BLS-Beobachter in Kanonischer Form

H. Schwarz

Forschungsbericht Nr. 4/92

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Die für analytische Systeme mit linearer Steuerung (ALS) definierte nichtlineare Beobachternormalform (NBNF) wird für bilineare Systeme (BLS) näher untersucht mit dem Ziel, für praktische Anwendungen explizite Zusammenhänge darzustellen.

Universität - GH - Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitende Übersicht

Beobachter und Schätzfilter zur Zustandschätzung werden benötigt, wenn Zustände dynamischer Systeme nicht direkt der Messung zugänglich sind. Ein Beobachter oder Schätzer wurde erstmalig von Luenberger (1963) für lineare Systeme eingeführt und untersucht. Diese Systeme bestehen aus einem Modell des dynamischen Systems, dessen Zustand fortlaufend (indirekt) gemessen oder geschätzt werden soll und einer Rückführung, die den Fehler zwischen gemessenen Systemausgängen und den am Beobachter geschätzten Größen asymptotisch gegen Null führt. Diese grundsätzliche Beobachterstruktur läßt sich auch auf einige Klassen nichtlinearer Systeme erweitern. Zu diesem Problemkreis ist eine große Anzahl von Arbeiten erschienen, von denen in diesem Bericht nur einige besonders interessante Arbeiten aufgeführt sind: Zeitz (1984, 1985 und 1987); Keller (1986); Walcott u. a. (1987). Eine umfassende Übersicht, sowie rechnergestützte Analyse- und Syntheseverfahren, sind in der neuen Arbeit von Birk (1992) zu finden.

Von Schwarz (1990) wurde ausgehend von den Beobachtern für lineare Systeme eine sehr elementare Einführung der Beobachter für ALS auf der Basis der Beobachternormalform gegeben. In diesem Bericht wurden dabei auch die BLS knapp behandelt. Wie sich inzwischen aber zeigte (Ingenbleek, 1991), war die Darstellung für BLS nicht ausführlich genug, da sie sich auf einen recht speziellen Sonderfall bezog, bei dem zur Erzeugung der Beobachternormalform die für lineare System bekannte Transformation ausreichte.

Der vorliegende Bericht dient zum Auffüllen der Lücken in dem Bericht des Autors (Schwarz, 1990),[1] aber auch hier wieder mit dem Ziel, eine einführende Darstellung so zu geben, daß eine praktische Anwendung bei technischen Problemstellungen auch für den mit der Materie weniger Vertrauten leicht möglich ist.

In Abschnitt 2 wird die Beobachternormalform (NBNF) für ALS von Zeitz (1987) eingeführt, die sich von der NBNF von Keller (1986) unterscheidet, die meinem Forschungsbericht 7/90 zugrundeliegt. Daran anschließend wird in Abschnitt 3 die Bestimmung einer nichtlinearen Transformation behandelt, die ein gegebenes ALS gebenenfalls in die NBNF überführt. Darauf folgt in Abschitt 4 eine Spezialisierung auf die Unterklasse der BLS, für die im Falle der vollständigen Beobachtbarkeit die Transformation auf die NBNF nach Zeitz immer möglich ist. Besonders übersichtlich sind die Verhältnisse, wenn das BLS keine Nulldynamik im Endlichen hat. Deshalb wird auf diesen Fall näher eingegangen und im Abschnitt 5 werden einige technische Systeme aufgeführt, die dieser speziellen Systemklasse angehören. In dem Ausblick wird angedeutet, welche Systemklassen nach Ansicht des Autors ähnlich detailiert untersucht werden können.

[1] An dieser Stelle möchte ich den Herren Dipl.-Ing. R. Ingenbleek und Dr. F. Svaricek für zahlreiche klärende Gespräche und Bemerkungen aufrichtig danken.

2 Beobachternormalform für ALS

Ich beschränke mich hier auf analytische Systeme mit linearer Steuerung (ALS) dieser Form:

$$\Sigma_{\text{ALS}} \quad \begin{array}{rcll} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t))u(t) & ; \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \\ y(t) & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) & , \quad \boldsymbol{x}(t) \in R^n \quad , \end{array} \tag{2.1}$$

also den zeitinvarianten Eingrößen-ALS mit linearer Meßgleichung ohne direkten Durchgriff der Steuerung $u(t)$ auf die Meßgröße $y(t)$. Dies stellt für die praktische Anwendung keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit dar, denn bei technischen Systemen existiert allein schon aus energetischen Gründen keine direkte Verbindung zwischen Stellsignal und Ausgangsgröße. Systemtheoretisch bedeutet dies dann aber auch, daß das System (**??**) immer eine SStruktur im Unendlichen" hat. Um diese Aussage zu präzisieren haben wir zunächst

Definition 2.1
Das Analytisch-Lineare-System (**??**) hat den Differenzengrad oder relativen Grad d in einer Umgebung U um $\boldsymbol{x}_0$, wenn gilt:[2]

$$\left.\begin{array}{ll} \text{i)} & L_bL_a^kc(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ für alle } \boldsymbol{x} \text{ in der Nähe von } \boldsymbol{x}_0 \text{ und } \forall k < d-1 \\ \text{ii)} & L_bL_a^{d-1}c(\boldsymbol{x}) \neq 0 \quad , \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

□

bzw. mit gleicher Bedeutung

Definition 2.2
Das Analytisch-Lineare-System (**??**) hat den Differenzengrad oder relativen Grad d in einer Umgebung U um $\boldsymbol{x}_0$, wenn gilt:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d^k}{dt^k}y(t) = y^{(k)}(t) = L_a^kc(\boldsymbol{x}) \qquad ,\forall k < d \\ \\ \text{und } y^{(d)}(t) = L_a^dc(\boldsymbol{x}) + L_bL_a^{d-1}c(\boldsymbol{x}) \cdot u(t) \qquad . \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

□

Der Differenzengrad eines Systems definiert dann die Nulldynamik" sowie die Nullstellenstruktur im Unendlichen" wie folgt:

Definition 2.3
Der durch Zustandsrückführung eines Systems (**??**) (zusätzlich) unbeobachtbar zu machende Systemteil heißt die Nulldynamik des Systems.

Die Nulldynamik hat eine Dimension gleich dem Differenzengrad d; mit $1 < d \leq n$.

Ferner hat das System (**??**) mit $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$ eine Nullstellenstruktur im Unendlichen mit einer $n-d$-fachen Nullstelle im Unendlichen. □

[2] für das System (**??**) ist $c(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$

Auch die lineare Ausgangsgleichung in (??) bringt keine Beschränkung der Allgemeinheit, denn hat ein zu untersuchendes System eine nichtlineare Beobachtungsgleichung wie in

$$y(t) = c(\boldsymbol{x}(t)) \qquad , \tag{2.4}$$

dann kann es in einfacher Weise auf die Form in (??) überführt werden, indem $y(t)$ zeitlich abgeleitet wird:

$$\dot{y}(t) = \frac{d}{dt}c(\boldsymbol{x}(t)) = \left[\frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T [\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})u(t)] \qquad . \tag{2.5}$$

Mit dem neuen (erweiterten) Zustandsvektor:

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \in R^{n+1} \tag{2.6}$$

erhalten wir mit $c_{\boldsymbol{x}} = \left[\frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T$

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{z}}(t) & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \\ c_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \\ c_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} u(t) \\ & = & \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{z}(t)) + \boldsymbol{b}^*(\boldsymbol{z}(t))u(t) \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{z}(t) = z_{n+1}(t) \quad ; \quad \boldsymbol{z}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}_0 \\ y(t_0) \end{bmatrix} \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

also ein ALS der hier zu behandelnden Form (??).

Definition 2.4
Ein lokal beobachtbares ALS (??) liegt in *Beobachternormalform* nach Zeitz (1987) vor, wenn sein Zustandsmodell diese Form hat:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & \ddots & & & \vdots \\ & \boldsymbol{O} & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) - \begin{bmatrix} a_0(y, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}) \\ a_1(y, u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-2)}) \\ \vdots \\ a_{n-1}(y, u) \end{bmatrix} \\ & = & \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{x}^*(t) - \boldsymbol{a}(y, \boldsymbol{u}^*) = \boldsymbol{a}_B(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*) \quad ; \quad \boldsymbol{x}^*(t_0) \\ y(t) & = & x_n^*(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) \end{array}\right\} \tag{2.8}$$

$$\text{mit } \boldsymbol{u}^*(t) = \left[u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)\right]^T \tag{2.9}$$

□

Der Name Beobachternormalform rührt daher, daß für ALS in dieser Struktur (**??**) analog zu dem Fall der linearen Systeme ein Identitätsbeobachter, der eine lineare Fehlerdynamik liefert, angegeben werden kann.

So wie es auch eine Vielzahl von Beobachtbarkeits- /Unterscheidbarkeitskriterien gibt, so existieren auch unterschiedliche NBNF. Eine einfacher aufgebaute NBNF ist die von Keller (1986) angegebene:

Definition 2.5
Ein lokal beobachtbares ALS liegt in *Beobachternormalform* vor, wenn es ein Zustandsmodell dieser Form hat:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & \ddots & & \vdots \\ \boldsymbol{O} & & 1 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) - \begin{bmatrix} a_0(y(t)) \\ a_1(y(t)) \\ \vdots \\ a_{n-1}(y(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1(y(t)) \\ b_2(y(t)) \\ \vdots \\ b_n(y(t)) \end{bmatrix} u(t) \\ &= \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{x}^*(t) - \boldsymbol{a}^*(y) + \boldsymbol{b}^*(y) \cdot u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) = x_n^*(t) \qquad . \end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

□

Insbesondere für die ALS in der Form (**??**) ist einfach nachzuweisen, daß nach Transformation auf die zugehörige NBNF Gl. (**??**) (falls sie existiert) ein Identitätsbeobacher mit linearer Fehlerdynamik zu konstruieren ist.

Satz 2.1
Ein ALS liege in der NBNF nach Gl. (**??**) vor:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{a}^*(y(t)) + \boldsymbol{b}^*(y(t)) u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) = x_n(t) \end{aligned}\right\} \qquad . \tag{2.11}$$

Dann liefert ein Beobachter der Form

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{E}_n \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{a}^*(y(t)) + \boldsymbol{b}^*(y(t)) u(t) + \boldsymbol{k}\left[y(t) - \hat{x}_n(t)\right] \tag{2.12}$$

mit dem Koeffizientenvektor $\boldsymbol{k} = [\,k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_{n-1}]^T$ eine Schätzung $\hat{\boldsymbol{x}}(t)$ des Systemzustandes mit einem Schätzfehler

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{x}(t) - \hat{\boldsymbol{x}}(t) \qquad , \tag{2.13}$$

der einer linearen homogenen Differentialgleichung genügt, deren Eigenwerte beliebig vorgebbar sind. □

Der Beweis kann völlig analog wie bei dem linearen Luenbergerbeobachter geführt werden, wie von Keller (1986) gezeigt wurde:

Bild 2.1: Identitätsbeobachter eines ALS in nichtlinearer Beobachternormalform (NBNF) nach Keller (1986)

Wird die Differentialgleichung (**??**) von der des Systems in NBNF (**??**) subtrahiert, erhält man zunächst:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) - \dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{x}(t) - \boldsymbol{E}_n \hat{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{k}\left[y(t) - \hat{x}_n(t)\right] \tag{2.14}$$

Nun kann $y(t) = x_n(t)$ notiert werden zu:

$$x_n(t) = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \tag{2.15}$$

ebenso

$$\hat{x}_n(t) = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right] \hat{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{c}^T \hat{\boldsymbol{x}}(t) \qquad , \tag{2.16}$$

so daß wir für (**??**) erhalten:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \left[\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{k}\boldsymbol{c}^T\right] \tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{F}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \qquad . \tag{2.17}$$

Die Eigenwerte dieser homogenen linearen Differentialgleichung lassen sich über die Koeffizienten des Vektors $\boldsymbol{k}$ beliebig vorgeben:

$$C(\lambda) \quad = \quad |\boldsymbol{I}\lambda - \boldsymbol{F}|$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{vmatrix}
\lambda & 0 & 0 & & k_0 \\
-1 & \lambda & & & k_1 \\
& -1 & \ddots & & \vdots \\
\boldsymbol{O} & & \ddots & \ddots & \vdots \\
& & & -1 & (\lambda + k_{n-1})
\end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{n-1} k_i \lambda^i + \lambda^n \\
&= \prod_{\nu=1}^{n} (\lambda - \lambda_\nu) = 0
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

□

In Bild **??** ist ein Blockschaltbild eines Identitätsbeobachters für ein ALS in NBNF nach Keller dargestellt.

Die NBNF nach Keller (1986) ist deutlich übersichtlicher als die nach Zeitz (1987) und wurde deshalb ausschließlich in dem Bericht Schwarz (1990) verwendet. Diese NBNF stellt aber wesentliche einschränkendere Strukturforderungen an ein System, so daß häufig keine Transformation für ein gegebenes ALS existiert, die die NBNF nach Definition **??** erzeugt. So muß ein BLS schon sehr speziell strukturiert sein (Schwarz 1990; Ingenbleek 1991) damit ein NBNF nach Gl. **??** existiert. Dagegen kann gezeigt werden, daß jedes BLS in die NBNF nach Def. **??** Gl. (**??**) transformiert werden kann.

3 Transformation eines ALS auf NBNF

Liegt ein ALS nach Gl. (??) nicht in einer gewünschten NBNF vor, dann muß versucht werden, eine Transformation zu finden, die das gegebene System in die verlangte NBNF überführt, womit dann gegebenenfalls auch die Existenz dieser NBNF geklärt ist. Je nach Definition der NBNF z. B. Definition ?? oder auch ?? wird eine jeweils spezielle zugehörige Transformation zu suchen sein, die dann auch zusätzlich stark von der Struktur des gegebenen Systems z. B. seinem Differenzengrad (Definition ?? oder ??), abhängt.

Eine notwendige Voraussetzung für die Existenz eines jeden Beobachters ist die vollständige Beobachtbarkeit des gegebenen Systems, die vorab zu klären ist. Hierbei existieren bei nichtlinearen Systemen (NLS) anders als im Falle der linearen Systeme (LS) eine Vielzahl unterschiedlicher Beobachtbarkeitsdefinitionen und damit auch zugehöriger Beobachtbarkeitskriterien (Schwarz 1991). Im Rahmen dieses Berichtes beschränke ich mich auf die lokale (Punkt-)beobachtbarkeit (Birk 1992):

Definition 3.1 [3]
Ein System der Form ALS (??) heißt beobachtbar in einem Punkt $\boldsymbol{x}_p$ des Zustandsvektorraumes, wenn alle Anfangszustände $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ in einer Umgebung U von $\boldsymbol{x}_p$:

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_p\| < \rho \tag{3.1}$$

aus $y(t)$ und $u(t)$ eindeutig rekonstruierbar sind.

Das System ist lokal beobachtbar, wenn diese Eigenschaft für alle $\boldsymbol{x}$ im gesamten Definitionsbereich des Systems also $\forall \boldsymbol{x}_p \in D_x$ und $\forall u(t) \in D_u$ erfüllt ist. □

Die Beobachtbarkeits-Analyse nichtlinearer Systeme basiert auf einer Abbildung der Zustandsgrößen und Eingangsgrößen auf die Ausgangsgrößen des betrachteten Systems (Birk 1992). Einen solchen Zusammenhang bekommt man für hinreichend oft differenzierbare Systemgleichungen (??) durch die Taylorreihenentwicklung der Ausgangsgröße $y(t)$:

$$y(t) = y(0) + \dot{y}(0)t + \ddot{y}(0)\frac{t^2}{2!} + \ldots + y^{(n-1)}(0)\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots \quad . \tag{3.2}$$

Die benötigten $n-1$ Entwicklungskoeffizienten lassen sich als Zeitableitungen der Ausgangsgleichung in Abhängigkeit von $\boldsymbol{x}(t)$ und $u(t)$ berechnen, was die *Beobachtbarkeitsabbildung* $\boldsymbol{y}^*(t)$ liefert:

$$\boldsymbol{y}^*(t) \;=\; \boldsymbol{y}^{[n-1]}(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \\ \frac{d}{dt}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \\ \vdots \\ \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \end{bmatrix}$$

[3] Auch in diesem Abschnitt beschränke ich mich aus Gründen der Übersichtlichkeit auf SISO Systeme mit linearer Ausgangsgleichung der Form (2.1).

$$= \begin{bmatrix} L_f^0 \\ L_f \\ \vdots \\ L_f^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) =: \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t)) \qquad . \tag{3.3}$$

Hierin ist der Differentialoperator L_f mit (??):

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t), u(t)) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t))u(t) \tag{3.4}$$

erklärt zu,

$$\left.\begin{array}{lcl} L_f\gamma & = & \frac{\partial\gamma}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) + \frac{\partial\gamma}{\partial\boldsymbol{u}^*}\dot{\boldsymbol{u}}^* \\ L_f^i\gamma & := & L_\gamma(L_f^{i-1}\gamma) \qquad \text{mit} \qquad L_f^0\gamma := \gamma \qquad , \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

wobei zur Abkürzungen für $u(t)$ und die gegebenenfalls auftretenden zeitlichen Ableitungen verwendet wird:

$$\boldsymbol{u}^*(t) = \left[u(t),\, \dot{u}(t),\, \ldots,\, u^{(n-1)}(t)\right] \qquad . \tag{3.6}$$

Mittels des über (??) eingeführten Vektors $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*)$ ist die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*)$ erklärt als Jakobimatrix von $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*)$ (Birk 1992):

$$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*) = \frac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*) \qquad . \tag{3.7}$$

Das wichtige Ergebnis für die lokale Beobachtbarkeit (Def. ??) fassen wir als Satz zusammen in:

Satz 3.1
Das nichtlineare System (??) ist lokal beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix (??) im gesamten Definitionsbereich $\forall\boldsymbol{x}_p \in D_x\,;\, \forall\boldsymbol{u}^* \in D_u^n$ den Rang n besitzt:

$$\text{Rang } \boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*) = n \qquad ; \forall\boldsymbol{x}_p \in D_x\,; \forall\boldsymbol{u}^* \in D_u^n \qquad . \tag{3.8}$$

□

Die lokale Beobachtbarkeit eines Systems ALS (??) ist eine notwendige Voraussetzung für die Transformation auf die NBNF (??). Zur Bestimmung einer Zustandstransformation des Zustandes $\boldsymbol{x}(t)$ des gegebenen Systems in den Zustandsvektor $\boldsymbol{x}^*(t)$ des Systems in NBNF nach (??) setzen wir an

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t)) \text{ bzw. } \boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{t}^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*) \qquad . \tag{3.9}$$

Diese Transformation ist also in beiden Richtungen von dem in (??) erklärten Vektor aus $u(t)$ und den zeitlichen Ableitungen

$$u^{(i)}(t) = \frac{d^i}{dt^i}u(t) \quad ; i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{3.10}$$

abhängig. Um die Transformation (??) zu bestimmen, muß ein System nichtlinearer partieller Differentialgleichungen über die Jacobi Matrix zu (??) gelöst werden (Isidori 1989, Birk 1992):

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}^*, \boldsymbol{u}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*} = \left[\boldsymbol{s},\, \mathrm{ad}_f \boldsymbol{s}, \ldots,\, \mathrm{ad}_f^{n-1} \boldsymbol{s}\right] \qquad . \tag{3.11}$$

Hierin ist der Differentialoperator (eine erweiterte Lieklammer) als Abkürzung erklärt zu:

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{ad}_f \boldsymbol{s} = [\boldsymbol{f}, \boldsymbol{s}] &= \tfrac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{s} - \tfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f} - \tfrac{\partial \boldsymbol{s}}{\partial \boldsymbol{u}^*} \dot{\boldsymbol{u}}^* \\ \mathrm{ad}_f^i \boldsymbol{s} &= [\boldsymbol{f}, \mathrm{ad}_f^{i-1} \boldsymbol{s}] \quad ; \quad \mathrm{ad}_f^0 \boldsymbol{s} = \boldsymbol{s} \qquad . \end{aligned}\right\} \tag{3.12}$$

In (??) ist ferner $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*)$ ein Startvektor für den Aufbau der gesuchten partiellen Differentialgleichungen, der nach Zeitz (1987) aus der letzten Spalte der inversen Beobachtbarkeitsmatrix bestimmt ist zu:[4]

$$\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Q}_B^{-1}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*)[0\,0\,\ldots\,0\,1]^{-1} \qquad . \tag{3.13}$$

Hat man so das System partieller Differentialgleichungen (??) konstruiert, dann ist die Integration dieser Gleichungen ein im allgemeinen sehr schwieriges Problem, das nur in speziellen Fällen gelingen wird. Für die mich besonders interessierenden BLS gelingt dies aber in letzlich trivialer Weise, womit dann, wie im nächsten Abschnitt dargestellt, für BLS die NBNF nach Zeitz immer existiert, wenn $\boldsymbol{Q}_B$ regulär ist.

Zur Klärung der Verhältnisse wird hier nun noch kurz auf die Transformation auf die NBNF nach Keller (Definition ??) eingegangen, die in Schwarz (1990) bereits einführend behandelt wurde. Bei dieser NBNF wird eine wesentlich übersichtlichere Struktur vorausgesetzt bzw. verlangt. Damit folgt aber auch, daß die Klasse der NLS, für die eine Form nach Gl.(??) existiert, wesentlich kleiner ist. So existiert selbst für die einfachsten NLS, die BLS, nur in Spezialfällen die NBNF nach Definition ?? (Ingenbleek 1991).

Nach Keller (1986) wird für den Zusammenhang zwischen dem ALS in (??) und der NBNF nach (??) eine von $u(t)$ unabhängige Transformation angesetzt.

$$\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad . \tag{3.14}$$

Die zeitliche Ableitung liefert zusammen mit (??):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \frac{d}{dt}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}(t)) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}(t)) \cdot \dot{\boldsymbol{x}}(t) \\ &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}(t))\,[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t))u(t)] \qquad . \end{aligned} \tag{3.15}$$

[4] Zeitz (1987) läßt in der NBNF eine nichtlineare Meßgleichung $y(t) = c^*(\boldsymbol{x}^*)$ zu, weshalb dann in der (??) entsprechenden Gleichung noch ein Term $\frac{\partial c^*}{\partial x_n^*}$ steht, der wegen (??) $c^*(\boldsymbol{x}^*) = [0\,\ldots\,0\,1]^T \boldsymbol{x}^*$ bei den von mir hier behandelten ALS den Wert 1 ergibt.

Ein Vergleich mit der zu (??) gehörenden NBNF in (??) liefert dann diesen Zusammenhang:

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{E}_n \boldsymbol{x}^*(t) - \boldsymbol{a}^*(y(t)) \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{t}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}} \cdot \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t)) = \boldsymbol{b}^*(y(t)) \quad . \tag{3.17}$$

Diese Beziehungen fassen partielle Differentialgleichungen zusammen. Die Gleichung (??) läßt sich bezüglich $\boldsymbol{t}(\boldsymbol{x})$ komponentenweise notieren, wobei aus Abkürzungsgründen die Zeitparameter nicht notiert werden:[5]

$$\left.\begin{array}{rcl} \left[\frac{\partial t_1(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) & = & dt_1(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) - a_0(y) \\ dt_2(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) & = & t_1(\boldsymbol{x}) - a_1(y) \\ & \vdots & \\ dt_n \cdot \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) & = & t_{n-1}(\boldsymbol{x}) - a_{n-1}(y) \end{array}\right\} \quad . \tag{3.18}$$

Nach Umstellen dieser Beziehungen und Einführung des Lie- Differentialoperators erhalten wir die zu lösenden partiellen Differentialgleichungen zu:

$$\left.\begin{array}{rcl} t_{n-1}(\boldsymbol{x}) & = & dt_n(\boldsymbol{x})\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + a_{n-1}(y) = L_a t_n(\boldsymbol{x}) + a_{n-1}(y) \\ t_{n-2}(\boldsymbol{x}) & = & L_a^2 t_n(\boldsymbol{x}) + L_a a_{n-1}(y) + a_{n-2}(y) \\ \vdots & & \\ t_1(\boldsymbol{x}) & = & L_a^{n-2} t_n(\boldsymbol{x}) + L_a^{n-2} a_{n-1}(y) + \ldots + L_a a_2(y) + a_1(y) \\ 0 & = & L_a t_n(\boldsymbol{x}) + L_a^{n-1} a_{n-1}(y) + \ldots + L_a a_1(y) + a_0(y) \quad . \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

Die letzte Gl. in (??) wird von Keller (1986) als nichtlineare charakteristische Gleichung bezeichnet und ist in Analogie zu dem Satz von Cayley-Hamilton für lineare Operatoren zu sehen. Die $a_i(y)$ sind die Terme in der NBNF (??).

Das Gleichungssystem (??) ist nur noch durch die Systemausgangsgleichung

$$y(t) = t_n(\boldsymbol{x}) = x_n^*(t) = [\,0\,0\,\cdots\,0\,1\,]\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \tag{3.20}$$

zu ergänzen. Mit der von Keller (1986) angegebenen Zweistufen-Transformation kann es gelingen die partiellen Differentialgleichungen in (??) zu integrieren und insbesondere die $a_i(y)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ zu bestimmen; und damit dann über (??) auch die $b_i(y)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ der NBNF (??) zu berechnen.

Eine Auswertung dieser Beziehungen für LS und BLS wurde in Schwarz (1990) vorgenommen. Die dort für BLS der Form:

$$\Sigma_{\mathrm{BLS}} \quad \left.\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + [\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}]\, u(t) \\ y(t) & = & \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) \end{array}\right\} \tag{3.21}$$

[5] $dt_i(\boldsymbol{x})$ bezeichnet also einen transponierten - als Zeilenvektor notierten - Gradienten einer Vektorfunktion nach $\boldsymbol{x}$

angegebene Transformation

$$\boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}(t) = \begin{bmatrix} t_1(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ t_n(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

mit

$$\left.\begin{array}{rcl} t_n(\boldsymbol{x}) & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \\ t_{n-1}(\boldsymbol{x}) & = & dt_n(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + a_{n-1}(y(t)) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + a_{n-1}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \\ t_{n-2}(\boldsymbol{x}) & = & dt_{n-1}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + a_{n-2}(y) \\ & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}(t) + a_{n-1}c^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + a_{n-2}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \\ \vdots & & \\ t_1(\boldsymbol{x}) & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{x}(t) + a_{n-1}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{x}(t) + \ldots + a_2\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + a_1\boldsymbol{c}^T(\boldsymbol{x}(t)) \\ 0 & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{x}(t) + a_{n-1}\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^{n-1} + \ldots + a_1\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + a_0\boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \quad , \end{array}\right\} \tag{3.23}$$

worin die a_i die Koeffizienten des charakteristischen Polynomes von $\boldsymbol{A}$ sind, liefert nur dann die NBNF nach Keller, wenn die mit (**??**) transformierte Matrix

$$\boldsymbol{N}^* = \boldsymbol{T}\boldsymbol{N}\boldsymbol{T}^{-1} \tag{3.24}$$

diese Form hat (Ingenbleek 1991):

$$\boldsymbol{N}^* = \begin{bmatrix} & * \\ & * \\ \boldsymbol{O} & * \\ & \vdots \\ & * \end{bmatrix} \quad . \tag{3.25}$$

In (**??**) darf also nur die letzte Spalte von Null verschiedene Elemente haben.

Ferner gilt aber auch, daß abhängig vom Differenzengrad mit $1 \leq d \leq n$ nur die $n-d+1$ ersten Zeilen von $\boldsymbol{N}^*$ mit von Null verschiedenen Elementen besetzt sind, wenn das zugehörige LS (mit $\boldsymbol{N} = \mathbf{o}$) in linearer Beobachternormalform vorliegt; also für $d = n$ können nur die $n^*_{1i}\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ in $\boldsymbol{N}^*$ von Null verschieden sein oder für $d = n-1$ die ersten beiden Zeilen in $\boldsymbol{N}^*$ u.s.w.

Faßt man die beiden Ergebnisse zusammen, hat man

Satz 3.2
Für ein BLS (**??**) mit dem Differenzengrad d nach Definition **??** existiert die NBNF (**??**) nach Keller nur dann, wenn die mit (**??**) und (**??**) transformierte Matrix $\boldsymbol{N}^*$ in (**??**) nur diese von Null verschiedenen Elemente hat

$$n^*_{i,n} \neq 0 \quad \text{mit } i = 1, 2, \ldots, n-d+1\,;\ 1 \leq d \leq n \tag{3.26}$$

□

Die Konsequenz dieses Tatbestandes ist, daß bei den für die Anwendung sehr oft auftretendne BLS mit $d = n$ (Abschnitt 5), die NBNF nach Keller nur existiert, wenn allein das Element n^*_{1n} in (**??**) von Null verschieden ist.

4 Transformation von BLSn. auf NBNF

Die in den Abschnitten 2 und 3 behandelten NBNFn für ALS bzw. die notwendigen Transformationen auf diese Formen werden nun für die einfachsten NLS, den für die Anwendung z. B. bei Antriebsregelungssystemen so interessanten BLS, spezialisiert und ausführlicher diskutiert. Es werden im folgenden SISO-Systeme der Form

$$\Sigma_{\text{BLS}}: \quad \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + [\boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}]\,u(t) \quad ; \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0) \\ y(t) & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \end{array} \tag{4.1}$$

mit $\boldsymbol{x}(t) \in R^n$ und $u(t) \in C^\infty$ behandelt. Für die NBNF nach Zeitz Definition **??** und Gl. (**??**) muß also $u(t)$ hinreichend glatt und mindestens $n-1$ mal zeitlich differenzierbar sein. Es soll nun zu (**??**) die NBNF Gl.(**??**) und insbesondere der Zusammenhang der $a_i(\dots)$ mit $i = 0, 1, \dots, n-1$ mit der BLS-Realisierung $\{\boldsymbol{A},\, \boldsymbol{b},\, \boldsymbol{N},\, \boldsymbol{c}^T\}$ aufgezeigt werden.

Dazu bestimmen wir zunächst die Beobachtbarkeitsabbildung nach Gl.(**??**) mit

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}((t) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}(t)u(t) + \boldsymbol{b}u(t) \quad ; \quad \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{N}u(t) \tag{4.2}$$

und dem Differenzialoperator (**??**) sowie $\boldsymbol{u}^*(t)$ nach (**??**) erhalten wir:

$$\boldsymbol{y}^*(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{c}^T[\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}u(t) + \boldsymbol{b}u(t)] \\ \boldsymbol{c}^T[\boldsymbol{A} + \boldsymbol{N}u][\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{N}\boldsymbol{x}u + \boldsymbol{b}u] + \boldsymbol{c}^T[\boldsymbol{N}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}]\,\dot{u} \\ \vdots \end{bmatrix} = \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t)) \quad . \tag{4.3}$$

Mit (**??**) folgt daraus die Beobachtbarkeitsmatrix zu:

$$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{u}^*) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}^*(t)) = \boldsymbol{c}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \boldsymbol{A} + \boldsymbol{N}u \\ (\boldsymbol{I} + \boldsymbol{N})(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{N}u) + \boldsymbol{N}\dot{u} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad . \tag{4.4}$$

Zunächst ist zu erkennen, daß wegen der Linearität bezüglich $\boldsymbol{x}$ bei den BLS die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{u}^*)$ nicht von $\boldsymbol{x}$ sondern nur von $\boldsymbol{u}^*(t)$ abhängt, was dann ebenso für die Inverse $\boldsymbol{Q}_B^{-1}(\boldsymbol{u}^*(t))$ gilt. Bei nicht näher spezifizierter Systemstruktur, also nicht festgelegtem Differenzengrad d ist $\boldsymbol{y}^*(t)$ und damit $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{u}^*)$ sehr komplex aufgebaut, so daß hier eine weitere Untersuchung keine besonderen Einsichten erbringt. Im Anwendungsfall eines zahlenmäßig parametrisierten Systems muß deshalb zweckmäßigerweise eine rechnergestützte Untersuchung erfolgen (Birk 1992).

Die Verhältnisse werden für den bei praktischen Anwendungen wichtigen Sonderfall des Differenzengrad $d = n$ wesentlich übersichtlicher. Denn dann ist $y(t)$, $\dot{y}(t)$, ..., $y^{(n-1)}(t)$

nicht von $u(t)$ abhängig, womit dann für die Beobachtbarkeitsabbildung (??) gilt:

$$\boldsymbol{y}^*(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{c}^T \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A} \\ \vdots \\ \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{A}^{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \tag{4.5}$$

und daraus für die Beobachtbarkeitsmatrix über (??) folgt:

$$\boldsymbol{Q}_B = [\boldsymbol{c},\, \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{c},\, \ldots,\, (\boldsymbol{A}^T)^{n-1}\boldsymbol{c}]^T \qquad , \tag{4.6}$$

mit der Folge:

Satz 4.1
Ein BLS mit dem Differenzengrad $d = n$ ist dann vollständig - sogar global - beobachtbar, wenn das Matrizenpaar $\{\boldsymbol{c}^T, \boldsymbol{A}\}$ ein vollständig beobachtbares lineares System beschreibt.

□

Die Berechnung der NBNF nach (??) für den Sonderfall $d = n$ ist besonders übersichlich, wenn das BLS in einem ersten Schritt mittels der Transformation auf lineare Beobachtbarkeits-Normalform "vorbehandelt" wird. Durch Anwendung der Transformation (??) und (??) hat das BLS (??) dann diese Form für $d = n$:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & -a_1 \\ & \ddots & & & \\ & \boldsymbol{O} & \ddots & & \\ & & & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} n_{11} & \cdots & n_{1n} \\ & & \\ & \boldsymbol{O} & \\ & & \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t)u(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \quad . \tag{4.7}$$

Bei einem Differenzengrad $d < n$ sind $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{c}^T$ von der in (??) angegebenen Form, während in $\boldsymbol{N}^*$ die ersten $(n-d)+1$ Zeilen und/oder in $\boldsymbol{b}^*$ die ersten $(n-d)$ Elemente von Null verschieden sein können. In Bild **??** ist ein Strukturgraph zu dem transformierten BLS nach Gl. (??) gezeigt.

Ein ALS und damit auch alle BLS haben einen Differenzengrad $d = n$, wenn der Signalfluß vom Eingang zum Ausgang keinen Systemzustand "überspringt": d. h. werden die Systemzustände so nummeriert, daß das Eingangssignal auf den Zustand "1" und der Zustand "n" auf den Systemausgang wirkt, dann dürfen bei einem vollständig steuerbaren und beobachtbaren System bei den in Reihe geschalteten Zuständen jeweils nur der

Bild 4.1: Strukturgraph zu Gl. (4.7)

erste Zustand auf den zweiten, dieser auf den dritten bis hin zum $(n-1)$-ten auf den n-ten einwirken. Verbindungen in "Rückwärtsrichtung" vom i-ten auf Knoten r mit $r \leq i$ sind zulässig. Für ein BLS mit dem Differenzengrad $d = n$ haben wir dieses allgemeine Besetzungsmuster

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} n_{1,1} & \cdots & n_{1,n} \\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \\
\boldsymbol{b} &= \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & \ddots & 0 & c_n \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned}\right\} \quad . \tag{4.8}$$

Aus dieser Besetzungsstruktur folgt dann auch unmittelbar die folgende Besetzung der Beobachtbarkeitsmatrix als untere Dreiecksmatrix:

$$\boldsymbol{Q}_B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & q_{1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & q_{2,n-1} & q_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \iddots & \iddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & 0 & \iddots & & \vdots & \vdots \\ 0 & q_{n-1,2} & \cdots & \cdots & q_{n-1,n-1} & q_{n-1,n} \\ q_{n,1} & q_{n,2} & \cdots & \cdots & q_{n,n-1} & q_{n,n} \end{bmatrix} \quad . \tag{4.9}$$

Die Inverse $\boldsymbol{Q}_B^{-1} := \boldsymbol{Q}_B^*$ ist damit eine obere Dreiecksmatrix und hat dann diese Besetzungsstruktur:

$$\boldsymbol{Q}_B^* = \begin{bmatrix} q^*_{1,1} & \cdots & \cdots & q^*_{1,n} \\ \vdots & & \iddots & \\ \vdots & \iddots & \boldsymbol{O} & \\ q^*_{n,1} & & & \end{bmatrix} \quad , \tag{4.10}$$

wobei insbesondere gilt: $q^*_{1,n} = q^{-1}_{n,1}$. (4.11)

Genau dieses Element wird mit (??) für den Sonderfall $d = n$ benötigt und läßt sich daher sehr einfach bestimmen.

Auch wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_B$ eines BLS bei Differenzengrad $d = n$ nicht von der Steuerung $u(t)$ abhängt, so gilt dies nicht für die zugehörige Transformation (??), wenn ein BLS auf die NBNF nach Zeitz (??) transformiert werden soll. Für BLS hat die Zustandstransformation (??) diese Form:

$$\boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{t}\left(\boldsymbol{x}^*(t), \boldsymbol{u}^*(t)\right) = \boldsymbol{T}\left(\boldsymbol{u}^*(t)\right)\boldsymbol{x}^*(t) \quad ; \quad \boldsymbol{x}^*(t) = \boldsymbol{T}^{-1}\left(\boldsymbol{u}^*(t)\right)\boldsymbol{x}(t) \tag{4.12}$$

mit $\boldsymbol{u}^*(t)$ aus (??).

Soll ein gegebenes BLS auf die NBNF nach Zeitz transformiert werden, dann muß (??) zusammen mit (??) so angewendet werden:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d}{dt}\left\{\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{x}(t)\right\} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*)\dot{\boldsymbol{x}}^* + \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}^*}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{x}^*\dot{\boldsymbol{u}}^* \qquad . \tag{4.13}$$

Umstellen nach $\dot{\boldsymbol{x}}^*(t)$ und einsetzen von (??) zusammen mit (??) liefert die Zustandsgleichung des Systems in NBNF:

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}^*)[\boldsymbol{A}+\boldsymbol{N}u]\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{x}^*+\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{b}u-\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}^*)\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{u}^*}\boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{x}^*\dot{\boldsymbol{u}}^* \qquad . \tag{4.14}$$

Hier ist bereits zu erkennen, daß ein BLS in der NBNF nach Zeitz im allgemeinen kein BLS mehr ist.

Dieser Zusammenhang soll an zwei einfachen Beispielen verdeutlicht werden.

Beispiel 1

Ein BLS mit $d = n = 2$ sei gegeben zu:

$$\left.\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & -a_0 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + \begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)u(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix}u(t) \\
y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t)
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

Die zugehörige Beobachtbarkeitsmatrix ist:

$$\boldsymbol{Q}_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a_1 \end{bmatrix} \Longrightarrow \boldsymbol{Q}_B^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad .$$

Für die Zustandstransformation erhalten wir mit (??) und (??) und dem Startvektor $\boldsymbol{s}$ aus (??):

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}(\boldsymbol{u}^*)\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s} & | & (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{N}u)\boldsymbol{s} \end{bmatrix}\boldsymbol{x}^* = \begin{bmatrix} 1 & n_{1,1}u \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}^* \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{u}^*) = \begin{bmatrix} 1 & -n_{1,1}u \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad . \tag{4.17}$$

Die Auswertung von (**??**) liefert die NBNF des BLS (**??**) zu:

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \left[\begin{array}{c|c} 0 & n_{1,2}u - a_1 + a_1 n_{1,1}u \\ 1 & n_{1,1}u - a_1 \end{array}\right] \boldsymbol{x}^*(t) + \begin{bmatrix} b \\ 0 \end{bmatrix} u(t) + \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & n_{1,1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{u}(t) \boldsymbol{x}^*(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) \end{aligned}\right\} \quad , \tag{4.18}$$

also ein System, das wegen der Abhängigkeit von $\dot{u}(t)$ nicht zur Klasse der BLS gehört.□

Beispiel 2
Ein BLS mit $d = n = 3$ habe diese Systemrealisierung $\{\boldsymbol{A}, \boldsymbol{N}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}^T\}$ mit

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} n_{1,1} & n_{1,2} & n_{1,3} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{c}^T &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} . \tag{4.19}$$

Die Transformation auf NBNF nach Zeitz liefert dann dieses System:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \left[\begin{array}{c|c|c} 0 & 0 & n_{1,1}\frac{d^2u}{dt^2} + (-n_{1,2} - a_2 n_{1,1})\frac{du}{dt} + (n_{1,3} + a_2 n_{1,2} + a_1 n_{1,1})u - a_0 \\ 1 & 0 & -2n_{11}\frac{du}{dt} + (n_{1,2} + a_2 n_{1,1})u - a_1 \\ 0 & 1 & n_{1,1}u - a_2 \end{array}\right] \times \\ &\times \quad \boldsymbol{x}^*(t) + \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^*(t) \qquad , \end{aligned} \tag{4.20}$$

das neben $u(t)$ auch von $\frac{d}{dt}u(t) = \dot{u}(t)$ und $\ddot{u}(t)$ abhängt. □

Diese beiden Beispiele zeigen deutlich, daß zwar für BLS immer eine NBNF existiert, daß aber eine praktische Realisierung z. B. beim Einsatz in einem Beobachter faktisch ausgeschlossen ist, da zeitliche Ableitungen der Stellgröße benötigt werden. Für den Einsatz bei der Lösung technischer Systeme ist die NBNF nach Keller noch wesentlich besser geeignet, da für BLS die Zustandstransformation $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{x}^*$ eine lineare Transformation ist, die weder von $\boldsymbol{x}(t)$ noch von $u(t)$ abhängt. DIe Existenzbedingung ist aber sehr streng und wird häufig nicht erfüllt sein (s. a. Satz **??**).

5 Der Differenzengrad $d = n$

Aus systemtheoretischer Sicht ist ein Differenzengrad $d = n$, der besagt, daß ein ALS keine endliche Nulldynamik sondern ausschließlich eine Nullstruktur im Unendlichen hat, ein sehr spezieller Sonderfall. Dieser Sonderfall ist vor allem dadurch ausgezeichnet, daß viele Problemstellungen z. B. Beobachtbarkeit, Steuerbarkeit, Beobachterentwurf, Linearisierung, Entkopplung von Mehrgrößensystemen u. v. a. besonders einfach und/oder auch vollständig lösbar sind (Isidori 1989, Schwarz 1991).

Bemerkenswert ist aber, daß dieser systemtheoretische Sonderfall $d = n$ bei einer Vielzahl von technischen Systemen der Normalfall ist und zwar immer dann, wenn Speicher in Kaskaden angeordnet sind (Bild **??**). Diese Speicher können für Energie - potentielle oder kinetische - und/oder Masse und/oder Information sein.

Für das Strukturmerkmal $d = n$ ist entscheidend, daß zwar alle "Rückwirkungen" von hinten nach vorne erlaubt sind, daß aber die Stellgröße nur auf den ersten Speicher wirkt und keine Signalverbindungen zum Ausgang hin gerichtet sind, die einzelne Speicher "überbrücken". Beispiele für Systeme mit $d = n$ sind der in Bild **??** als Geräteplan und Blockschaltbild dargestellte Gleichstromantrieb und der elektrohydraulische Antrieb in Bild **??**.

Bild 5.1: Blockschaltbild eines physikalischen Systems mit dem Strukturmerkmal $d = n$.

Bild 5.2: Gleichstromantrieb als Beispiel für ein System mit $d = n$; a) Geräteplan b) Blockschaltbild.

Bild 5.3: Elektrohydraulischer Antrieb a) Geräteplan b) Blockschaltbild.

6 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht wurden die Beobachterstrukturen für bilineare Systeme in nichtlinearer-Beobachter-Normalform (NBNF) nach Zeitz bzw. Keller sowie die damit zusammenhängende Transformation des Systemzustandes ausführlich besprochen. Insbesondere wurde der Sonderfall: Differenzengrad $d = n$, der bei vielen technischen Systemen anzutreffen ist, genauer untersucht.

Auf die hier dargestellten Ergebnisse aufbauend soll einmal die Zustandsregelung bilinearer Systeme mit Zustandsschätzung genauer untersucht werden, z. B. darauf, ob ähnlich wie bei linearen Systemen ein Seperationsprinzip bezüglich der Stabilisierung der geregelten Systeme bzw. auch bei der Optimierung stochastisch erregter Systeme existiert. Eine andere Arbeitsrichtung betrifft den Beobachterentwurf für etwas komplexere nichtlineare Systeme wie z. B. zustandsaffine Systeme oder Polynomsysteme, für die dann ähnlich wie bei den hier behandelten BLS explizitere Ergebnisse gefragt sind.

7 Literatur

Birk, J. 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben.* Diss. Universität Stuttgart.

Birk, J. und M. Zeitz. 1988. Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems. *Int. J. Control* 47, 6, 1823-1836.

Ingenbleek, R. 1991. *Zur Existenz der nichtlinearen Beobachternormalform für analytisch lineare Systeme.* Forschungsnotiz 10.91. MSRT, UNI-Duisburg.

Ingenbleek, R. 1992. *Die nichtlineare Beobachternormalform am Beispiel eines bilinearen Systems mit vollem Differenzengrad.* Forschungsnotiz 5.92. MSRT, UNI-Duisburg.

Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems.* Berlin u.a.: Springer.

Keller, H. 1986. Entwurf nichtlinearer Zeitvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. *at* 34, 271-274, 326-331.

Luenberger, D.G. 1963. Observing the state of a Linear System. *IEEE Tr. MIL*-8, 74-80.

Walcott, B.L., M.J. Corless und S.H. Żak. 1987. Comparative study of non-linear state-observation techniques. *Int. J. Control* 45, 6, 2109-2132.

Williamson, D. 1977. Obserbation of Bilinear Systems with Application to Biological Control. *Automatica* 13, 243-254.

Schwarz, H. 1989. *Differenzengrad und Nulldynamik für Analytisch-Lineare-Systeme.* Forschungsbericht 5/89 MSRT, UNI-Dusiburg.

Schwarz, H. 1990. *ALS-Beobachter und Filter.* Forschungsbericht 7/90 MSRT, UNI-Duisburg.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme.* München, Wien: Oldenbourg.

Svaricek, F. 1992. Persönliche Mitteilung zur Anwendung von Strukturgraphen zur Ermittlung des Differenzengrades von ALS und BLS.

Zeitz, M. 1984. Observability canonical (phase-variable) forms for non-linear time variable systems. *Int. J. System Science* 15, 9 , 949- 958.

Zeitz, M 1985. Canonical forms for nonlinear systems. in Jakubczyk, K.B. und W. Respondek und K. Tchon (Ed.) *Geometric Theory of Nonlinear Control Systems.* Warschau: sc. papers of the Inst. of Cybernetics Techn. Univ.

Zeitz, M 1987. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 9, 149-156