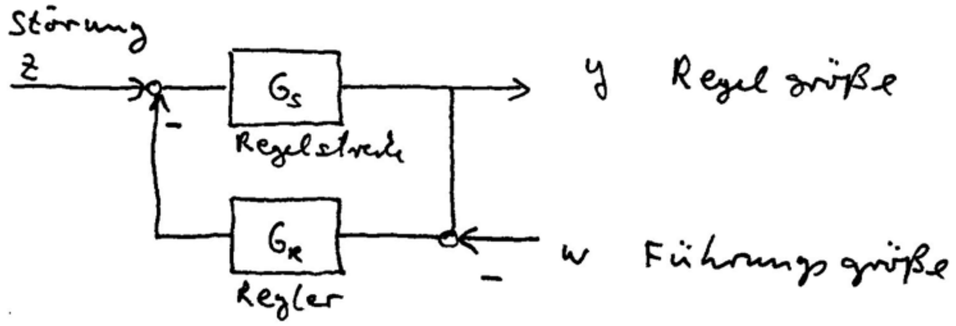
Lösung RT FJ 04

1)

a) - Stabilität
- Verbesserung der dynamischen Eigenschaften des Systems (Führungsverhalten, Störempfindlichkeit)

b) Anwendung des Rückkopplungsprinzipes

c)



d)

$$y(t) = \underbrace{C e^{At} x_0}_{\substack{\text{homog.}\\ \text{Lösung}}} + \underbrace{C \int e^{A(t-\tau)} B u(\tau)\, d\tau}_{\text{partik. Lösung}}$$

$\Downarrow$ Eigenbewegung $\qquad$ $\Downarrow$ Erzwungene Bewegung

e)

$$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \end{bmatrix} \qquad y^{(4)} = -c\dot{y} - b\ddot{y} - a y^{(3)} + du$$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \\ y^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c & -b & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \dddot{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ d \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

2)

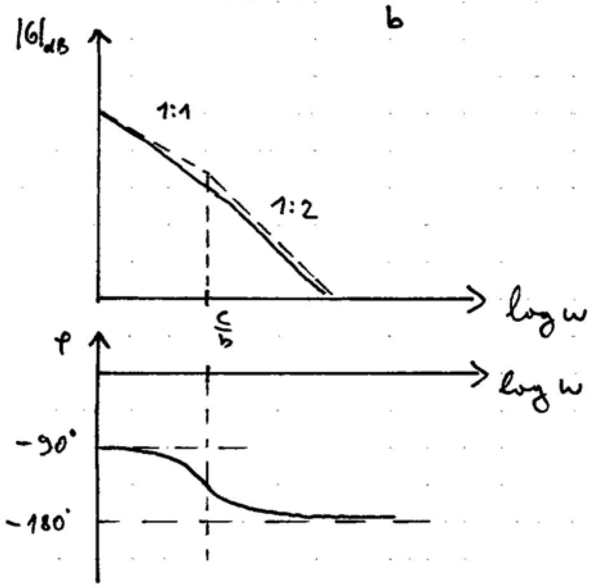
a) Stationäres Verhalten

Linearität des Übertragungsverhaltens

b) $b\dot{y} + cy = d \int u(t)\, dT$ $\quad IT_1$ Verhalten

$\Leftrightarrow \frac{b}{c}\dot{y} + y = \frac{d}{c} \int u(t)\, dT$

mit $w = \frac{c}{b}$



c)

- offene Kette muß stabil sein
- Gegenkopplung, $K > 0$
- maximal 2 Pole im Ursprung
- Zählergrad < Nennergrad
- keine Kurzung von Zähler- und Nennertermen

Aussage: Wenn die Bedingungen erfüllt sind, dann liegt stabiles Verhalten beim schliessen des offenen Regelkreises vor.

d) Das Nyquistkriterium kann nicht zur Beurteilung der Stabilität eines Systems herangezogen werden, sondern dient der Beurteilung der Stabilität eines geschlossenen Systems auf Basis der Ortskurve des offenen Kreises.

Die Klassifizierung eines Systems mit PT_2 Übertragungsverhalten bezeichnet die Struktur des Übertragungsverhaltens der Art

$$a_1 \ddot{x}_a + a_2 \dot{x}_a + a_3 x_a = K x_e \ .$$

Die Stabilität hängt von den Koeffizienten a_i ab. Schwingungsfähige, mechanische Systeme mit PT_2 Verhalten sind durch $a_{1,2,3} > 0$ gekennzeichnet und damit immer stabil.

e)

$$|G_0| = \frac{\sqrt{2}}{w_s T (1 + w_s T)} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad w_s = -\frac{1}{2T} + \sqrt{\sqrt{2} + \frac{1}{4}}\ \frac{1}{T}$$

3)

a) Polstellen: $s_{1,2} = \frac{1}{2T_2} \pm \sqrt{-\frac{1}{T_2} + \frac{1}{4T_2^2}}$

$\Rightarrow$ nicht stabil

Nullstellen: $s_0 = -\frac{1}{T_1}$

b)

$$G_s = K \frac{1 + T_1 s}{1 - s}$$

$$G_R = \frac{T_D s}{1 + T_3 s}$$

$$G = \frac{G_s G_R}{1 + G_s G_R} = K \frac{\frac{1+T_1 s}{1-s} \frac{T_D s}{1+T_3 s}}{1 + K \frac{1+T_1 s}{1-s} \frac{T_D s}{1+T_3 s}}$$

$$= K \frac{(1+T_1 s) T_D}{(1-s)(1+T_3 s) + K(1+T_1 s) T_D s}$$

charakt. Gl.: $(1-s)(1+T_3 s) + K(1+T_1 s) T_D s = 0$

$$(KT_1T_D - T_3)s^2 + (T_3 - 1 + KT_D)s + 1 = 0$$

c) $KT_1T_D > T_3$

$T_3 + KT_D > 1$

d) Alle Koeff. sind größer Null

$$H = \begin{bmatrix} 10 & 10 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 10 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$\det(H_2) = 10 - 10 = 0$

$\rightarrow$ nicht stabil

e) $PIDT_2$: $T_2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = K\left(u + \frac{1}{T_I}\int u + T_D \dot{u}\right)$

PD Verhalten für $T_1 = T_2 = 0$ und $T_I \rightarrow \infty$

$\Rightarrow y = K(u + T_D \dot{u})$

4)

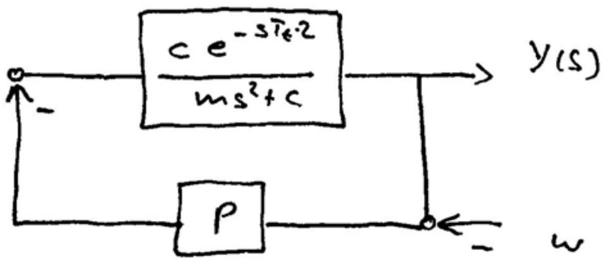
a)
$$m\ddot{x}_2 = -c(x_2 - x_1)$$
$$\Leftrightarrow \quad m\ddot{x}_2 + c x_2 = c x_1$$

$$\mathcal{L}\{...\} \Rightarrow \quad m s^2 X_2 + c X_2 = c X_1$$
$$\Leftrightarrow \quad X_2(ms^2 + c) = c X_1$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{X_2}{X_1} = \frac{c}{ms^2+c}$$

$$\frac{y(s)}{u(s)} = \frac{c\,e^{-2sT_t}}{ms^2+c}$$

$$u(s) \longrightarrow \boxed{e^{-sT_t}} \longrightarrow \boxed{\frac{c}{ms^2+c}} \longrightarrow \boxed{e^{-sT_t}} \longrightarrow y(s)$$

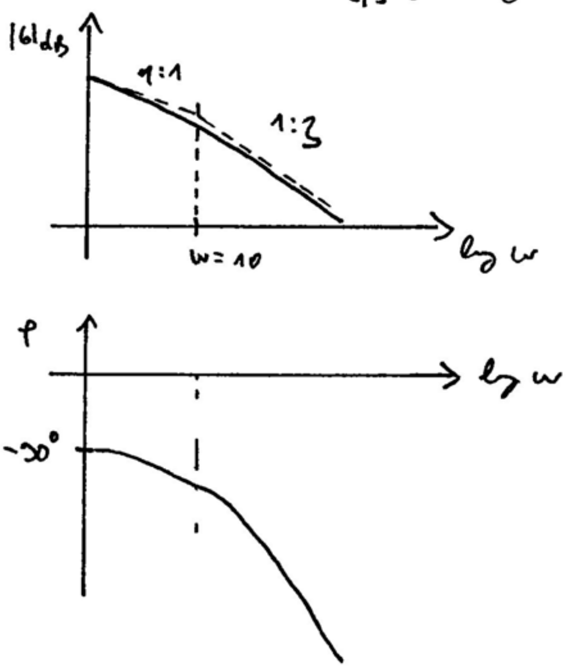
b)

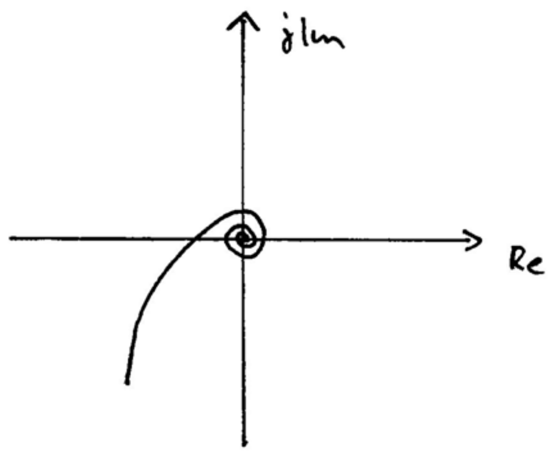


$$G = \frac{G_0}{1+G_0} = \frac{Kc\,e^{-2sT_t}}{ms^2+c + Kc\,e^{-2sT_t}}$$

c) Pole : $s_1 = 0$

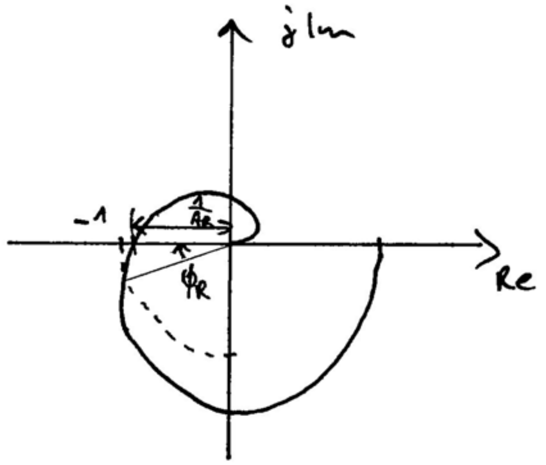
$s_{2,3} = -10$ $\qquad w_E = 10$

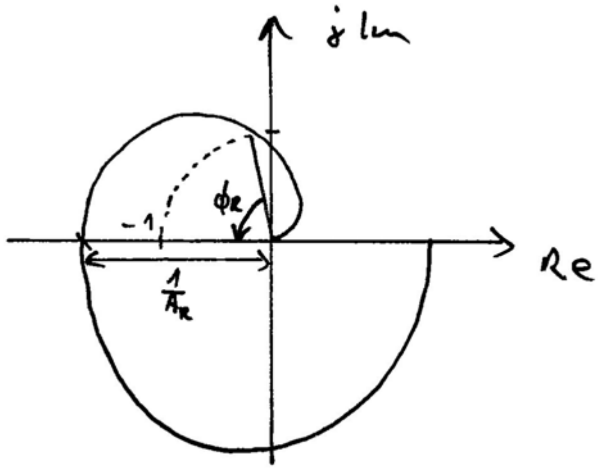




d) $G_0 = \dfrac{KK_1}{(1+T_1 s)^2\,(1+T_2 s)\,(1+Ts)}$

Das System kann instabil werden (abhängig von K)





Phasenrand $\phi_R > 0$

Amplitudenrand $A_R > 1$

Phasenrand $\phi_R < 0$

Amplitudenrand $A_R < 1$

e) Gegenkopplung: $\frac{3}{1,5} < K < \frac{3}{0,6}$ oder $K < \frac{3}{2,3}$

Mitkopplung: $K < \frac{3}{2}$

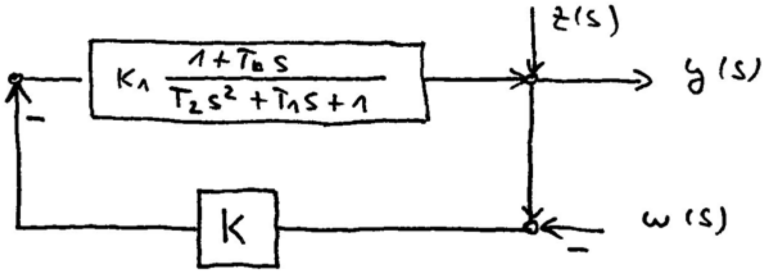
5)

a) PDT_2 : $\quad T_2 \ddot{y} + T_1 \dot{y} + y = K_1 (u + T_D \dot{u})$

$$G(s) = \frac{K_1(1+T_D s)}{T_2 s^2 + T_1 s + 1}$$

P : $\quad y = K\,u$

$$G(s) = K$$



b)
$$[-(y-w)K]\,G_1 + z = y$$
$$\Leftrightarrow \quad w\,\frac{KG_1}{1+KG_1} + z\,\frac{1}{1+KG_1} = y$$

c) Charakt. Gleichung des offenen Systems

$T_2 s^2 + T_1 s + 1 = 0 \quad \Rightarrow$ für $T_2 > 0$, $T_1 > 0$ stabil

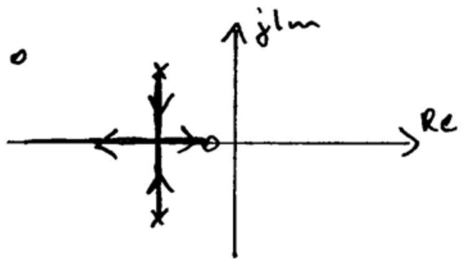
Charakt. Gleichung des geschlossenen Systems

$T_2 s^2 + (T_1 + KK_1 T_D)s + 1 + K_1 K = 0$ für $T_2 > 0$, $K > -\frac{T_1}{K_1 T_D}$, $K > -\frac{1}{K_1}$ stabil

d) Pole: $s_{1,2} = -1 \pm j$

Nullst. $s_0 = -\frac{1}{T_D}$

Für $T_D > 0$



- Für $T_D > 0$ immer stabil
- Für $T_D < 0$ kann instabil werden

e) Alle Koef. des charakteristischen Polynoms haben gleiches Vorzeichen (alle Pole in der linken S-HE)

$\Rightarrow$ asympt. stabil

6)

a) $\left[u \frac{1}{T_1 s} + \frac{K_2}{1+T_2 s} \; y \right] \frac{K_1}{T_1 s + 1} = y$

$\Leftrightarrow \quad \frac{y}{u} = \frac{K_1}{T_1} \; \frac{1 + T_2 s}{s\left((T_2 s+1)(T_1 s+1) - K_1 K_2 \right)}$ $\qquad PIT_2$

b) PD: $\quad G_R = K(1 + T_D s)$

Charakt. Gleichung

$$s\left[(s+1)^2 - 1 \right] + K(s+1)(1+T_D s) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad s^3 + (2 + KT_D) s^2 + (1 + T_D) K s + K = 0$$

Alle Koef. größer 0

$2 + KT_D > 0 \quad \Rightarrow \quad K > -\frac{2}{T_D}$

$(1 + T_D) K > 0 \quad \Rightarrow \quad T_D \neq -1 \quad$ wenn $\quad T_D < -1 \Rightarrow K < 0$

$K > 0 \qquad\qquad T_D > -1 \Rightarrow K > 0$

$$H = \begin{bmatrix} 2+KT_D & K & 0 \\ 1 & (1+T_D)K & 0 \\ 0 & 2+KT_D & K \end{bmatrix}$$

$\det(H_2) = (2 + KT_D)(1+T_D)K - K > 0$

$\Leftrightarrow \quad K > -\frac{1 + 2T_D}{T_D + T_D^2}$

stabil für $\quad T_D > -1$

$K > -\frac{2}{T_D}$

$K > 0$

$K > -\frac{1 + 2T_D}{T_D + T_D^2}$

c) Amplitudenrand: $\quad A_R \approx \frac{1}{0{,}5} = 2 \qquad$ (abgelesen)

Phasenrand: $\quad \phi_R \approx 20° \qquad$ (abgelesen)

Der geschlossene Regelkreis ist für $K < 2$ stabil d)

$$G_0(s) = \frac{K}{s(s+1)^2} \quad ; \quad \varphi(\omega_c) = -90° - 2\arctan(\omega_c) = -180°$$

$$\Rightarrow \omega_c = 1$$

$$|G_0(s)| = \frac{1}{\omega_c \cdot (\sqrt{\omega_c^2+1})^2} = 0{,}5$$

$$\Rightarrow A_R = \frac{1}{0{,}5} = 2 > 1 \qquad \text{Amplitudenrand}$$

(Phasenrand): $$\frac{1}{\omega_s(\omega_s^2+1)} = 1$$

$$\Rightarrow \omega_s = 0{,}6823$$

$$\varphi(\omega_s) = -90° - 2\arctan(0{,}6823)$$

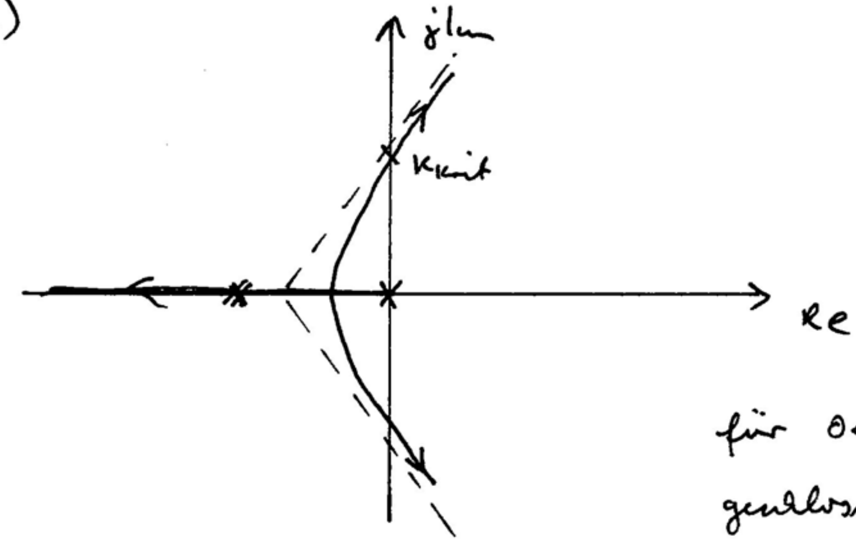
$$\phi_R = 180° + \varphi(\omega_s) = 21{,}4 > 0$$

Gutes Regelverhalten für $30° < \phi_R < 60°$

$2 < A_R < 6$

$\Rightarrow$ liegt hier nicht vor

e)



für $0 < K < K_{krit}$ ist das geschlossene System stabil