \sigma$ ,  $x_0 \pm 2\sigma$  und  $x_0 \pm 3\sigma$  für die rel. Häufigkeit eines Messwertes  $x_i$  von 68 %, 95 % und 99,7 %

Vertrauensbereich  $\bar{x} \pm u$  liegt, beträgt ca. 68 %, für den zwei- bzw. dreifachen Vertrauensbereich  $\bar{x} \pm 2u$  bzw.  $\bar{x} \pm 3u$  schon etwa 95 % bzw. 99,7 %.

Zu beachten ist jedoch, dass die Angabe einer statistischen Messunsicherheit bzw. eines statistischen Vertrauensbereiches für den Mittelwert  $\bar{x}$  einer Messreihe nur in Verbindung mit dem Schätzwert für mögliche systematische Fehler sinnvoll ist. Der insgesamt resultierende Fehler eines Messergebnisses ist immer die Summe der Beträge aus systematischen und unsystematischen Fehlern. So ist es z.B. nicht sinnvoll, eine Messung beliebig oft zu wiederholen, bloß um die statistische Messunsicherheit zu reduzieren, wenn gleichzeitig der Schätzwert für systematische Fehler viel größer ist.

**Beispiel 1:** Im Versuch B10 (Versuch mit Röntgenstrahlen) wird die Gitterkonstante  $d$  von NaCl aus der Bragg Reflexion mithilfe der Braggschen Gleichung bestimmt:

$$n\lambda = 2d \sin\theta_n,$$

wobei die Wellenlänge  $\lambda = 154$  pm und die gemessenen Bragg Winkel  $\theta_n$  ( $n = 1$ ,

2, 3) benutzt werden.

Typische Werte sind in der nachfolgenden Tabelle gegeben.

n	$\theta_n$ (°)	$d_n$ (pm)
1	16,0	279,4
2	33,2	281,3
3	55,15	281,5

Hieraus ergibt sich:

mit Gl. (2) der Mittelwert  $d = 280,73$  pm,

mit Gl.(4) die Standard Abweichung  $s = 1,16$  pm,

mit Gl.(5) die statistische Unsicherheit  $u$  des Mittelwertes  $d$  ,  $u = 0,67$  pm,

schließlich für das Endergebnis:

$$d = (280,73 \pm 0,67) \text{ pm} = 280,73 \text{ pm} \pm 0,2 \% ,$$

wenn statistische oder systematische Fehler der gemessenen Winkel  $\theta_n$  vernachlässigt werden. (Anderenfalls siehe nachfolgendes Beispiel 2!)

**Bemerkung:** Jeder bestimmte Fehler sollte nicht mehr als 2 Dezimalstellen haben. Das Endergebnis ist entsprechend auf- oder abzurunden. Sehr oft macht es gar keinen Sinn und täuscht nur Genauigkeit vor, wenn die vielen Dezimalstellen der Taschenrechneranzeige angegeben werden.

**Zusätzliche Bemerkung:** Der Vergleich des Messergebnisses für  $d$  wie oben angegeben mit dem Literaturwert  $d_{\text{NaCl}} = 282,0$  pm und Messergebnissen, die mit anderen experimentellen Aufbauten im Praktikum erzielt wurden, lässt schließen, dass ein systematischer Fehler bei der Bestimmung von  $\theta_n$  von ca. 0,5 % infolge ungenauer Winkeljustierung vorliegt, der auch vom jeweiligen Versuchsaufbau abhängt. In diesem Fall ist der oben angegebene Wert für die statistische Unsicherheit  $u$  überhaupt nicht signifikant für die Abschätzung des (wahren) Fehlers von  $d$ . Wird  $u$  durch die Standardabweichung  $s$  ersetzt, kann das Ergebnis

$$d = (280,73 \pm 1,16) \text{ pm} = 280,73 \text{ pm} \pm 0,4 \%$$

zwar besser den aktuellen Fehler von  $d$  beschreiben, das Problem der Fehlerabschätzung durch diese Angabe ist jedoch prinzipiell nicht gelöst, d.h. der systematische Fehler, der in diesem Falle vorliegt, bleibt unbestimmt.

Eine Möglichkeit der Problemlösung besteht mit der Annahme, dass ein fester (konstanter) systematischer Winkelfehler  $\Delta\theta^s$  infolge mangelhafter Justierung von Kristall und Detektor vorliegt. Dieser Fehler wird in der Braggschen Gleichung bei der Bestimmung von  $\theta$  aus den experimentellen Daten berücksichtigt, indem für den Winkel  $\theta = \theta^m + \Delta\theta^s$  angesetzt wird, wobei  $\theta^m$  der gemessene Wert ist. Da im vorliegenden Experiment nicht die Gültigkeit der Braggschen Gleichung bewiesen sondern mit ihr die Gitterkonstante  $d$  bestimmt werden soll, können wir annehmen, dass die Braggsche Gleichung in jeder Ordnung  $n$  gültig,  $d$  also unabhängig von  $n$  ist. Aus der Bedingung, dass die Braggsche Gleichung für  $n = 1$  und  $2$  zum gleichen Ergebnis für  $d$  führt, kann  $\Delta\theta^s$  mit den Werten aus der oben angegebenen Tabelle berechnet werden:

$$\tan \Delta\theta^s = \frac{\sin \theta_2^m - 2 \sin \theta_1^m}{2 \cos \theta_1^m - \cos \theta_2^m} , \quad \Delta\theta^s = - 0,2^\circ .$$

Mit dieser Winkelkorrektur  $\Delta\theta^s$  für  $\theta^m$  erhält man  $d_1 = 282,8$  pm und  $d_2 = 282,8$  pm (d.h.  $d_1 = d_2$ ) und  $d_3 = 282,2$  pm. Damit ist der korrigierte Mittelwert für  $d$ :

$$d = 282,6 \text{ pm} ,$$

in besserer Übereinstimmung mit dem Literaturwert  $d_{\text{NaCl}} = 282,0$  pm als der ohne Korrektur ermittelte Wert  $d = 280,73$  pm.

### 3. Fehlerfortpflanzung

Im allgemeinen ist zur Bestimmung einer physikalischen Größe  $y$  die Messung mehrerer einzelner (verschiedener) Parameter  $x_1, x_2, \dots$  erforderlich. Es stellt sich dann das Problem, wie die einzelnen Fehler  $\Delta x_i$  bei der Messung der Parameter die Unsicherheit  $\Delta y$  bei der Bestimmung der gesuchten Größe  $y$  beeinflussen. Für nicht zu große Fehler  $\Delta x_i$  gilt in 1. Näherung:

$$\Delta y \Big|_{x_{j \neq i} = \text{const}} = \frac{\partial y}{\partial x_i} \Delta x_i \quad (8)$$

Als Abschätzung für den größtmöglichen Fehler unter Berücksichtigung aller Einzelfehler wird folgende Beziehung definiert:

$$(\Delta y)_{\max} = \left| \frac{\partial y}{\partial x_1} \Delta x_1 \right| + \left| \frac{\partial y}{\partial x_2} \Delta x_2 \right| + \dots \quad (9)$$

**Beispiel 2:** Im Versuch B10 (Experiment mit Röntgenstrahlen, siehe auch Beispiel 1) wird die Gitterkonstante  $d$  von NaCl aus der Bragg Reflexion bestimmt, indem die Beziehungen

$$n\lambda = 2d_n \sin \theta_n, \quad d = \frac{1}{3} \sum d_n = \frac{\lambda}{6} \left( \frac{1}{\sin \theta_1} + \frac{2}{\sin \theta_2} + \frac{3}{\sin \theta_3} \right),$$

mit der Wellenlänge  $\lambda = 154$  pm und den gemessenen Bragg Winkeln  $\theta_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) benutzt werden. Mit der Annahme eines statistischen Fehlers  $\Delta\theta = \pm 0,25^\circ = \pm 0,0044$  von jedem gemessenen Winkel  $\theta_n$  ist der maximale statistische Fehler  $\Delta d_{\max}$  entsprechen Gl.(9)

$$\begin{aligned} (\Delta d)_{\max} &= \left| \frac{\partial d}{\partial \theta_1} \Delta \theta_1 \right| + \left| \frac{\partial d}{\partial \theta_2} \Delta \theta_2 \right| + \left| \frac{\partial d}{\partial \theta_3} \Delta \theta_3 \right| \\ &= \frac{\lambda \Delta \theta}{6} \left( \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} + \frac{2 \cos \theta_2}{\sin^2 \theta_2} + \frac{3 \cos \theta_3}{\sin^2 \theta_3} \right). \end{aligned}$$

Mit den  $\theta$ -Werten in Beispiel 1 erhalten wir

$$(\Delta d)_{\max} = 0,112 (12,65 + 5,58 + 2,55) \text{ pm} = 2,33 \text{ pm}; \quad (\Delta d)_{\max} / d = 0,83 \text{ \%}.$$

Beachten Sie, dass der Fehlerbeitrag des Bragg-Winkels  $\theta_1$  der größte ist, da der Fehler  $\Delta\theta_1/\theta_1$  der größte ist, in Übereinstimmung mit dem Ergebnis in der Wertetabelle von Beispiel 1, wo die Differenz  $(d_1 - d_{\text{NaCl}})$  auch die größte ist.

**Beispiel 3:** Im Versuch B8 (Bestimmung der spezifischen Ladung  $e/m$  des Elektrons) wird das Verhältnis  $e/m$  aus Messungen der Beschleunigungsspannung  $U$  und des Stroms  $I$  durch die Magnetspulen mit Radius  $R$  für einen kreisförmigen

Elektronenstrahl mit Radius  $r$  bestimmt.

$$\frac{e}{m} = 2 \left( \frac{R}{0.715 \mu_0 n} \right)^2 \frac{U}{(rI)^2}$$

Da  $e/m$  ein Produkt der Variablen  $R$ ,  $U$ ,  $r$  und  $I$  in verschiedenen Potenzen darstellt, ist der Ausdruck für den *größtmöglichen relativen Fehler* von  $e/m$  ziemlich einfach. Mit den Einzelfehlern  $\Delta R$ ,  $\Delta U$ ,  $\Delta r$  und  $\Delta I$  ist der größtmögliche relative Fehler von  $e/m$

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\Delta(e/m)}{(e/m)} \right]_{\max} &= \frac{1}{e/m} \left( \left| \frac{\partial(e/m)}{\partial R} \Delta R \right| + \left| \frac{\partial(e/m)}{\partial U} \Delta U \right| + \left| \frac{\partial(e/m)}{\partial r} \Delta r \right| + \left| \frac{\partial(e/m)}{\partial I} \Delta I \right| \right) \\ &= \left| \frac{2\Delta R}{R} \right| + \left| \frac{\Delta U}{U} \right| + \left| \frac{2\Delta r}{r} \right| + \left| \frac{2\Delta I}{I} \right|. \end{aligned}$$

Typische Zahlenwerte für Fehler und Messergebnisse sind

$\Delta R = \pm 2 \text{ mm}$	$R = 20 \text{ cm}$	$\Delta R/R = 0,01$
$\Delta U = \pm 6 \text{ V}$	$U = 200 \text{ V}$	$\Delta U/U = 0,03$
$\Delta r = \pm 0,5 \text{ mm}$	$r = 3 \text{ cm}$	$\Delta r/r = 0,017$
$\Delta I = \pm 90 \text{ mA}$	$I = 2 \text{ A}$	$\Delta I/I = 0,045$

Dies ergibt

$$\left[ \frac{\Delta(e/m)}{(e/m)} \right]_{\max} = 0,02 + 0,03 + 0,034 + 0,09 = 0,174.$$

Bei der Berechnung des größten Fehlers nach der Fehlerfortpflanzung sollte man den Einfluss eines jeden Parameters diskutieren. Im obigen Beispiel sieht man, dass die Fehler in der Strommessung den größten Einfluss auf die Genauigkeit des Wertes für  $e/m$  hat.

#### 4. Ausgleichsgeraden

Oft soll in der Physik ein theoretisch begründeter Zusammenhang zwischen zwei Größen  $x$  und  $y$  im Experiment bestätigt werden. Nicht selten besteht zwischen den Größen  $x$  und  $y$  ein linearer Zusammenhang, d.h.

$$y = a + bx \quad (10)$$

Da bekanntlich jede Messung mit einem Fehler behaftet ist, werden die Messwerte  $(x_i, y_i)$  bei einer graphischen Darstellung  $y_i = f(x_i)$  mehr oder weniger um eine Gerade streuen. Gesucht ist diejenige Gerade, die die fehlerbedingten Abweichungen bestmöglich ausgleicht. Diese kann im einfachsten Fall durch eine *visuelle Schätzung*, d.h. das Zeichnen einer geeigneten Geraden mit einem Lineal gefunden werden. Objektiv lassen sich die Konstanten  $a$  und  $b$  der Geradengleichung nach der *Methode der kleinsten Fehlerquadrate* berechnen. Man untersucht, für welche Konstanten  $a$  und  $b$  der Ausdruck:

$$\sum (a + bx - y)^2$$

ein (absolutes) Minimum einnimmt. Die Konstanten erfüllen dann die Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum (a + bx - y)^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \sum (a + bx - y)^2 = 0 \quad (11)$$

Die Differentiation liefert das Gleichungssystem:

$$an + b \sum x = \sum y, \quad a \sum x + b \sum x^2 = \sum xy \quad (12)$$

mit der Lösung:

$$a = \frac{\sum y \sum x^2 - \sum x \sum xy}{n \sum x^2 - (\sum x)^2}, \quad b = \frac{n \sum xy - \sum x \sum y}{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \quad (13)$$

**Beachte:** Für eine Ausgleichsgerade, welche durch den Koordinatenursprung verlaufen soll ( $a = 0$ ), d.h.  $y = b x$  lautet die entsprechende Lösung:

$$b = \frac{\sum xy}{\sum x^2} \quad (14)$$

Das Verfahren der kleinsten Fehlerquadrate wird fast immer bei der Suche des besten Fits angewendet. Die Geradengleichung ist (nach der Mittelwertbildung) der einfachste und gebräuchlichste Fall und daher auf fast jedem Taschenrechner verfügbar.

Der häufig benutzte Regressionskoeffizient  $R^2$  ist mit Vorsicht zu verwenden. Mit ihm kann die Güte der Fitfunktion mehrerer unabhängiger Messreihen miteinander verglichen werden. Der Regressionskoeffizient von nur einer Messreihe hat in physikalischer Hinsicht keine direkte Aussagekraft.

In Fällen, in denen die Größe  $Y(X)$  nicht linear von  $X$  abhängt, kann oft der gesuchte formale Zusammenhang durch geeignete Transformation  $y(X,Y), x(X,Y)$  in eine Geradengleichung  $y = a + bx$  übergeführt werden, z.B.:

$$Y = AX^B \quad \begin{array}{ll} y = \ln(Y) & x = \ln(X) \\ a = \ln(A) & b = B \end{array}$$

$$Y = A \exp(BX) \quad \begin{array}{ll} y = \ln(Y) & x = X \\ a = \ln(A) & b = B \end{array}$$

$$Y = AX + BX^3 \quad \begin{array}{ll} y = Y/X & x = X^2 \\ a = A & b = B \end{array}$$