UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abt. Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Lehrstuhl Steuerung, Regelung und Systemdynamik
Systemdynamik (PO04/PO08/DPO04 und früher) 30. Juli 2010

Einlesezeit

Für die Durchsicht der Klausur wird eine Einlesezeit von **10 Minuten** gewährt. Während dieser Zeitdauer ist es Ihnen **nicht** gestattet, mit der Bearbeitung der Aufgaben zu beginnen. Dies bedeutet konkret, dass sich während der gesamten Dauer der Einlesezeit keinerlei Schreibgeräte (Stifte, Füller, etc.) auf dem Tisch befinden dürfen sowie die Nutzung von mitgeführten Unterlagen respektive (elektronischer) Wörterbücher bzw. tragbarer Translater strengstens untersagt ist. Nehmen Sie Ihre Schreibgeräte und Unterlagen erst **dann** zur Hand, wenn die Prüfungsaufsicht auf das Ende der Einlesezeit hingewiesen hat und füllen Sie zunächst das Deckblatt **vollständig** aus.

Viel Erfolg!

NAME	
VORNAME	
MATRIKEL-NR.	
TISCH-NR.	

Angaben zum Studiengang

<table>
<tr><td rowspan="2">☐ MB</td><td>☐ DPO</td><td>☐ Einzelfachprüfung Schiffstechnik
☐ Einzelfachprüfung Regelungstechnik
☐ Fachprüfung Regelungstechnik/Mechatronik</td></tr>
<tr><td>☐ Bachelor</td><td>☐ PO 04
☐ PO 08</td></tr>
<tr><td>☐ WI Bachelor</td><td colspan="2">☐ PO 04
☐ PO 08</td></tr>
<tr><td colspan="3">☐ Weitere (WI Master; Auflage; Angewandte Materialt.; etc.)</td></tr>
</table>

Klausurunterlagen

Ich versichere hiermit, dass ich sämtliche für die Durchführung der Klausur vorgesehenen Unterlagen erhalten, und dass ich meine Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung unerlaubter Hilfsmittel und sonstiger unlauterer Mittel angefertigt habe. Ich weiß, dass ein Bekanntwerden solcher Umstände auch nachträglich zum Ausschluss von der Prüfung führt. Ich versichere weiter, dass ich sämtliche mir überlassenen Arbeitsunterlagen sowie meine Lösung vollständig zurück gegeben habe. Die Abgabe meiner Arbeit wurde in der Teilnehmerliste von Aufsichtsführenden schriftlich vermerkt.

Duisburg, den ________ ______________________________

(Unterschrift der/des Studierenden)

Falls Klausurunterlagen vorzeitig abgegeben: ____________Uhr

Hinweise

Achtung: Schreiben Sie Ihre Antwort für ALLE Aufgaben
direkt unter die entsprechende Aufgabe in den Aufgabenbogen!

Maximal erreichbare Punktzahl:	40
Mindestprozentzahl für die Note 1,0 der Gesamtprüfung:	95%
Mindestprozentzahl für die Note 4,0 der Gesamtprüfung:	50%

Bewertungstabelle

Aufgabe 1	
Aufgabe 2	
Gesamtpunktzahl	
Angehobene Punktzahl	
%	
Bewertung gem. PO in Ziffern	

____

(Datum und Unterschrift 1. Prüfer, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Söffker)

____

(Datum und Unterschrift 2. Prüfer, PD Dr.-Ing. Wend)

____

(Datum und Unterschrift des für die Prüfung verantwortlichen Prüfers, Söffker)

Fachnote gemäß Prüfungsordnung:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5,0
sehr gut		gut			befriedigend			ausreichend		mangelhaft

Bemerkung: ____

Aufgabe 1 (15 Punkte)

a) (3 Punkte)
Was ist ein System? Was ist ein Modell?

System: Durch einen Zweck (z.B hinsichtlich technisch/physikalischer Zusammenhänge) abgegrenzter Ausschnitt der Realität. Das System steht mit seiner Umwelt in Wechselwirkung, wobei aus der Umwelt Eingangsgrößen (EG) auf das System einwirken und Ausgangsgrößen (AG) vom System auf die Umwelt wirken.

Modell: Ein Modell stellt die vereinfachte Abbildung eines realen Systems dar.

b) (3 Punkte)
Wozu dient die theoretische Modellbildung technischer Systeme?

Bei der theoretischen Modellbildung werden die Systemgleichungen durch Anwendung physikalischer Grundgesetze hergeleitet, wobei die quantitativen Informationen aus Natur- bzw. Materialkonstanten, geometrischen Abmessungen und empirischen Zusammenhängen gewonnen werden.

(Alternativ: Sie dient der Analyse technischer Systeme.)

c) (3 Punkte)
Auf der Eingangsseite eines Systems liegt ein harmonisches Eingangssignal mit der Amplitude $A = 1$ und der Frequenz $\omega = 5$ an. Auf der Ausgangsseite wird im stationären Zustand ein harmonisches Ausgangssignal mit der Amplitude $A = 5$ und der Frequenz $\omega = 5$ beobachtet. Warum ist das System stabil?

Begrenztes Ausgangssignal (mit gleichbleibender Amplitude)
bei begrenztem Eingang (BIBO-Stabilität) oder
(E/A -Stabilität)

(Alternative: Proportionales System mit $k=5$
=> asymptotisch stabil)

☐

d) (3 Punkte)
Auf der Eingangsseite eines Systems liegt ein Signal $u(t) = 1(t)$ an. Auf der Ausgangsseite wird im stationionären Zustaud ein harmonisches Ausgangssignal mit der Amplitude $A = 5$ und der Frequenz $\omega = 5$ beobachtet. Warum ist das System nicht asymptotisch stabil?

keine konvergenz gegen Ruhelage bei
konstantem Eingang

☐

e) (3 Punkte)
Welchen Anteil des Übergangsverhaltens eines dynamischen Systems beschreibt der mit dem Faltungsintegral verbundene Teil der Lösung des Anfangswertproblems dynamischer Systeme?

Inhomogener Anteil,
Erzwungene Bewegung oder
Partikuläre Lösung

☐

$\sum$ ☐

Aufgabe 2 (25 Punkte)
Gegeben ist das Blockschaltbild eines Systems, bestehend aus sechs Übertragungselementen, mit u als Eingang und y als Ausgang (siehe Abbildung 2.1).

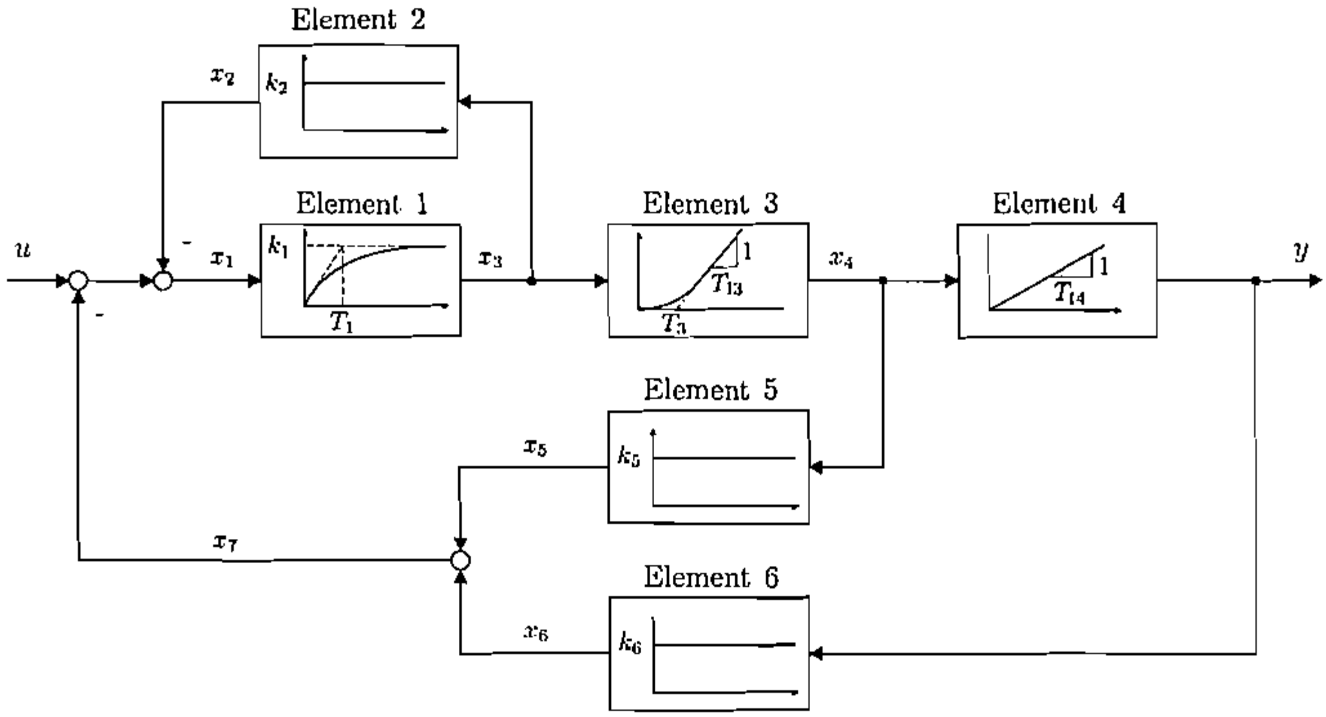


Abbildung 2.1: Blockschaltbild des Systems

a) (4 Punkte)
Klassifizieren Sie die Übertragungsverhaltensweisen (Typ des Einzelübertragungsverhaltens) der Elemente 1 bis 4 und geben Sie jeweils die entsprechende Differenzialgleichung unter Berücksichtigung der vorgegebenen Bezeichnungen in einer zur Klassifizierung geeigneten Form an.

E1: PT_1, $T_1 \dot{x}_3 + x_3 = k_1 x_1$

E2: P, $x_2 = k_2 x_3$

E3: IT_1, $T_3 \ddot{x}_4 + \dot{x}_4 = \frac{1}{T_{I3}} x_3$

$\left(T_3 \dot{x}_4 + x_4 = \frac{1}{T_{I3}} \int x_3\right)$

E4: I, $\dot{y} = \frac{1}{T_{I4}} x_4$

$\left(y = \frac{1}{T_{I4}} \int x_4\right)$

b) (4 Punkte)
Bestimmen Sie für die Parameter $T_1 = T_3 = T_{I3} = T_{I4} = k_1 = k_2 = k_5 = k_6 = 1$ die Differenzialgleichung des Gesamtsystems mit u als Eingang und y als Ausgang aus Abbildung 2.1. Welches Übertragungsverhalten weist das Gesamtsystem auf?

$$\ddddot{y} + 3\dddot{y} + 2\ddot{y} + \dot{y} + y = u$$

$\Rightarrow PT_4$

Das mathematische Modell eines mechanischen Systems (siehe Abbildung 2.2) wird durch die Gleichungen

$$
\begin{aligned}
m\ddot{x}_2 &= -F_c - F_d, \\
F_c &= c(x_2 - x_1) \text{ und} \\
F_d &= d\dot{x}_2
\end{aligned}
$$

beschrieben, wobei

$x_{1,2}$: Position,
$\dot{x}_{1,2}$: Geschwindigkeit,
F_c : Federkraft,
F_d : Dämpferkraft,
c : Federkonstante,
d : Dämpferkonstante und
m : Masse

bezeichnen.

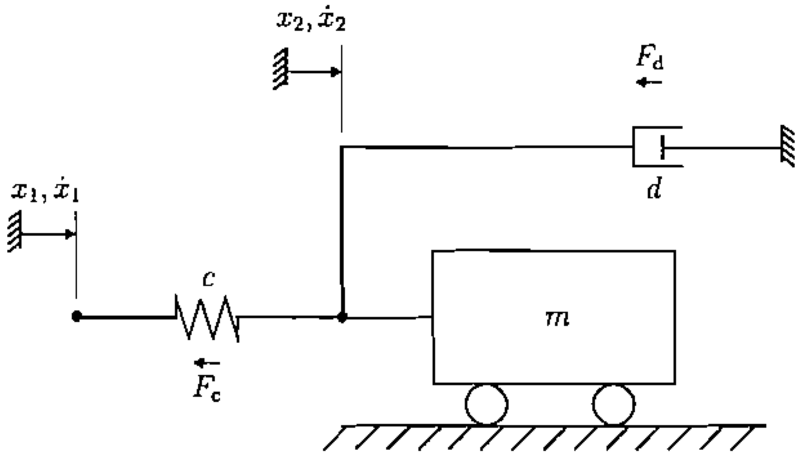


Abbildung 2.2: Modell eines mechanischen Systems

c) (3 Punkte)
Geben Sie die Zustandsraumdarstellung des Systems an, wobei Sie $x = [\dot{x}_2 \quad F_c]^T$ als Zustandsvektor, $\dot{x}_1$ als Eingangsgröße und $\dot{x}_2$ als Ausgangsgröße verwenden.

$$\ddot{x}_2 = -\frac{1}{m}F_c - \frac{1}{m}F_d = -\frac{1}{m}F_c - \frac{d}{m}\dot{x}_2$$

$$\dot{F}_c = c(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)$$

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_2 \\ \dot{F}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d}{m} & -\frac{1}{m} \\ c & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ F_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix} \dot{x}_1$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ F_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} \dot{x}_1$$

d) (6 Punkte)
Klassifizieren Sie das Übertragungsverhalten zwischen Eingangsgröße x_1 und Ausgangsgröße x_2. Kann das System Schwingungen aufweisen ($D < \frac{\sqrt{2}}{2}$)? Begründen Sie Ihre Antwort an Hand einer Ungleichung, die nur von den Parametern c, d und m abhängt.

$$\ddot{x}_2 + \frac{d}{m}\dot{x}_2 + \frac{c}{m}x_2 = \frac{c}{m}x_1 \quad \Rightarrow \quad PT_2$$

Koeffizientenvergleich / coefficient comparison:

$$\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{c} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}}$$

$$\frac{2D}{\omega_0} = \frac{d}{c} \quad \Rightarrow \quad D = \frac{d}{2c}\sqrt{\frac{c}{m}} \overset{!}{<} \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow d < \sqrt{2cm} \Rightarrow$ Schwingungen können auftreten
(Oscillation may occur)

e) (5 Punkte)
Ein System wird beschrieben durch

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -a & -b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ -c \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad a, b, c > 0.$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte λ_1 und λ_2 sowie die fehlenden Eigenvektorelemente v_{11} und v_{21} der zugehörigen Eigenvektoren $V_1 = [v_{11} \quad 1]^T$ und $V_2 = [v_{21} \quad 1]^T$. Zeigen Sie mathematisch, ob $V_3 = [1 \quad 3]^T$ und $V_4 = [-2 \quad 1]^T$ Eigenvektoren des Systems sein können.

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ a & \lambda + b \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + b)$$

$$\Rightarrow \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -b$$

$$(\lambda_i I - A) v_i \overset{!}{=} 0$$

$$\lambda_1 = 1: \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a & 1+b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow V_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1+b}{a} \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Für } V_3: \begin{bmatrix} -\frac{1+a}{b} \\ 1 \end{bmatrix} t \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(not possible, since)
nicht möglich, da
$a, b > 0 \Rightarrow -\frac{a}{1+b} < 0$

$$\text{Für } V_4: \begin{bmatrix} -\frac{1+b}{a} \\ 1 \end{bmatrix} t \overset{!}{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(possible, since)
möglich, mit
$a = \frac{1}{2}(1+b)$

$$\lambda_2 = -6: \begin{bmatrix} -6-1 & 0 \\ a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Für } v_3: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \overset{!}{=} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &\text{Für } v_4: \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \overset{!}{=} \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ nicht möglich}$$

$\Rightarrow$ v_3 kann kein Eigenvektor sein, aber
v_4 kann Eigenvektor sein.
(v_3 cannot be chosen as an eigenvector,
v_4 can be chosen.)

f) (3 Punkte)
Die Systemmatrix eines dynamischen Systems wird durch

$$A = \begin{bmatrix} -2 & k_1 & 3 \\ 0 & k_2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

beschrieben.
Bestimmen Sie das charakteristische Polynom $p(\lambda)$ des Systems. Für welche Werte der Parameter k_1 und k_2 ist das System asymptotisch stabil? Verwenden Sie zur Berechnung das Hurwitz-Kriterium.

$$[\lambda I - A] = \begin{bmatrix} \lambda+2 & -k_1 & -3 \\ 0 & \lambda-k_2 & -2 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix}$$

Charakt. Polynom: $(\lambda+2)(\lambda-k_2)(\lambda-1)-2k_1-3(\lambda-k_2)$
(char. polynomial)

$$H = \begin{bmatrix} 1-k_2 & 5k_2-2k_1 & 0 \\ 1 & -k_2-5 & 0 \\ 0 & 1-k_2 & 5k_2-2k_1 \end{bmatrix}$$

$D_1 = 1-k_2 > 0 \Rightarrow k_2 < 1$

$D_2 = (1-k_2)(-k_2-5) - 5k_2 + 2k_1 > 0 \Rightarrow k_2^2 - k_2 + 2k_1 - 5 > 0$

$D_3 = (5k_2 - 2k_1)\, D_2 > 0 \Rightarrow 5k_2 - 2k_1 > 0,\ D_2 > 0 \Rightarrow k_2 > \frac{2}{5}k_1$

$\Rightarrow$ Für $\frac{2}{5}k_1 < k_2 < -5$ und $k_2^2 - k_2 + 2k_1 - 5 > 0$
ist das System asymptotisch stabil.

(If $\frac{2}{5}k_1 < k_2 < -5$ and $k_2^2 - k_2 + 2k_1 - 5 > 0$ hold,
the system is asymptotically stable.)

$\sum$

UNIVERSITÄT DUISBURG-ESSEN
Fakultät für Ingenieurwissenschaften, Abt. Maschinenbau und Verfahrenstechnik
Lehrstuhl Steuerung, Regelung und Systemdynamik
Regelungstechnik (PO04/PO08/DP04 und früher) 30. Juli 2010

90 Minuten

Einlesezeit

Für die Durchsicht der Klausur wird eine Einlesezeit von **10 Minuten** gewährt. Während dieser Zeitdauer ist es Ihnen **nicht** gestattet, mit der Bearbeitung der Aufgaben zu beginnen. Dies bedeutet konkret, dass sich während der gesamten Dauer der Einlesezeit keinerlei Schreibgeräte (Stifte, Füller, etc.) auf dem Tisch befinden dürfen sowie die Nutzung von mitgeführten Unterlagen respektive (elektronischer) Wörterbücher bzw. tragbarer Translater strengstens untersagt ist. Nehmen Sie Ihre Schreibgeräte und Unterlagen erst **dann** zur Hand, wenn die Prüfungsaufsicht auf das Ende der Einlesezeit hingewiesen hat und füllen Sie zunächst das Deckblatt **vollständig** aus.

Viel Erfolg!

NAME	
VORNAME	
MATRIKEL-NR.	
TISCH-NR.	

Angaben zum Studiengang

<table>
<tr><td rowspan="2">☐ MB</td><td>☐ DPO</td><td>☐ Einzelfachprüfung Schiffstechnik
☐ Einzelfachprüfung Regelungstechnik
☐ Fachprüfung Regelungstechnik/Mechatronik</td></tr>
<tr><td>☐ Bachelor</td><td>☐ PO 04
☐ PO 08</td></tr>
<tr><td>☐ WI Bachelor</td><td colspan="2">☐ PO 04
☐ PO 08</td></tr>
<tr><td colspan="3">☐ Weitere (WI Master; Auflage; Angewandte Materialt.; etc.)</td></tr>
</table>

Klausurunterlagen

Ich versichere hiermit, dass ich sämtliche für die Durchführung der Klausur vorgesehenen Unterlagen erhalten, und dass ich meine Arbeit ohne fremde Hilfe und ohne Verwendung unerlaubter Hilfsmittel und sonstiger unlauterer Mittel angefertigt habe. Ich weiß, dass ein Bekanntwerden solcher Umstände auch nachträglich zum Ausschluss von der Prüfung führt. Ich versichere weiter, dass ich sämtliche mir überlassenen Arbeitsunterlagen sowie meine Lösung vollständig zurück gegeben habe. Die Abgabe meiner Arbeit wurde in der Teilnehmerliste von Aufsichtsführenden schriftlich vermerkt.

Duisburg, den ________ ______________________________
(Unterschrift der/des Studierenden)

Falls Klausurunterlagen vorzeitig abgegeben: ____________Uhr

Hinweise

Achtung: Schreiben Sie Ihre Antwort für ALLE Aufgaben
direkt unter die entsprechende Aufgabe in den Aufgabenbogen!

Maximal erreichbare Punktzahl:	**60**
Mindestprozentzahl für die Note 1,0 der Gesamtprüfung:	**95%**
Mindestprozentzahl für die Note 4,0 der Gesamtprüfung:	**50%**

Bewertungstabelle

Aufgabe 1	
Aufgabe 2	
Aufgabe 3	
Gesamtpunktzahl	
Angehobene Punktzahl	
%	
Bewertung gem. PO in Ziffern	

(Datum und Unterschrift 1. Prüfer, Univ.-Prof. Dr.-Ing. Söffker)

(Datum und Unterschrift 2. Prüfer, PD Dr.-Ing. Wend)

(Datum und Unterschrift des für die Prüfung verantwortlichen Prüfers, Söffker)

Fachnote gemäß Prüfungsordnung:

☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐	☐
1,0	1,3	1,7	2,0	2,3	2,7	3,0	3,3	3,7	4,0	5,0
sehr gut		gut			befriedigend			ausreichend		mangelhaft

Bemerkung: ______________________________

Aufgabe 1 (15 Punkte)

a) (3 Punkte)
Ein Übertragungssystem weist ein PIT_1-Übertragungsverhalten mit den Parametern K, T_1, T_I auf. Wie lauten der Anfangs- und der Endwert der Übergangsfunktion?

Anfangswert $= 0$
(Initial value)

Endwert $\to \infty$
(Final value)

b) (2 Punkte)
Ein System weist die Pole $-4 \pm j4$ sowie $-2 \pm j1$ auf. Welche Dämpfungen weisen die Polpaare auf (Vereinfachen Sie Ihr Ergebnis soweit wie möglich)?

$d_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$d_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$

c) (2 Punkte)
Die in Abbildung 1.1 Wurzelortskurve (mit angegebener Pol-Nullstellenverteilung) eines mit negativer Rückführung gegebenen offenen Regelkreises soll hinsichtlich des resultierenden Regelungsverhaltens des geschlossenen Kreises bewertet werden.
Für welche Wurzelortskurvenverstärkung $\tilde{K}$ weist der geschlossene Regelkreis das beste Verhalten hinsichtlich Stabilität, Robustheit und größter Dämpfung auf ($\tilde{K} = 0$, kleine $\tilde{K}$, große $\tilde{K}$)?

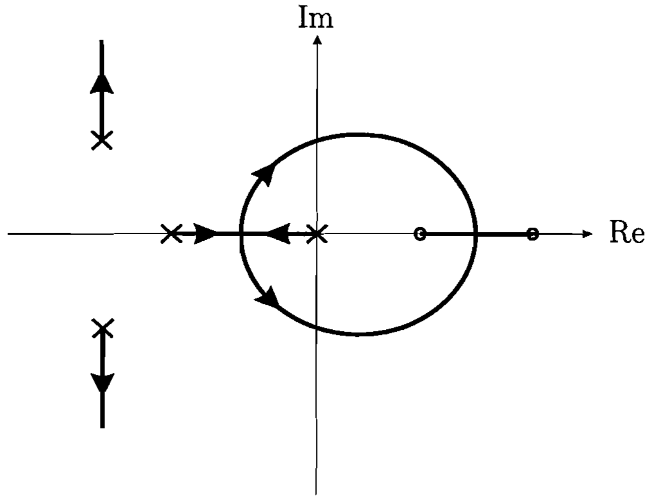


Abbildung 1.1: Wurzelortskurve

kleines $\tilde{k}$
(small $\tilde{k}$)

d) (3 Punkte)
Zeichnen Sie den Amplituden- sowie den Phasenrand in der durch Abbildung 1.2 gegebenen Ortskurve eines offenen Regelkreises ein. Welche konkreten Zahlenwerte für den Amplituden- und Phasenrand ergeben sich? Ist der geschlossene Regelkreis mit Gegenkopplung des in Abbildung 1.2 angegebenen offenen Regelkreis asymptotisch stabil, stabil oder instabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

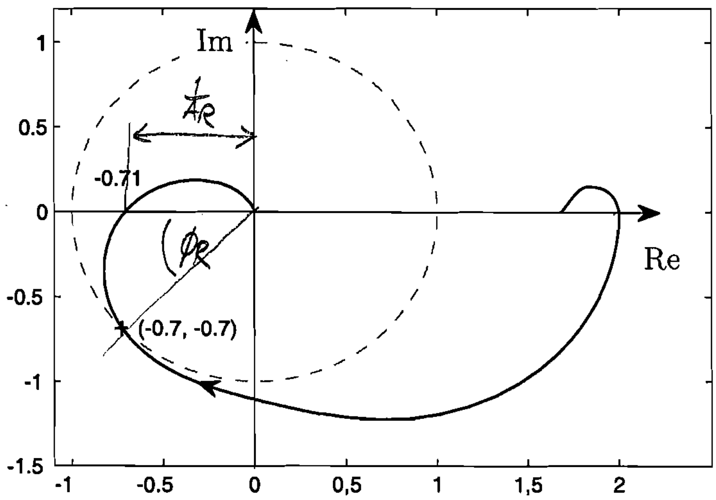


Abbildung 1.2: Ortskurve

$A_R = \frac{1}{0{,}71}$

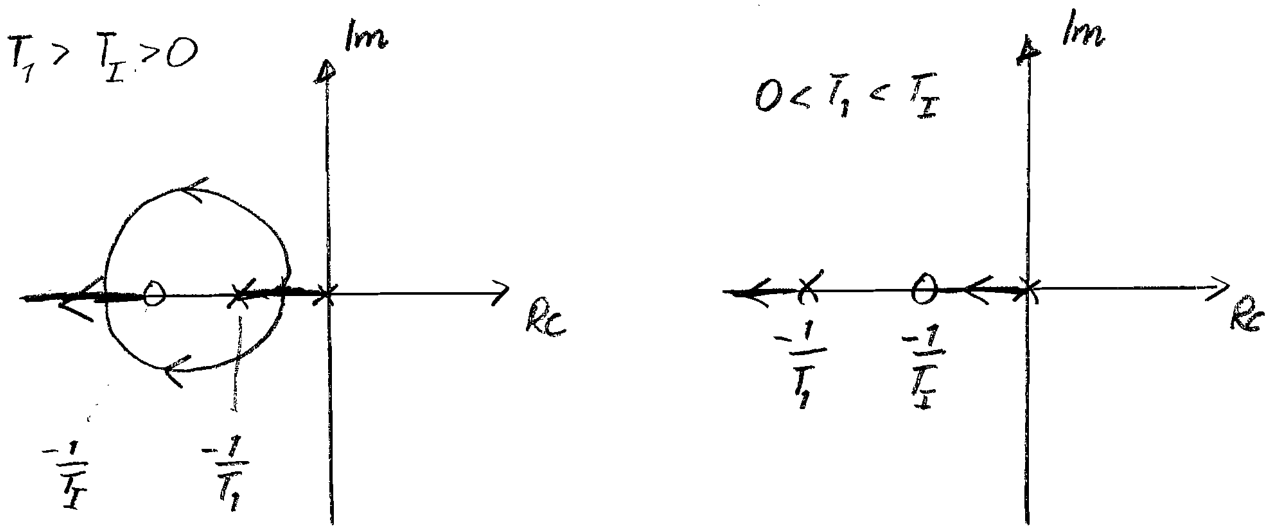
$\varphi = 45^{\circ}$

Der offene Regelkreis ist stabil, weshalb das spezielle Nyquist kriterium anwendbar ist. Der geschlossene Regelkreis ist asymptotisch stabil, da der Punkt (-1/0j) links von der Kurve liegt.

The open loop system is stable, therefore using the special Nyquist criterion is suitable. Upon to the special Nyquist criterion, the closed loop system is asymptotically stable, because the whole curve is to the right of the point (-1/0j)

Ein Übertragungssystem mit PIT_1-Verhalten wird mit einem Übertragungselement mit P-Verhalten als Regler in Gegenkopplung geschaltet ($T_1, T_I, K_1, K_p > 0$).

e) (5 Punkte)
Kann das geregelte Gesamtsystem asymptotisch stabiles Verhalten aufweisen? Begründen Sie Ihre Antwort an Hand qualitativ gezeichneter Wurzelortskurven.



Für $\tilde{k} > 0$ ist das System asymptotisch stabil.

If $\tilde{k} > 0$, then the closed loop system is asymptotically stable.

$\sum$

Aufgabe 2 (20 Punkte)
Der in Abbildung 2.1 dargestellte Regelkreis besteht aus einem Regler $G_{\mathrm{R}}(s)$, einer Strecke $G_{\mathrm{S}}(s)$ und einem Übertragungselement $G_{\mathrm{M}}(s)$, das die dynamischen Eigenschaften des Messglieds beschreibt.

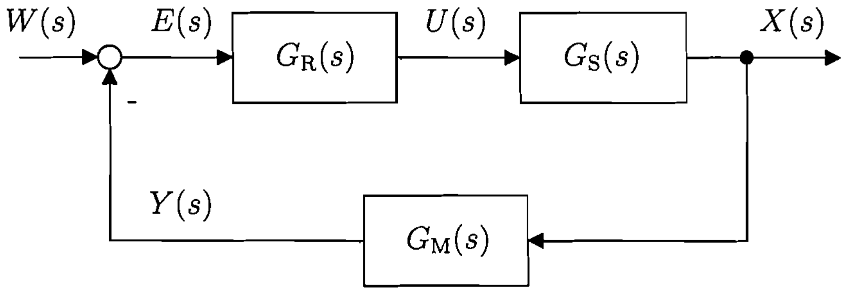


Abbildung 2.1: Blockschaltbild des Systems

Das Übertragungsverhalten der Strecke $G_{\mathrm{S}}(s)$ wird durch die Differenzialgleichung

$$\ddot{x}(t) + 2\dot{x}(t) + 3x(t) = 2u(t) \text{ mit } \dot{x}(0) = x(0) = 0$$

beschrieben. Das Übertragungsverhalten des Übertragungselements $G_{\mathrm{M}}(s)$ wird durch die Differenzialgleichung

$$y(t) + 2\dot{y}(t) = x(t) \text{ mit } \dot{y}(0) = y(0) = 0$$

beschrieben.

a) (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Übertragungsfunktionen für die Strecke $G_{\mathrm{S}}(s) = \frac{X(s)}{U(s)}$ und für das Übertragungselement $G_{\mathrm{M}}(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$.

$$G_S(s) = \frac{2}{s^2+2s+3}$$

$$G_M(s) = \frac{1}{1+2s}$$

☐

b) (2 Punkte)
Bestimmen Sie die Führungsübertragungsfunktion $G_W(s) = \frac{X(s)}{W(s)}$ mit

$$G_R(s) = K_P, \quad G_M(s) = \frac{2}{s+2} \quad \text{und} \quad G_S(s) = \frac{1}{s^2+3s+1}.$$

$$G_w(s) = \frac{G_0}{1 + G_M G_0} \quad \text{mit (with)} \quad G_0 = G_R G_S$$

$$\Rightarrow G_w(s) = \frac{K_p(2+s)}{(s+2)(s^2+3s+1)+2K_p}$$

$$= \frac{K_p(s+2)}{s^3+5s^2+7s+2+2K_p}$$

Nehmen Sie für die Teilaufgaben c) und d) die folgende Führungsübertragungsfunktion eines Standardregelkreises

$$G_\mathrm{W}(s) = \frac{4K_\mathrm{P}(1+s)}{s^3 + 2s^2 + \tilde{T}s + 4 + K_\mathrm{P}}$$

mit $\tilde{T} > 0$ an.

c) (4 Punkte)
Bestimmen Sie unter Zuhilfenahme des Hurwitz-Kriteriums den zulässigen Wertebereich der Reglerverstärkung K_P in Abhängigkeit der Zeitkonstanten $\tilde{T}$, für den der geschlossene Regelkreis asymptotisch stabil ist.

Charakteristische Gleichung (characteristic equation):

$$c(s) = s^3 + 2s^2 + \tilde{T}s + 4 + K_p$$

$$a_i > 0 \Rightarrow 4 + K_p > 0$$

Hurwitz $H = \begin{bmatrix} 2 & 4+K_p & 0 \\ 1 & \tilde{T} & 0 \\ 0 & 2 & 4+K_p \end{bmatrix}$

$$D_1 = 2 > 0$$

$$D_2 = 2\tilde{T} - 4 - K_p > 0 \Rightarrow -4 < K_p < 2\tilde{T} - 4$$

$$D_3 = (4 + K_p) \cdot D_2 > 0$$

$$\Rightarrow -4 < K_p < 2\tilde{T} - 4 \Rightarrow$$ asymptotisch stabil (asymptotically stable)

d) (3 Punkte)
Bestimmen Sie den stationären Endwert der Sprungantwort $h(t \to \infty)$ des geschlossenen Regelkreises und die bleibende Regelabweichung bei einer Reglerverstärkung von $K_P = 1$ und einer Zeitkonstanten $\tilde{T} = 5$.

Stationärer Endwert (stationary final value):

$$h(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s\, w(s)\, G_w(s) \quad \text{mit} \quad w(s) = \frac{1}{s},\ K_P = 1$$

$$h(t \to \infty) = \lim_{s \to 0} s \frac{1}{s} \frac{4K_P(1+4)}{s^4 + 2s^3 + 5s + 4 + K_P} = \frac{4}{5}$$

Bleibende Regelabweichung (steady state error):

$$e(t \to \infty) = 1 - h(t \to \infty) = \frac{1}{5}$$

Für die Teilaufgabe e) und f) gelten

$$G_R(s) = K \text{ und } G_S(s) = \frac{s}{(s-1)(s-4)}.$$

e) (1 Punkt)
Ist der offene Regelkreis $G_O(s)$ stabil? Begründen Sie Ihre Antwort.

Nicht stabil, weil mindestens ein Pol einen positiven Realteil besitzt.

(Not stable, because ≥ one pole has a positive real part.)

f) (8 Punkte)
Zur Bewertung der Stabilität des geschlossenen Regelkreises mit Gegenkopplung soll das Wurzelortskurvenverfahren angewandt werden.

1) Berechnen Sie die Verzweigungspunkte s_{vi} der Wurzelortskurve sowie die Anzahl und Winkel der Äste, die im Unendlichen enden.
2) Skizzieren Sie die Wurzelortskurve mit Hilfe des Diagramms auf der nächsten Seite und kennzeichnen Sie die Richtung zunehmender Verstärkung.

Anzahl der Äste, die im Unendlichen enden
(Number of branches ending in infinity):

$$n-m = 2-1 = 1$$

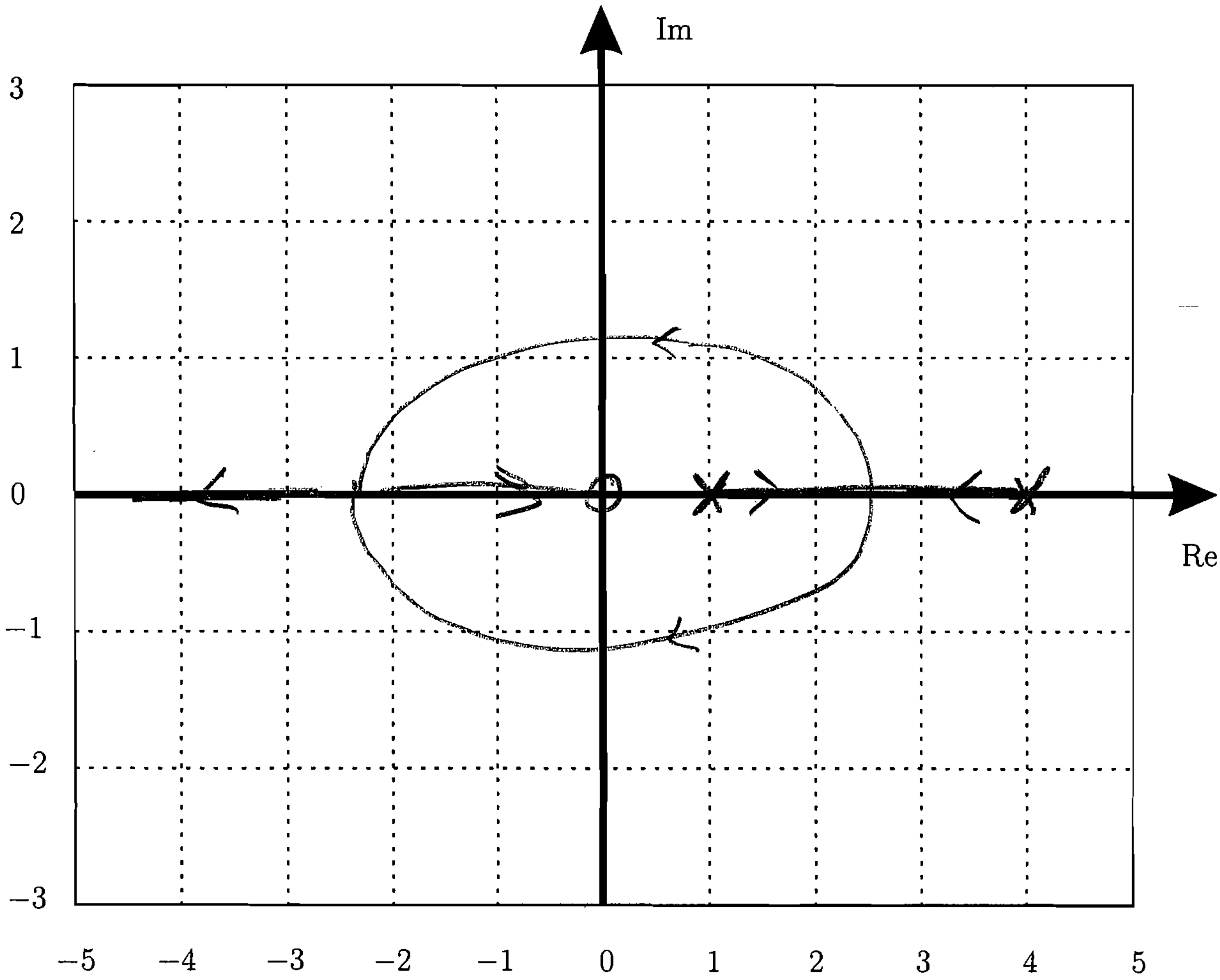
Winkel der Äste
(Angle of branches):

$$\varphi_0 = 180°$$

Verzweigungspunkte:
(break away points)

$$\sum_{i=1}^{2} \frac{1}{s_v - n_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{s_v - p_i}$$

$$\frac{1}{s_v} = \frac{1}{s_v - 1} + \frac{1}{s_v - 4} \quad \Rightarrow \quad s_{v1,2} = \pm 2$$



$\square$

$\sum \square$

Aufgabe 3 (25 Punkte)
Eine Regelstrecke $G_S(s)$

$$G_S(s) = \frac{200}{(s+20)(s^2+0,4\,s+1)}\,e^{-0,003\,s}$$

wird mit einem Regler G_{R1}

$$G_{R1}(s) = 10(s-0,1)$$

geregelt.

a) (1 Punkt)
Bestimmen Sie die Phasenwerte des Reglers $G_{R1}(j\omega)$ für $\omega = 0$ und $\omega = +\infty$.

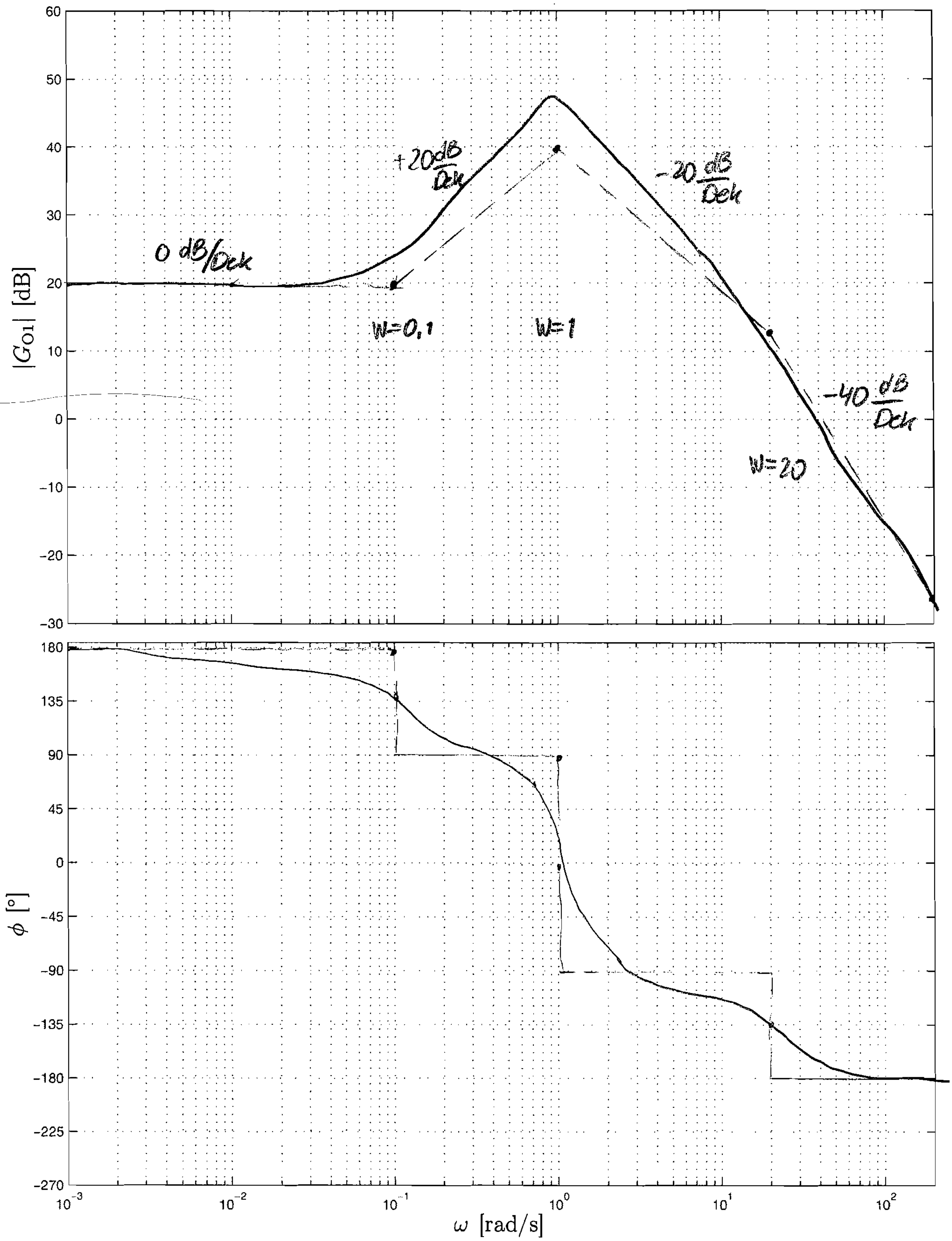
$G_{R1}(j\omega) = 10\ (j\omega - 0,1)$

$G_{R1}(j0) = -1 \quad \Rightarrow \quad Arg(G_{R1}(j0)) = 180°$

$G_{R1}(j\infty) = 10(j\infty - 0,1) \quad \Rightarrow \quad Arg(G_{R1}(j\infty)) = 90°$

b) (6 Punkte)
Zeichnen Sie quantitativ das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises $G_{O1}(s)$ und kennzeichnen Sie die Steigungen der Asymptoten (in dB/Dek.) im Amplitudengang und die Eckfrequenzen.

Bode-Diagramm

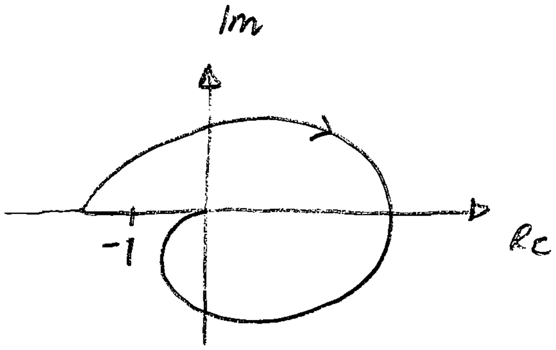


Bei Vernachlässigung der Totzeit ergibt sich für die Strecke die Übertragungsfunktion

$$G_{S1}(s) = \frac{200}{(s+20)(s^2+0,4\,s+1)}.$$

c) (5 Punkte)
Bestimmen Sie an Hand der entsprechenden Ortskurven, ob der Regler G_{R1} die Regelstrecke mit negativer Rückführung stabilisieren kann. Wenn nicht, bestimmen Sie die Anzahl der instabilen Pole des geschlossenen Regelkreises.

$$G_{02} = \frac{10\left(\frac{s}{0,1}-1\right)}{\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\left(\frac{s}{1}\right)^2+2\cdot 0,2\left(\frac{s}{1}\right)+1\right)}$$



Nyquist kriterium

$$\overleftarrow{u} = P - N \Rightarrow N = P - \overleftarrow{u} = 0 - (-1) = 1$$

⇒ Das System ist instabil und das System besitzt einen instabilen Pol.

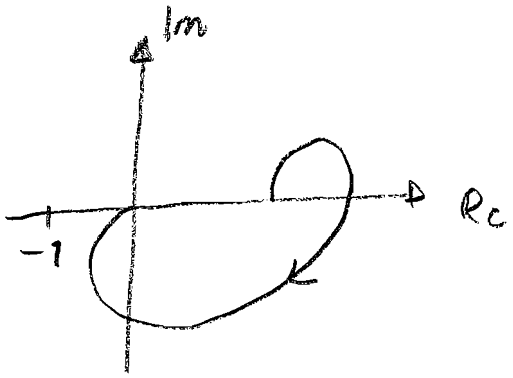
(The system is unstable and has one unstable pole.)

d) (4 Punkte)
Zur Regelung der Regelstrecke $G_{S1}(s)$ wird ein zweiter, alternativer Regler G_{R2}

$$G_{R2}(s) = k_R(s + 0,1)$$

eingesetzt. Bestimmen Sie an Hand der entsprechenden Ortskurven, ob der Parameter k_R ($k_R > 0$) die Stabilität des geschlossenen Regelkreises in Gegenkopplung beeinflussen kann.

$$G_{03} = \frac{k_R\left(\frac{s}{0,1}+1\right)}{\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\left(\frac{s}{1}\right)^2+2\cdot 0,2\left(\frac{s}{1}\right)+1\right)}$$



‚Linke-Hand-Regel' (left hand rule):

Das System ist immer stabil unabhängig von k_R.

(The system is stable, independently of k_R.)

e) (9 Punkte)
Die Übertragungsfunktion eines offenen Regelkreises G_{O3}

$$G_{O3} = \frac{6-s}{(1+s)(2+s)}$$

ist zu betrachten. Bestimmen Sie rechnerisch die Phasendurchtrittsfrequenz ω_c, die Amplitudendurchtrittsfrequenz ω_s sowie den Amplitudenrand A_R.

$$G_{03}(j\omega) = \frac{6-j\omega}{(1-j\omega)(2+j\omega)}$$

$$\omega_c: \quad |G_{03}(j\omega_c)|^2 = 1 \Rightarrow \omega_c = 2$$

$$\omega_s: \quad Im\{G_{03}(j\omega_s)\} = 0 \Rightarrow \omega_s = 2\sqrt{5}$$

$$A_R: \quad \frac{1}{|G(j\omega_s)|} = A_R = 3$$

$\square$

$\sum \square$