Die Beziehung zwischen ordinal skalierten Variablen

Schüler	Englisch	Deutsch
a	5	5
b	4 besser	4 besser

Konkordante Paare: Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf X und Y dieselbe Rang-ordnung haben.

Schüler	Englisch	Deutsch
c	1	3
d	2 schlechter	2 besser

Diskordante Paare: Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf X und Y eine unterschiedliche Rangordnung haben.

Die Beziehung zwischen ordinal skalierten Variablen

Schüler	Englisch	Deutsch
a	5	5
b	4	4
c	1	3
d	2	2
e	3	1

Für jedes der 5 Individuen gibt es 4 andere, mit denen es gepaart werden kann, insgesamt 5*4 oder allgemein N(N-1) Paare. Doppelte Paare werden ausgeschaltet:

also $\frac{N(N-1)}{2}$ = Anzahl der Paare

Paar	**Rangordnung im Hinblick auf X**	**Rangordnung im Hinblick auf Y**	**Paartyp**
a,b	a>b	a>b	konkordant
a,c	a>c	a>c	“
a,d	a>d	a>d	“
a,e	a>e	a>e	“
b,c	b>c	b>c	“
b,d	b>d	b>d	“
b,e	b>e	b>e	“
c,d	c<d	c>d	diskordant
c,e	c<e	c>e	“
d,e	d<e	d>e	“

Nc => Anzahl der konkordanten Paare
Nd => “ “ diskordanten Paare

Tau-a(τ_a)

$$\tau_a = \frac{N_c - N_d}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{7-3}{\frac{5(5-1)}{2}} = 0{,}4$$

wobei:	N_c	Anzahl der konkordanten Paare
	N_d	Anzahl der diskordanten Paare
	$\frac{N(N-1)}{2}$	Gesamtheit aller möglichen Paare

Das Assoziationsmaß Tau-a ist definiert als das Verhältnis des Übergewichtes konkordanter und diskordanter Paare zur Gesamtzahl der möglichen Paare.

Tau-a kann Werte zwischen -1 und +1 annehmen.

=	0	=>	Anzahl der konkordanten und diskordanten Paare ist gleich
=	-1	=>	nur diskordante Paare
=	+1	=>	nur konkordante Paare

Aufgabe 1:

Schüler	Mathenote	Physiknote
A	2	1
B	3	2
C	1	3

Berechnen Sie τ_a (Tau-a)!

Die Erscheinungsformen von Paaren

Konkordante Paare: Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf X und Y dieselbe Rangordnung haben.

Diskordante Paare: Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf X und Y eine unterschiedliche Rangordnung haben.

Beispiel für „tied on X“

Schüler	**Englisch**	**Deutsch**
f	3	2
g	3	4

T_x => Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf X verknüpft, jedoch im Hinblick auf Y verschieden sein.

Beispiel für „tied on Y“

Schüler	Englisch	Deutsch
h	5	4
i	3	4

T_y **=>** Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf Y verknüpft und im Hinblick auf X verschieden sein.

Beispiel für „tied on X und Y“

Schüler	Englisch	Deutsch
j	1	2
k	1	2

T_{xy} **=>** Die Untersuchungseinheiten können im Hinblick auf X und Y verknüpft sein.

$$\frac{N(N-1)}{2} = N_c + N_d + T_x + T_y + T_{xy}$$

Tabelle 1: Einstellung der Bewohner Mallorcas gegenüber deutschen Touristen

Verhalten gegenüber deutschen Touristen	negativ	neutral	positiv
negativ	7	6	4
positiv	7	8	11
	14	14	15

Generelles Schema einer 2 x 3 – Tabelle:

	X_1	X_2	X_3
Y_1	a	b	c
Y_2	d	e	f

Die Berechnung der Paare

Die Anzahl der konkordanten Paare:

	x_1	x_2	x_3
y_1	a	b	c
y_2	d	e	f

a (e+f) + b (f)

Die Anzahl der diskordanten Paare:

	x_1	x_2	x_3
y_1	a	b	c
y_2	d	e	f

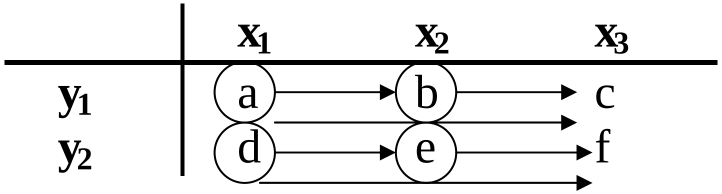
c (d + e) + b (d)

Die Anzahl der x-verknüpften Paare:

	x_1	x_2	x_3
y_1	a	b	c
y_2	d	e	f

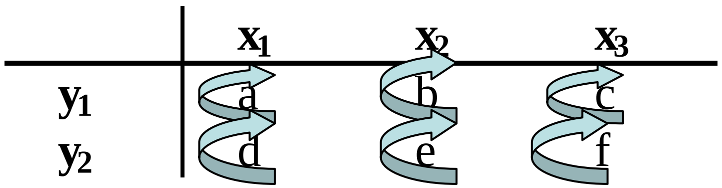
ad + be + cf

Die Anzahl der y-verknüpften Paare:



$$a\,(b + c) + b\,(c) + d\,(e + f) + e\,(f)$$

Die Anzahl der x- und y- verknüpften Paare:



$$\frac{1}{2}\,[a\,(a-1) + b\,(b-1) + c\,(c-1) + d\,(d-1) + e\,(e-1) + f\,(f-1)]$$

Tabelle II:

Verteilung der Paare in Tabelle I:

Paartyp	Symbol	Anzahl der Paare
konkordant	N_c	a (e+f) + b (f) 7 (8+11) 6 (11)=199
diskordant	N_d	c (d+e) b(d) 4 (7+8) 6 (7) = 102
verknüpft in x	T_x	ad +be + cf (7)(7)+(6)(8)+(4)(11)=141
verknüpft in Y	T_y	a(b+c)+bc+d(e+f)+ef 7(6+4)+(6)(4)+7(8+11)+(8)(11)=315
verknüpft in X und y	T_{xy}	$\frac{1}{2}$ (a(a-1)+b(b-1)+c(c-1)+d(d-1)+e(e-1)+f(f-1)) $\frac{1}{2}$ (7(7-1)+6(6-1)+4(4-1)+7(7-1)+8(8-1)+11(11-1))=146
mögliche Paare insgesamt		$\frac{N(N-1)}{2}=\frac{43(43-1)}{2}=903$

Zu Tabelle I.
Beziehung zwischen Einstellung und Verhaltensweisen mallorcanischer Bevölkerung gegenüber deutschen Touristen

$$N_c = 199(konkordant)$$

$$N_d = 102(diskordant)$$

$$T_x = 141(x - verknüpft)$$

$$T_y = 315(y - verknüpft$$

$$T_{xy} = 146(\text{x und y - verknüpft})$$

$$\frac{N(N-1)}{2} = 903$$

Berechnung von τ_a (Tau-a)

$$\tau_a = \frac{N_c - N_d}{\frac{N(N-1)}{2}} = \frac{199 - 102}{903} = 0{,}107$$

Berechnung von τ_b (Tau-b)

$$\tau_b = \frac{N_c - N_d}{\sqrt{(N_c + N_d + T_x)(N_c + N_d + T_y)}}$$

$$\tau_b = \frac{199 - 102}{\sqrt{(199 + 102 + 141)(199 + 102 + 315)}}$$

$$\tau_b = \frac{97}{\sqrt{442 * 616}} = \frac{97}{522} = 0{,}186$$

Gamma (γ)

$$\gamma = \frac{N_c - N_d}{N_c + N_d} = \frac{199 - 102}{199 + 102} = 0{,}32$$

Aufgabe 2:

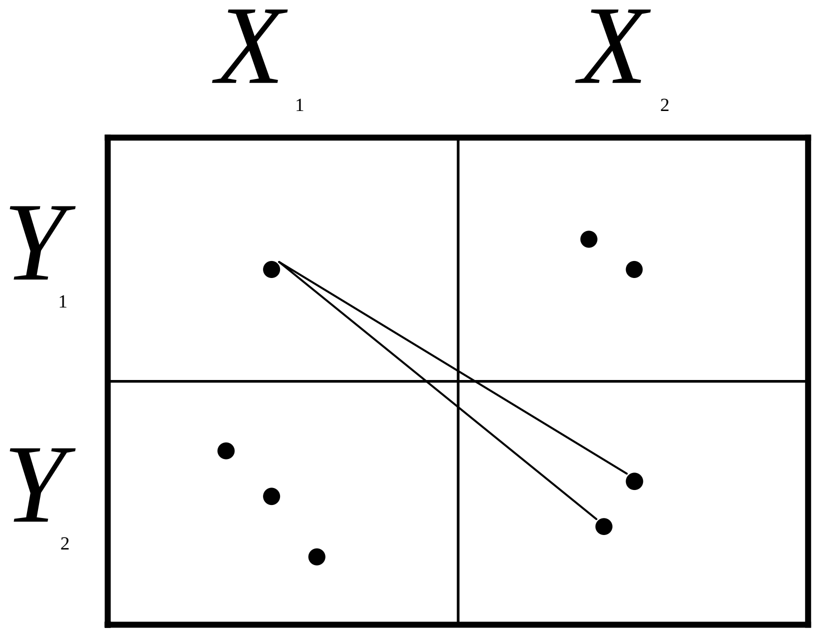
Schüler	Mathenote	Physiknote
A	2	3
B	3	3
C	1	1

Berechnen Sie τ_b (Tau-b)!

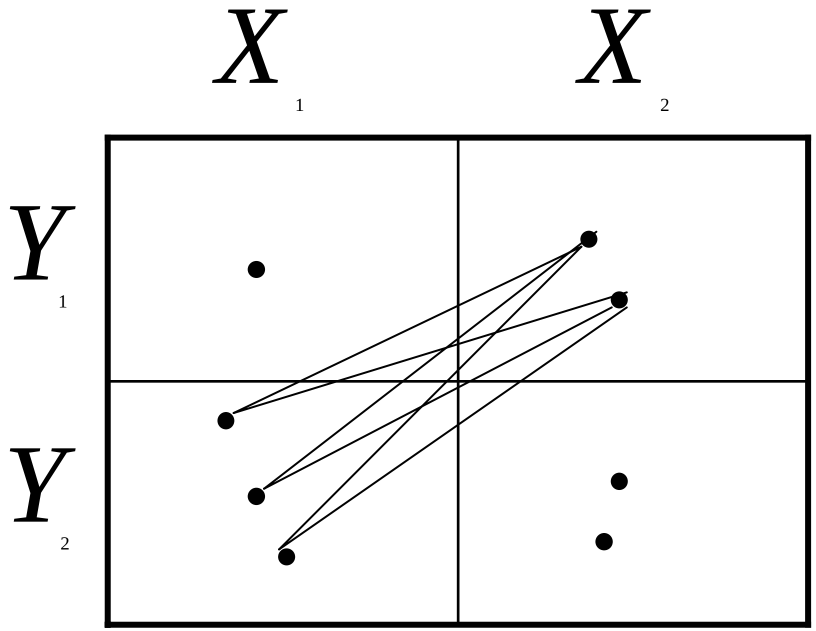
Die Verteilung der Paare in einer 2 x 2-Tabelle mit bestimmten Zellenbesetzungen

	X_1	X_2	
Y_1	1	2	3
Y_2	3	2	5
	4	4	8

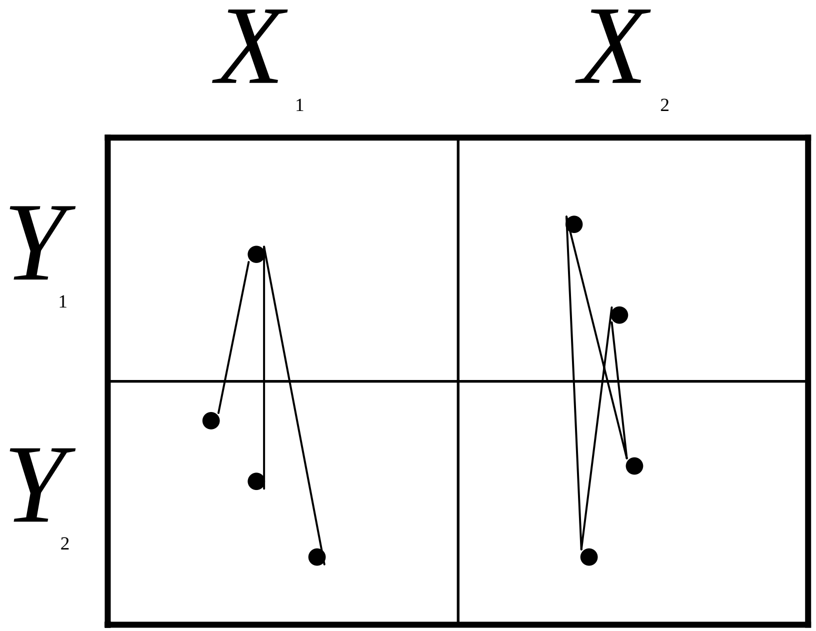
$$\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2} = \frac{8(8-1)}{2} = 28$$



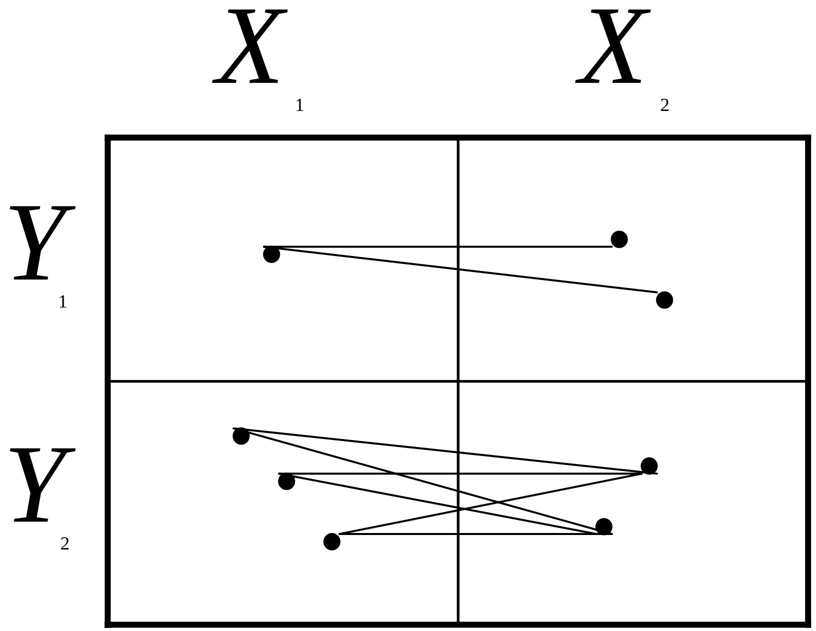
$$N_c = (1)(2) = 2$$



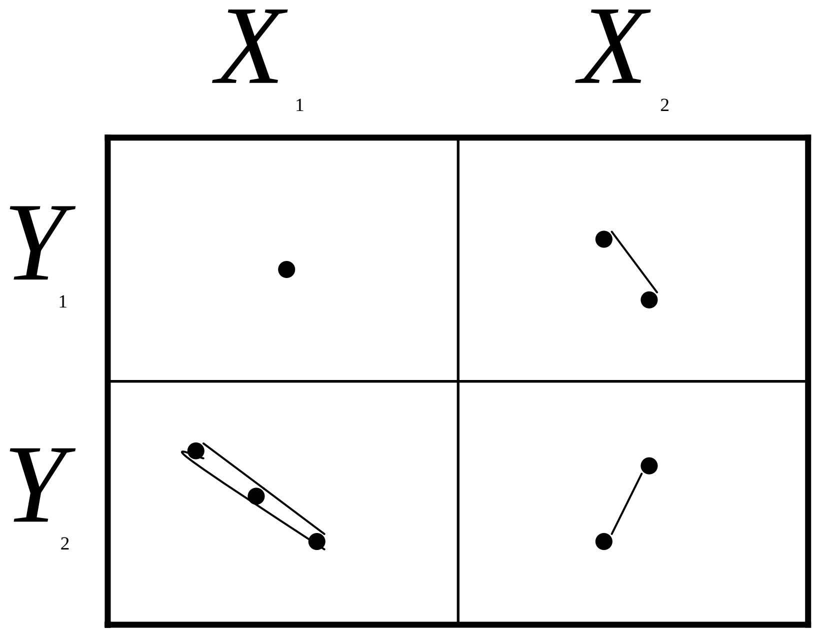
$$N_d = (2)(3) = 6$$



$$T_x = (1)(3) + (2)(2) = 7$$



$$T_y = (1)(2) + (3)(2) = 8$$



Die Anzahl der Paare in Zelle 21 ist

$$\frac{n(n-1)}{2} = \frac{3(3-1)}{2} = 3$$

Und in Zelle 12 und Zelle 22 je

$$\frac{2(2-1)}{2} = 1$$

Folglich ist

$$T_{xy} = 1 + 3 + 1 = 5$$

$$\frac{N(N-1)}{2} = N_c + N_d + T_x + T_y + T_{xy} = 2 + 6 + 7 + 8 + 5 = 28$$

Spearman's (rho) r_s oder Rangkorrelationskoeffizient

Der Rangkorrelationskoeffizient von Spearman (auch: Spearmans rho) beschreibt den monotonen Zusammenhang zwischen zwei auf ein Kollektiv bezogenen Rangreihen bzw. zwischen zwei ordinal skalierten Variablen (Merkmalen)

Die Formel für den Koeffizienten r_s ergibt sich direkt aus der Produktmomentkorrelation, wenn man die Rangplätze wie Messwerte behandelt; d. h. r_s ist mit r identisch, wenn beide die Werte 1 bis N annehmen können (N: Anzahl der Untersuchungseinheiten im Kollektiv).

$$r_s = 1 - \frac{6 \Sigma d_i^2}{N(N^2 - 1)}$$

Wobei: N Anzahl der rangplazierten (ordinal skalierten) Untersuchungseinheiten

d_i Differenz zwischen den Rangplätzen, die die i-te Untersuchungseinheit bezüglich der Variablen X und Y aufweist, also $x_i - y_i$

Σd_i^2 Summe der quadrierten Rangplatzdifferenzen, also $\Sigma (x_i - y_i)^2$

Beispiel:
Zwei Kunsthistoriker bringen 12 Gemälde nach ihrem Wert in eine Rangreihe:

Kunstwerk	Urteil des Gutachters 1 x_i (Rangplatz)	Urteil des Gutachters 2 y_i (Rangplatz)	$d_i = \Sigma(x_i - y_i)$	$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$
A	8	6	2	4
B	7	9	-2	4
C	3	1	2	4
D	11	12	-1	1
E	4	5	-1	1
F	1	4	-3	9
G	5	8	-3	9
H	6	3	3	9
I	10	11	-1	1
J	2	2	0	0
K	12	10	2	4
L	9	7	2	4
			$\Sigma\, d_i = 0$	$\Sigma\, d_i^2 = 50$

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma\, d_i^2}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6\Sigma * 50}{12(144 - 1)} = 1 - 0{,}17 = 0{,}83$$

r_s liegt immer zwischen +1 (perfekt positive Rangkorrelation) und -1 (perfekt negative Rangkorrelation).

Beispiel für eine perfekt positive Rangkorrelation

Kunstwerk	Urteil des Gutachters 1 x_i (Rangplatz)	Urteil des Gutachters 2 y_i (Rangplatz)	$d_i = \Sigma(x_i - y_i)$	$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$
a	1 →	1	0	0
b	2 →	2	0	0
c	3 →	3	0	0
d	4 →	4	0	0
e	5 →	5	0	0
f	6 →	6	0	0
g	7 →	7	0	0
			$\Sigma d_i = 0$	$\Sigma d_i^2 = 0$

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma d_i^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6\Sigma * 0}{7(49-1)} = 1 - 0 = 1$$

Beispiel für eine perfekt negative Rangkorrelation

Kunstwerk	Urteil des Gutachters 3 x_i (Rangplatz)	Urteil des Gutachters 4 y_i (Rangplatz)	$d_i = \Sigma(x_i - y_i)$	$d_i^2 = (x_i - y_i)^2$
a	1	7	-6	36
b	2	6	-4	16
c	3	5	-2	4
d	4	4	0	0
e	5	3	2	4
f	6	2	4	16
g	7	1	6	36
			$\Sigma\, d_i = 0$	$\Sigma\, d_i^2 = 112$

$$r_s = 1 - \frac{6\Sigma\, d_i^2}{N(N^2-1)} = 1 - \frac{6\Sigma * 112}{7(49-1)} = 1 - 2 = -1$$

Beispiel für eine Rangkorrelation mit quasi keinem Zusammenhang

Kunstwerk	Urteil des Gutachters 3 x_i (Rangplatz)	Urteil des Gutachters 4 y_i (Rangplatz)	$d_i = \Sigma(x_i - y_i)$	$d_i^{\,2} = (x_i - y_i)^2$
a	1	3	-2	4
b	2	6	-4	16
c	3	1	2	4
d	4	7	3	9
e	5	4	1	1
f	6	2	4	16
g	7	5	2	4
			$\Sigma\, d_i = 0$	$\Sigma\, d_i^{\,2} = 54$

$$r_s = 1 - \frac{6 \Sigma\, d_i^{\,2}}{N(N^2 - 1)} = 1 - \frac{6 * 54}{7(49 - 1)} = 1 - 0{,}96 = 0{,}04$$

Umwandlung der Messwerte in Rangplätze

Schüler	Deutschnote	Rangplatz
A	2	3
B	4	9,5
C	2	3
D	3	6,5
E	3	6,5
F	2	3
G	1	1
H	3	6,5
I	4	9,5
J	3	6,5

Weisen mehrere Objekte die gleiche Merkmalsausprägung auf (Ties), dann wird aus den Rangplätzen das arithmetische Mittel gebildet.

Mittelwertbildung der Rangplätze

Schüler (geordnet)	Deutschnote	Verbundene Ränge	Ranglatz
G	1		1
A	2	2+3+4/3= 9/3=3	3
C	2		3
F	2		3
D	3	5+6+7+8/4= 26/4=6,5	6,5
E	3		6,5
H	3		6,5
J	3		6,5
B	4	9+10/2= 19/2=9,5	9,5
I	4		9,5

Allgemeine Vorgehensweise:

1. Wenn nötig: Umwandlung der Messwerte in Rangplätze
2. Rangplatzdifferenzen bilden
3. alle Differenzen quadrieren und aufsummieren
4. Berechnung von r_s