Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme

T. Wey

Forschungsbericht Nr. 10/92

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der vorliegende Forschungsbericht setzt sich mit dem Einsatz der *Differentialalgebra* für die Beschreibung von mathematischen Zusammenhängen im Bereich der nichtlinearen Systemtheorie auseinander. Gegenüber anderen Ansätzen weist die Differentialalgebra wesentliche Vorteile auf. U. a. ist es mit ihrer Hilfe auf einfache und mathematisch elegante Weise möglich, nichtlineare Differentialgleichungen und damit nichtlineare Regelungssysteme zu modellieren und zu analysieren. Mittlerweile sind eine ganze Reihe von aussagekräftigen Systemkenngrößen, die in der linearen Theorie seit langem bekannt sind, für nichtlineare Systeme differentialalgebraisch definiert worden. So unter anderem der *differentielle Rang* und die *Struktur im Unendlichen* eines analytischen Systems mit linearer Steuerung (ALS).

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
AS	Analytisches System
BLS	Bilineares System
LS	Lineares System
NU	Nullstellen im Unendlichen
ZLS	Zustandslineares System

Formelzeichen

$\boldsymbol{A}$	Jacobi-Matrix
$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$	Systemvektor
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$	Eingangsmatrix
$\boldsymbol{C}$	Ausgangsmatrix
c	konstantes Element eines Körpers
E	Körper
$E(\boldsymbol{u})$	Körper aller rationalen Funktionen in $\boldsymbol{u}$ mit Koeffizienten in E
$\mathcal{E}$	Vektorraum
$\mathcal{F}$	differentieller Vektorraum
F	Körper
G	Zwischenkörper
I	differentielles Ideal
K	differentieller Körper der rationalen Funktionen in $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \ldots$
k	differentieller Körper aller Koeffizienten einer System-Dgl.
$k{<}\boldsymbol{u}{>}$	differentieller Körper aller rationalen Funktionen in den Variablen $\boldsymbol{u}^{(i)}$ mit Koeffizienten in k
L	differentieller Körper
M	differentieller Zwischenkörper
m	Dimension des Eingangsvektors $\boldsymbol{u}(t)$
n	Dimension des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(t)$
$P(\cdot)$	Polynom
p	Dimension des Ausgangsvektors $\boldsymbol{y}(t)$
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{Q}[x(t)]$	Menge aller Polynome in $x(t)$ mit rationalen Koeffizienten
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbb{R}[t]$	Menge aller reellen Polynome in der Variablen t
S	Teilmenge eines Körpers

S_{max}	Transzendenzbasis einer Körpererweiterung
T	Teilmenge eines differentiellen Körpers
T_{max}	Transzendenzbasis einer differentiellen Körpererweiterung
U	Teilmenge eines Vektorraums
$\boldsymbol{u}_i$	Vektoren in U
$\boldsymbol{u}(t)$	Eingangsvektor
V	Vektorraum
$\boldsymbol{v}_i$	Vektoren in V
W_1, W_2	differentielle Vektorräume
$\boldsymbol{w}$	zyklisches Element eines differentiellen Vektorraums
$\boldsymbol{x}(t)$	Zustandsvektor
$\boldsymbol{y}(t)$	Ausgangsvektor
δ	primitives Element
ν	Anzahl Variablen in einem Polynom
$\boldsymbol{\xi}$	Menge der Zustandsvariablen
ρ^*	differentieller Rang
ρ_k	Dimension des Vektorraums $\mathcal{E}_k$
σ_k	Anzahl der NU der Ordnung kleiner oder gleich k
Ω	differentieller Grundkörper

Sonstige Zeichen

$/$	Körpererweiterung
$A[x]$	Körper der Polynome in x mit Koeffizienten in A
$A(x)$	Körper der rationalen Funktionen in x mit Koeffizienten in A
$A\{x\}$	Körper der Polynome in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ mit Koeffizienten in A
$A{<}x{>}$	Körper der rationalen Funktionen in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ mit Koeffizienten in A
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\cap$	Schnittmenge
$\subset, \subseteq$	Teilmenge
$\in$	Element von
$\notin$	kein Element von
$\forall$	für alle
trg	Transzendenzgrad
diff. trg	differentieller Transzendenzgrad
$\dim \mathcal{E}$	Dimension des Vektorraums $\mathcal{E}$
rang	Rang einer Matrix
span $\{\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_d\}$	der durch die angegebenen Vektoren aufgespannte Vektorraum

1 Einleitende Übersicht

Der vorliegende Forschungsbericht befaßt sich mit dem Einsatz der *Differentialalgebra* zur Analyse von Regelungssystemen. Insbesondere werden die spezifischen Vorteile dieses Ansatzes bei der Bearbeitung von Fragestellungen der nichtlinearen Systemtheorie erläutert.

Die Differentialalgebra ist eine mathematische Theorie, die in den fünfziger Jahren dieses Jahrhunderts durch J. F. Ritt (1950) mit der Intention begründet wurde, für Differentialgleichungen den gleichen Rahmen zu bilden, den die kommutative Algebra für algebraische Gleichungen bedeutet. Erst in den letzten Jahren ist dieses Werkzeug verstärkt für die Analyse von Regelungssystemen und hier im speziellen von nichtlinearen Systemen eingesetzt worden. Seitdem haben sich eine Reihe von Wissenschaftlern, u. a. Fliess (1990), mit dieser Thematik beschäftigt, so daß mittlerweile ein umfangreicher Teil der systemtheoretischen Zusammenhänge bei nichtlinearen Systemen mit Hilfe der Differentialalgebra beschreibbar ist.

Im weiteren werden in Abschnitt 2 zunächst die grundlegenden Begriffe der „klassischen“ Algebra kurz erläutert, um eine Basis für die Einführung der Differentialalgebra zu erhalten. Hauptsächlich sind hierbei wichtige Zusammenhänge aus der *Körpertheorie*, einem zentralen Thema der Algebra, von Interesse. Außerdem wird auf die Eigenschaften von abstrakten *Vektorräumen* eingegangen.

In Abschnitt 3 folgt mit den Grundlagen der Differentialalgebra der eigentliche Schwerpunkt dieses Berichts. Die Einführung in die Begriffe und Zusammenhänge ist so gehalten, daß es mit ihrer Hilfe möglich sein sollte, Literatur im Bereich der differentialalgebraisch basierten Systemanalyse leicht zu verstehen, zumal eine Reihe von ausführlichen Beispielen enthalten sind. Darüber hinaus ist der Bericht so angelegt, daß er wie ein „Nachschlagewerk“ für differentialalgebraische Begriffe verwendet werden kann. Eine umfassende Wiedergabe der Differentialalgebra ist im Rahmen eines Forschungsberichts nicht realisierbar, hierfür muß auf die angegebenen Quellen verwiesen werden. Vor allem Kaplansky (1976) stellt eine gute Einführung in die tieferen Zusammenhänge dar.

Abschnitt 4 befaßt sich ausführlich mit der Anwendung der differentialalgebraischen Begriffe auf nichtlineare Systeme im allgemeinen und speziell die Klasse der analytisch linearen Systeme (ALS). Außerdem werden verschiedene Kenngrößen, die von linearen Systemen her bekannt sind, mit Hilfe der Differentialalgebra auch für nichtlineare Systeme definiert, so z. B. der *Rang eines Systems* oder auch dessen *Struktur im Unendlichen*.

Der letzte Abschnitt beinhaltet eine Zusammenfassung der vorliegenden Ausarbeitung und gibt einen Ausblick auf Anwendungsmöglichkeiten der Differentialalgebra im Bereich der Systemanalyse.

2 Grundlagen der Algebra

Zur Einführung der grundlegenden Begriffe der Differentialalgebra ist es sinnvoll, zuvor die korrespondierenden Bereiche in der „klassischen" Algebra zu erläutern. Diese bilden, aufgrund der zahlreichen Analogien zwischen beiden Theorien, eine geeignete Basis für die anschließende Beschreibung der wichtigsten Elemente der Differentialalgebra .

2.1 Körpertheorie

Eine zentrale Thematik der Algebra ist die *Körpertheorie*. Die mit ihr erarbeiteten Ergebnisse werden in vielen Bereichen der Mathematik verwendet, hauptsächlich in weiteren Teilen der Algebra, in der algebraischen Zahlentheorie, der Geometrie und der Kombinatorik. Zu ihrer Einführung ist eine Anzahl von Begriffsdefinitionen notwendig.

Ein *Körper* E ist eine Menge, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist. In jedem Körper sind grundsätzlich zwei Verknüpfungen, *Addition* und *Multiplikation*, definiert. Diese erfüllen sowohl das Assoziativ- als auch das Kommutativ- und Distributivgesetz (Meyberg 1976):

$$
\begin{aligned}
a+(b+c) &= (a+b)+c \\
a\cdot(b\cdot c) &= (a\cdot b)\cdot c \\[1ex]
a+b &= b+a \\
a\cdot b &= b\cdot a \\[1ex]
a\cdot(b+c) &= a\cdot b + a\cdot c \qquad .
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Außerdem gilt für alle $a, b \in E$ der wesentliche Zusammenhang (Haddak 1989)

$$
(a+b), \quad (a-b), \quad ab, \quad \frac{a}{b} \quad \in \quad E \qquad . \tag{2.2}
$$

Beispiel 2.1
Demnach sind z. B. in einem Körper E mit den Elementen 1 und 3 notwendigerweise auch die Elemente enthalten, die sich durch wiederholte Anwendung der Operatoren gemäß Gl. (2.2) ergeben:

$$
\begin{aligned}
1,3 \in E \quad &\Rightarrow \quad \frac{1}{3}, 2, 3, 4 && \in E \\
&\Rightarrow \quad 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, \ldots, 5, 6, 7, 8, \ldots && \in E \\
&\vdots && .
\end{aligned}
\tag{B 2.1-1}
$$

Bereits der durch die Zahlen 1 und 3 *generierte* Körper E beinhaltet also unendlich viele Elemente.

Eine der wichtigsten Operationen in der Körpertheorie ist die Bildung einer sogenannten *Körpererweiterung*. Wenn mit F ein Unterkörper des Körpers E ($F \subseteq E$) bezeichnet wird, so heißt E eine Körpererweiterung über F. Diese Operation läßt sich abgekürzt durch die Schreibweise E/F wiedergegeben. Generell teilen sich Körpererweiterungen in zwei Klassen auf:

a) Ein Element $a \in E$ wird als *algebraisch* über F bezeichnet, wenn ein Polynom P mit beliebigen Koeffizienten aus F den Zusammenhang $P(a) = 0$ erfüllt.

 Beispiel 2.2
 Man betrachte die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$. Die Zahl $\sqrt{2}$ aus der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist algebraisch über der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, weil $\sqrt{2}$ eine Lösung des Polynoms $x^2 - 2 = 0$ ist, welches nur Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ aufweist.

 Eine Körpererweiterung E/F ist nur dann algebraisch, wenn alle Elemente von E algebraisch über F sind.

b) Ein Element $a \in E$ heißt dann und nur dann *transzendent* über F, wenn es nicht algebraisch über F ist. Anschaulich bedeutet diese Aussage, daß kein Polynom P über F existiert, für das $P(a) = 0$ gilt. Transzendente Zahlen können demnach nicht mit algebraischen Gleichungen über F beschrieben werden.

 Eine Körpererweiterung E/F ist transzendent, wenn mindestens ein Element von E transzendent über F ist.

 Beispiel 2.3
 Die Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ist transzendent, weil u. a. für $e \in \mathbb{R}$ und $\pi \in \mathbb{R}$ keine endlichen Polynome P mit rationalen Koeffizienten existieren, die den Zusammenhang $P(e, \pi) = 0$ erfüllen (vgl. Venn-Diagramm in Bild 2.1).

Es werden zwei Körper mit der Eigenschaft $F \subseteq E$ vorausgesetzt. Betrachtet man die Elemente $\{\xi_i | i = 1, \ldots, \mu\}$, welche eine Teilmenge S von E darstellen, so werden diese als *F-algebraisch abhängig* bezeichnet, wenn ein Polynom $P(x_1, \ldots, x_\nu)$ über F derart existiert, daß

$$P(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_\nu}) = 0 \qquad ; \quad i_j = 1, \ldots, \mu\,; \quad \nu = 2, \ldots, \mu \tag{2.3}$$

erfüllt wird. Ist eine Teilmenge $S \subseteq E$ nicht algebraisch abhängig, so wird sie *F-algebraisch unabhängig* genannt. Mit anderen Worten, eine Menge ist F-algebraisch unabhängig, wenn keines ihrer Elemente durch ein Polynom in den übrigen Elementen ausgedrückt werden kann. Bezeichnet man mit S_{max} eine bezüglich der Elementenanzahl *maximale*,

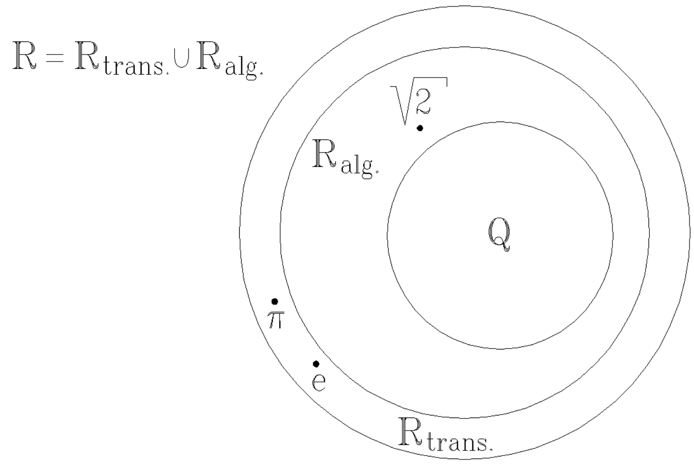

Bild 2.1: Venn-Diagramm der Körpererweiterung $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ mit maximalem, transzendentem ($\mathbb{R}_{\text{trans.}}$) und algebraischem ($\mathbb{R}_{\text{alg.}}$) Anteil

F-algebraisch unabhängige Teilmenge von E, so nennt man diese auch eine *Transzendenzbasis* der Körpererweiterung E/F. Es gilt die wichtige Eigenschaft, daß jede transzendente Körpererweiterung E/F sich immer aus einer maximalen, transzendenten Erweiterung S_{max} und einer algebraischen Erweiterung zusammensetzt (Bild 2.1).

Beliebige Transzendenzbasen S_{max} einer Körpererweiterung besitzen immer die gleiche Mächtigkeit, d. h. sie haben die gleiche Anzahl von Elementen. Diese für eine Körpererweiterung charakteristische Anzahl wird auch als *Transzendenzgrad* bezeichnet:

$$\operatorname{trg}(E/F) = |S_{max}| = \begin{cases} n & \text{für} \quad S_{max} \text{ hat } n \text{ Elemente} \\ \infty & \text{für} \quad S_{max} \text{ ist unendlich} \end{cases} . \tag{2.4}$$

Beispiel 2.4 (Meyberg 1976)
a) Der Körper $\mathbb{Q}'$ werde durch die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ und die beiden Elemente $\{e, \sqrt{2}\}$ generiert. Dies wird im allgemeinen durch die Schreibweise $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}(e, \sqrt{2})$ abgekürzt. $\mathbb{Q}'$ ist wegen der Eulerschen Zahl e transzendent über $\mathbb{Q}$. Die maximal algebraisch unabhängige Teilmenge ergibt sich zu $S_{max} = \{e\}$, so daß der Transzendenzgrad der Körpererweiterung $\mathbb{Q}'/\mathbb{Q}$ genau 1 beträgt. Die durch e generierten Elemente in $\mathbb{Q}'$ wie z. B. $e^2, e^3, \ldots$ können immer durch Polynome in e ausgedrückt werden. Sie sind demzufolge nicht algebraisch unabhängig von e und tragen deshalb nicht zu einer Erhöhung des Transzendenzgrades bei.

b) Sind τ_1 und τ_2 Unbestimmte über $\mathbb{Q}$, dann ist die Körpererweiterung $E/\mathbb{Q}$ mit $E = \mathbb{Q}(\tau_1, \tau_2, \sqrt{\tau_1}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ transzendent. Die maximalen, algebraisch unabhängigen Teilmengen von E sind entweder $S_{max} = \{\tau_1, \tau_2\}$ oder $S_{max} = \{\sqrt{\tau_1}, \tau_2\}$, der Transzendenzgrad ergibt sich damit zu 2. Eine algebraisch unabhängige Teilmenge S_{max} mit 3 Elementen existiert nicht, da für beliebige τ_1 ein Polynom mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ existiert, so daß $P(\tau_1, \sqrt{\tau_1}) = 0$ gilt.

Ein wesentlicher Zusammenhang im Bereich der Körpertheorie basiert auf der *Gradformel*. Und zwar läßt sich bei 3 gegebenen Körpern E, F und G, für die $F \subseteq G \subseteq E$ gilt, aus den Transzendenzgraden von E/G und G/F ein Transzendenzgrad für E/F ableiten (Meyberg 1976):

$$\operatorname{trg}(E/F) = \operatorname{trg}(E/G) + \operatorname{trg}(G/F) \quad . \tag{2.5}$$

2.2 Vektorräume

Ein *Vektorraum* $(V, +, \cdot, F)$ über einem Körper F entspricht einer nichtleeren Menge V, für deren Elemente eine Addition '+', eine Multiplikation '·' und ein Körper F derart erklärt sind, daß u. a. gilt (Bronstein und Semendjajew 1987):

$$\begin{array}{rrcl l rcl rcl}
1. & \alpha \cdot \boldsymbol{v} & \in & V & \forall & \alpha & \in & F; & \boldsymbol{v} & \in & V, \\
2. & (\alpha+\beta) \cdot \boldsymbol{v} & = & \alpha \cdot \boldsymbol{v} + \beta \cdot \boldsymbol{v} & \forall & \alpha, \beta & \in & F; & \boldsymbol{v} & \in & V, \\
3. & \alpha \cdot (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) & = & \alpha \cdot \boldsymbol{v}_1 + \alpha \cdot \boldsymbol{v}_2 & \forall & \alpha & \in & F; & \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 & \in & V, \\
4. & (\alpha\beta)\boldsymbol{v} & = & \alpha(\beta\boldsymbol{v}) & \forall & \alpha, \beta & \in & F; & \boldsymbol{v} & \in & V.
\end{array}$$

Mehrere Eigenschaften eines Vektorraums sind erwähnenswert. Zum einen ist es nicht notwendig, daß Elemente von V miteinander multipliziert werden können. Zum anderen stellt die Multiplikation '·' eine Funktion $F \cdot V \to V$ dar, wobei Elemente von F im allgemeinen als Skalare und Elemente von V als Vektoren bezeichnet sind. Häufig werden als Körper F die Mengen der reellen oder komplexen Zahlen verwendet, man spricht dann auch von einem *reellen Vektorraum* bzw. einem *komplexen Vektorraum*.

Beispiel 2.5
Sei $\mathbb{R}^2$ die Menge aller Paare $[r_1, r_2]^T$ mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $(\mathbb{R}^2, +, \cdot, \mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum, in dem '+' und '·' wie folgt definiert sind (Shapiro 1975):

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 + r_4 \end{bmatrix} \\
r \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} r r_1 \\ r r_2 \end{bmatrix} \quad .
\end{aligned} \tag{B 2.5-1}$$

Eine Teilmenge U von Vektoren in V heißt *linear unabhängig*, wenn sich kein Element $\boldsymbol{u} \in U$ durch eine Linearkombination der übrigen Elemente $\boldsymbol{u}_i \in U;\ \forall\ \boldsymbol{u}_i \neq \boldsymbol{u}$ erzeugen läßt. In Bild 2.2 sind sowohl eine linear unabhängige Teilmenge (U) als auch eine linear abhängige Teilmenge ($\bar{U}$) des $\mathbb{R}^3$ dargestellt. Eine *maximale*, linear unabhängige Menge U_{max} wird auch als *Basis* von V bezeichnet. Alle Basen eines Vektorraums V haben immer die gleiche Anzahl von Elementen, diese Anzahl entspricht gerade der *Dimension* von V.

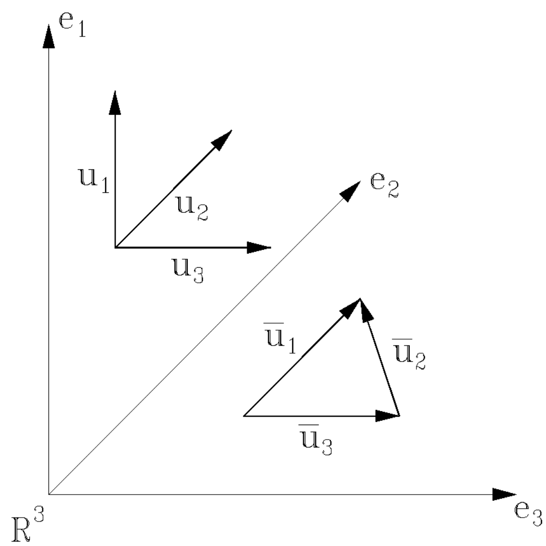

Bild 2.2: Linear unabhängige ($U = \{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$) und linear abhängige Teilmengen ($\bar{U} = \{\bar{\boldsymbol{u}}_1, \bar{\boldsymbol{u}}_2, \bar{\boldsymbol{u}}_3\}$) des $\mathbb{R}^3$

Beispiel 2.6
Eine Basis des reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ kann durch die drei Einheitsvektoren $\boldsymbol{e}_1 = [1,0,0]^T$, $\boldsymbol{e}_2 = [0,1,0]^T$ und $\boldsymbol{e}_3 = [0,0,1]^T$ beschrieben werden. Neben dieser existieren unendlich viele andere Basen, die aber alle eine Dimension von 3 gemeinsam haben (z. B. $\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3\}$ in Bild 2.2).

3 Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra

Die Differentialalgebra wurde mit der Intention eingeführt, die aus der herkömmlichen Algebra bekannten Grundsätze so aufzubereiten, daß sie auf Differentialgleichungen anwendbar sind. Voraussetzung hierfür ist folglich, daß sich die Differentialgleichungen algebraisch in ihren Variablen und deren Ableitungen verhalten. Sie dürfen also keine Funktionen wie *sin*, *cos* etc. enthalten, sondern müssen aus Polynomen aufgebaut sein. Diese Forderung schränkt den Wirkungsbereich der Differentialalgebra zunächst deutlich ein, es läßt sich aber zeigen, daß eine Reihe von nichtalgebraischen Differentialgleichungen in algebraische umgewandelt werden können (Fliess 1990).

3.1 Nichtalgebraische Differentialgleichungen

Betrachtet man z. B. die Differentialgleichung eines Pendels

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \qquad , \tag{3.1}$$

so kann diese in der vorliegenden Form nicht mit Hilfe der Differentialalgebra analysiert werden. Bedenkt man aber, daß

$$y = \sin x \tag{3.2}$$

die Lösung der algebraischen Differentialgleichung

$$\dot{x}^2 y^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 \tag{3.3}$$

darstellt, so kann Gl. (3.1) alternativ auch als algebraische Differentialgleichung

$$(x^{(3)})^2 + (\dot{x}\ddot{x})^2 = \omega^4 \dot{x}^2 \tag{3.4}$$

geschrieben werden[1].

Dieses Verfahren führt für *alle* die Differentialgleichungen zum Erfolg, deren Koeffizienten algebraischen Differentialgleichungen genügen (Fliess 1990). Modelle realer Systeme erfüllen im allgemeinen diese Voraussetzung, so daß sich mit Hilfe der Differentialalgebra eine große Anzahl von systemtheoretisch relevanten Fragestellungen bearbeiten läßt.

3.2 Differentielle Körper

In Abschnitt 2 wurden die Grundlagen der herkömmlichen Algebra und hier im speziellen der Körpertheorie wiedergegeben. In Analogie zu den dort definierten Begriffen wird jetzt eine *differentielle Körpertheorie* eingeführt.

Ein *differentieller Körper* K ist wiederum eine Menge, in der neben den schon genannten Verknüpfungen Addition und Multiplikation auch eine *einfache Differentiation* d/dt definiert ist[2]. Diese entspricht den bekannten Regeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a+b) &= \dot{a} + \dot{b} \\ \frac{d}{dt}(ab) &= \dot{a}b + a\dot{b} \qquad \forall\, a,b \in K \qquad . \end{aligned} \tag{3.5}$$

Das Ergebnis einer Differentiation in K muß, im Gegensatz zu Addition und Multiplikation, nicht notwendigerweise wieder in K enthalten sein. Eine Teilmenge I von K, für deren Elemente solch ein Zusammenhang $a \in I \Rightarrow \dot{a} \in I$ erfüllt ist, heißt ein *differentielles Ideal*. Eine Differentiation der Elemente von I ist demzufolge immer eine eine Abbildung $I \rightarrow I$ (Kaplansky 1976). Dieser Sachverhalt ist in Bild 3.1 graphisch dargestellt.

Beispiel 3.1

a) Die Menge S aller Übertragungsfunktionen in einer Variablen s, die nicht notwendigerweise echt gebrochen rational sein müssen, stellt einen differentiellen Körper

[1] Das Ergebnis aus Gl. (3.4) läßt sich leicht verifizieren, denn mit der Substitution $y = \sin x$ folgt aus (3.1) sowohl $\ddot{x} = -\omega^2 y$ als auch $x^{(3)} = -\omega^2 \dot{y}$. Stellt man dann (3.3) noch nach $\dot{x}^2$ um und setzt die gefundenen Ergebnisse in (3.4) ein, so erhält man die Identität.

[2] Die hier gemachten Betrachtungen bleiben auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränkt, d. h., daß die Aussagen nur für *gewöhnliche differentielle Körper* mit einer einzelnen Differentiation d/dt zutreffen, nicht aber für Körper mit mehreren partiellen Differentiationen.

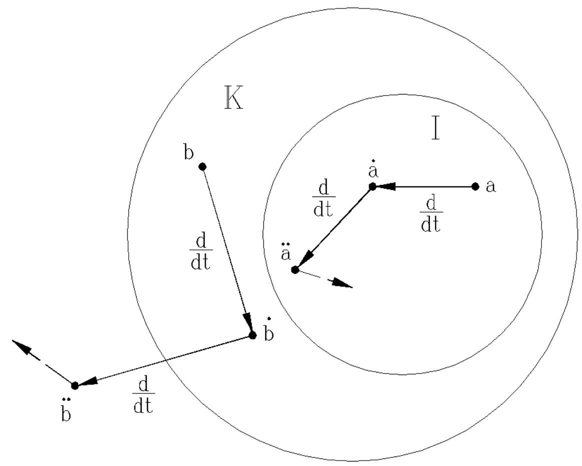

Bild 3.1: Differentielles Ideal I eines Körpers K

dar, in dem eine Differentiation d/ds definiert ist. Alle Ergebnisse, die sich durch Anwendung des Differentiationsoperators auf Elemente von S ergeben, sind wiederum Übertragungsfunktionen in s, also im Körper S enthalten, wie z. B.:

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{1+s}\right) = -\frac{1}{(1+s)^2} \quad \in \quad S \quad . \tag{B 3.1-1}$$

Folglich ist S ein differentielles Ideal.

b) Unter der Notation $\mathbb{Q}[x(t)]$ wird die Menge aller Polynome in einer zeitabhängigen Variablen $x(t)$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ verstanden. Nun soll $\mathbb{Q}[x(t)]$ als differentieller Körper mit einer einzelnen Differentiation d/dt angesehen werden. Nicht alle zeitlichen Ableitungen der Elemente von $\mathbb{Q}[x(t)]$ sind wiederum in diesem Körper enthalten, was sich anhand von

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + x(t) + 1) = 2x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t) \quad \notin \quad \mathbb{Q}[x(t)] \quad . \tag{B 3.1-2}$$

einfach veranschaulichen läßt. Demzufolge ist der Körper $\mathbb{Q}[x(t)]$ kein differentielles Ideal.

In Erweiterung zu der in Beispiel 3.1 verwendeten Bezeichnung $A[x]$ für die Menge aller Polynome in x mit Koeffizienten in A wird im folgenden die Notation $A(x)$ für die Menge aller rationalen Funktionen in x mit Koeffizienten in A verwendet. Dies deckt sich mit der in Beispiel 2.4 verwendeten Bezeichnung $\mathbb{Q}(e)$, da durch die Operatoren aus Gl. (2.2) gerade alle rationalen Funktionen in e generiert werden. Sind mit a_i, b_i beliebige Elemente von A bezeichnet, so können alle Elemente in $A(x)$ durch

$$\frac{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots} \tag{3.6}$$

dargestellt werden. Analog bestehen differentielle Körper $A\{x\}$ aus der Menge aller *differentiellen Polynome* in der Variablen x mit Koeffizienten in A, was gleichbedeutend ist mit der Menge aller Polynome in den Variablen $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots\}$ mit Koeffizienten in A. $A{<}x{>}$ schließlich bezeichnet alle *differentiell rationalen Funktionen* in den Variablen $x^{(i)}$ mit Koeffizienten in A. Gegenüber $A(x)$ sind in $A{<}x{>}$ also zusätzlich Terme wie z. B.

$$\dot{x}, \dot{x}^2, \ldots, \ddot{x}, \ddot{x}^2, \ldots, \frac{\dot{x}}{\ddot{x}}, \frac{\dot{x}}{\ddot{x}^2}, \ldots \tag{3.7}$$

enthalten.

Beispiel 3.2
Ein einfaches Beispiel für eine differentiell rationale Funktion in der Variablen $\boldsymbol{u}$ mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$, also einem Element des Körpers $\mathbb{Q}{<}\boldsymbol{u}{>}$, ist

$$\frac{\ddot{\boldsymbol{u}}^2 - \boldsymbol{u} - 1}{\dot{\boldsymbol{u}} + 1} \quad . \tag{B 3.2-1}$$

Ein Element c des differentiellen Körpers K wird als *Konstante* bezeichnet, wenn $\dot{c} = 0$ gilt. Die Menge aller Konstanten von K ist demzufolge eine Teilmenge von K. Typische Beispiele für solche *trivialen* Mengen sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Für eine differentielle Körpererweiterung L/K gilt nun, äquivalent zur klassischen Körpertheorie, $K \subseteq L$. Auch differentielle Erweiterungen L/K kann man grundsätzlich in zwei Klassen einteilen:

a) Ein Element $a \in L$ ist *differentiell algebraisch* über K, wenn eine Differentialgleichung $P(a, \dot{a}, \ldots, a^{(\alpha)}) = 0$ existiert, wobei P einem Polynom beliebigen Grades mit Koeffizienten in K entspricht.

   Eine Körpererweiterung L/K heißt differentiell algebraisch, wenn alle Elemente von L differentiell algebraisch über K sind.

   Beispiel 3.3
   Sei L der Körper aller Funktionen in der Variablen s mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ und K die Menge der rationalen Zahlen. Dann ist die Funktion $\frac{1}{s} \in L$ differentiell algebraisch über K, weil mit

   $$P(x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x} \tag{B 3.3-1}$$

   ein differentielles Polynom mit Koeffizienten aus K existiert, für das $P(x = \frac{1}{s}) = 0$ gilt.

b) Ein Element $a \in L$ ist *differentiell transzendent* über K, wenn es nicht differentiell algebraisch ist. Existiert wenigstens ein Element von L, das differentiell transzendent ist, so wird die Körpererweiterung L/K ebenfalls als differentiell transzendent bezeichnet.

Beispiel 3.4
Seien L und K definiert wie in Beispiel 3.3. Die Funktion $\ln(s) \in L$ ist differentiell transzendent über K, weil außer einer trivialen Lösung offensichtlich kein endliches Polynom

$$P(\ln(s), \frac{d}{ds}(\ln(s)), \frac{d^2}{ds^2}(\ln(s)), \ldots) = 0 \tag{B 3.4-1}$$

existiert. Aus diesem Grunde ist die Körpererweiterung L/K differentiell transzendent.

Eine Teilmenge T mit den Elementen $\{\xi_i | i = 1, \ldots, \mu\}$ und $T \subseteq L$ heißt *differentiell K-algebraisch abhängig*, wenn Elemente der Menge aller beliebigen Ableitungen $\{\xi_i^{(\nu_i)} | i = 1, \ldots, \mu,\ \nu_i = 0, 1, 2, \ldots\}$ ein Polynom $P(\xi_i^{(\nu_i)}) = 0$ mit Koeffizienten in K erfüllen. Anders formuliert sind die $\xi_i \in T$ nur dann differentiell K-algebraisch abhängig, wenn sie eine algebraische Differentialgleichung erfüllen. Eine Teilmenge T von L, die nicht differentiell K-algebraisch abhängig ist, wird dementsprechend *differentiell K-algebraisch unabhängig* genannt. Ist eine mit T_{max} bezeichnete, differentiell K-algebraisch unabhängige Teilmenge *maximal* bezüglich der Inklusion in L, hat T_{max} also eine maximale Anzahl von Elementen, so ist diese Menge eine *differentielle Transzendenzbasis* zu der Erweiterung L/K.

Auch für differentielle Transzendenzbasen gilt ebenso wie in der allgemeinen Algebra, daß alle Transzendenzbasen einer differentiellen Körpererweiterung L/K die gleiche Mächtigkeit haben, diese wird mit *differentieller Transzendenzgrad von L/K* bezeichnet. Wird die Menge M so gewählt, daß $K \subseteq M \subseteq L$ gilt, dann läßt sich der differentielle Transzendenzgrad von L/K in Analogie zu Gl. (2.5) indirekt bestimmen (Fliess 1986b):

$$\text{diff. trg } (L/K) = \text{diff. trg } (L/M) + \text{diff. trg } (M/K) \qquad . \tag{3.8}$$

Beispiel 3.5
$\boldsymbol{u} = \{u_i | i = 1, \ldots, \mu\}$ sei eine differentielle Transzendenzbasis der Erweiterung L/K. Mit $K{<}\boldsymbol{u}{>}$ wird der differentielle Körper bezeichnet, der aus differentiell rationalen Funktionen in $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots$ mit Koeffizienten in K besteht. Die Erweiterung $L/K{<}\boldsymbol{u}{>}$ ist immer differentiell algebraisch, obwohl im allgemeinen die Körper L und $K{<}\boldsymbol{u}{>}$ nicht übereinstimmen. Dies läßt sich leicht erklären, wenn die zuvor diskutierten Zusammenhänge berücksichtigt werden. Denn die Transzendenzbasis $\boldsymbol{u}$ enthält die maximale Anzahl von transzendenten Elementen in L. Wenn diese nun in $K{<}\boldsymbol{u}{>}$ enthalten sind, so erfüllen auch alle über K transzendenten Elemente innerhalb von L Polynome mit Koeffizienten in $K{<}\boldsymbol{u}{>}$, was gleichbedeutend ist mit

$$\text{diff. Trg } L/K{<}\boldsymbol{u}{>} = 0 \qquad . \tag{B 3.5-1}$$

Es existieren z. B. keine Koeffizienten $\alpha, \beta \in K$, für die das Polynom

$$P(u_1, u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2 = 0 \tag{B 3.5-2}$$

gilt, weil u_1 und u_2 per Definition (Transzendenzbasis !) unabhängig voneinander sind. In $K{<}\boldsymbol{u}{>}$ dagegen ist durch die triviale Koeffizientenwahl $\alpha = u_2$ und $\beta = -u_1$ eine Lösung für $P(u_1, u_2) = 0$ zu finden.

Zwischen den Eigenschaften einer differentiellen Körpererweiterung und ihrem (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad besteht eine sehr nützliche Beziehung:

Satz 3.1 (Fliess 1990)
Eine endlich generierte, differentielle Körpererweiterung ist dann und nur dann differentiell algebraisch, wenn ihr (nichtdifferentieller) Transzendenzgrad einen endlichen Wert annimmt. □

Anschaulich bedeutet der Satz, daß der (nichtdifferentielle) Transzendenzgrad einer Körpererweiterung gerade der Anzahl an Startwerten entspricht, die zur Bestimmung einer Lösung der korrespondierenden, algebraischen Differentialgleichungen benötigt wird. Dieser Zusammenhang wird in Abschnitt 4.1 näher erläutert.

3.3 Differentielle Vektorräume

In Abschnitt 2.2 wurde die Definition für einen abstrakten Vektorraum gegeben. Darauf aufbauend kann ein *differentieller K-Vektorraum* eingeführt werden, in dem neben den genannten Gesetzmäßigkeiten zusätzlich eine einzelne Differentiation d/dt definiert ist. Unter der Voraussetzung, daß K ein differentieller Körper ist, gilt in dem Vektorraum V über K der folgende Zusammenhang für diese Differentiation:

$$\frac{d}{dt}(a_1\boldsymbol{v}_1 + a_2\boldsymbol{v}_2) = \dot{a}_1\boldsymbol{v}_1 + a_1\dot{\boldsymbol{v}}_1 + \dot{a}_2\boldsymbol{v}_2 + a_2\dot{\boldsymbol{v}}_2 \qquad \forall\ a_1, a_2 \in K, \quad \forall\ \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V \quad . \tag{3.9}$$

In Anlehnung an die Körpertheorie sind auch zur Charakterisierung von Vektorräumen eine Reihe von Bezeichnungen vorhanden. So ist eine Menge $\{\boldsymbol{v}_i | i = 1, \ldots, \mu\}$ von Elementen in V genau dann *differentiell K-linear abhängig*, wenn die Menge der Ableitungen $\{\boldsymbol{v}_i^{(\nu_i)} | i = 1, \ldots, \mu,\ \ \nu_i = 0, 1, 2, \ldots\}$ K-linear abhängig ist. Eine Menge, die nicht differentiell K-linear abhängig ist, wird *differentiell K-linear unabhängig* genannt. Innerhalb eines Vektorraums existieren immer solche unabhängigen Mengen mit einer maximalen Anzahl von Elementen, diese werden als *differentielle Basen* zu V bezeichnet. Alle differentiellen Basen haben die gleiche Mächtigkeit, die auch die *differentielle Dimension* von V genannt wird.

Beispiel 3.6 (Fliess 1990)
Unter $\mathbb{R}[t]$ ist die Menge aller reellen Polynome in der Variablen t zu verstehen:

$$\mathbb{R}[t] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{b_i} \right\} \qquad ; \quad a_i \in \mathbb{R}; \quad b_i \in \mathbb{Z} \quad . \tag{B 3.6-1}$$

Diese läßt sich als differentieller $\mathbb{R}$-Vektorraum V mit der unendlich dimensionalen Basis $\{t^0, t^1, t^2, \ldots\}$ interpretieren. Die einzelnen Polynome $P(t)$ sind als Vektoren in V zu verstehen, in Bild 3.2 ist dieser Sachverhalt für einen Untervektorraum V' von V veranschaulicht. Differenziert man ein beliebiges Polynom $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ hinreichend

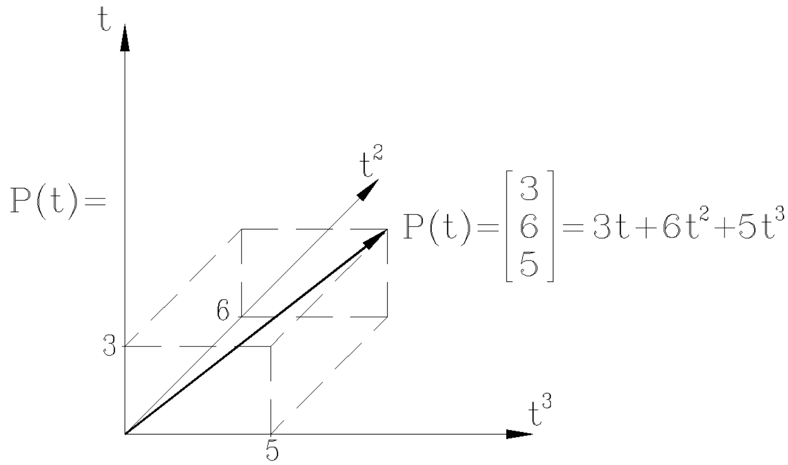

Bild 3.2: Interpretation des Polynoms $P(t)$ als Vektor im Vektorraum $V' = \{t, t^2, t^3\}$ (Beispiel 3.6)

oft nach t, so ergibt sich, unabhängig vom betrachteten Polynom, der Wert Null. Für alle Polynome $P_i(t)$ in $\mathbb{R}[t]$ gilt deshalb

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(\nu_i)}(t) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{für } \nu_i \text{ hinreichend groß} \quad , \qquad \text{(B 3.6-2)}$$

was gleichbedeutend ist mit der Aussage, daß alle Polynome differentiell K-linear abhängig sind. Folglich ist die differentielle Dimension von $\mathbb{R}[t]$ gleich Null. Demgegenüber ist die (nichtdifferentielle) Dimension von $\mathbb{R}[t]$ unendlich groß, weil eine unendliche Anzahl von reellen Polynomen in t existiert, die im Vektorraum V voneinander linear unabhängig sind.

3.4 Primitive und zyklische Elemente

Man betrachte eine (nichtdifferentielle) endliche, algebraische Körpererweiterung E/F. Ein wesentliches Resultat in der „klassischen" Körpertheorie ist die Definition des *primitiven Elementes* einer Erweiterung E/F.

Definition 3.1 (Meyberg 1976)
Eine Körpererweiterung E/F heißt *einfach*, wenn es ein $a \in E$ gibt mit $E = F(a)$. In diesem Fall heißt a *primitives Element* von E/F. □

Für jede einfache Körpererweiterung existiert demnach ein Element a, so daß E genau von F und a generiert wird. Zusammen mit der Aussage

Satz 3.2 (Meyberg 1976)
Jede *endliche* Erweiterung eines vollkommenen Körpers ist eine *einfache* Erweiterung. □

erhält man ein Theorem, das auf die Differentialalgebra erweitert werden kann. Jede endliche, differentiell algebraische Körpererweiterung L/K hat genau dann ein *differentiell primitives Element* δ, wenn K nicht nur aus konstanten Elementen besteht. Der Körper L wird in diesem Fall nur durch den Körper K und das Element δ generiert (Fliess 1990). Sind a_i und b_i Elemente in K, so erhält man für den Körper L folglich

$$L = K{<}\delta{>} = K + \left\{ \sum_{j=0}^{m} \frac{a_{j_0} + a_{j_1}\delta^{(j)} + a_{j_2}{\delta^{(j)}}^2 + \cdots + a_{j_n}{\delta^{(j)}}^n}{b_{j_0} + b_{j_1}\delta^{(j)} + b_{j_2}{\delta^{(j)}}^2 + \cdots + b_{j_n}{\delta^{(j)}}^n} \right\} \quad . \tag{3.10}$$

Ein ähnliches Ergebnis kann für differentielle Vektorräume formuliert werden. Zunächst benennt man mit W_1 und W_2 zwei differentielle K-Vektorräume, für die $W_2 \subseteq W_1$ gilt und die Erweiterung W_1/W_2 endlich ist mit der differentiellen Dimension Null. Dann existiert unter der Voraussetzung, daß K nicht nur aus Konstanten besteht, ein *zyklisches Element* $\boldsymbol{w} \in W_1$ für das $W_1 = W_2 + [\boldsymbol{w}]$ gilt. Der differentielle Vektorraum W_1 wird demnach ausschließlich durch die Elemente von W_2 und das Element $\boldsymbol{w}$ generiert.

Beispiel 3.7 (Fliess 1990)
a) K sei ein Körper, der nur Konstanten als Elemente aufweist. Für eine differentiell algebraische Erweiterung solch eines Körpers existiert gemäß obiger Aussage kein differentiell primitives Element. Dies kann veranschaulicht werden, wenn mit L eine Körpererweiterung zu K definiert wird, die aus K und den beiden Konstanten x_1 und x_2 besteht. Diese Erweiterung ist wegen der Existenz der differentiellen Polynome $\dot{x}_1 = 0$ und $\dot{x}_2 = 0$ differentiell algebraisch. Für den (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad der Körpererweiterung erhält man

$$\operatorname{trg} L/K = 2 \quad . \tag{B 3.7-1}$$

Die Variable δ soll nun als rationale Funktion aus x_1 und x_2 mit Koeffizienten in K angesehen werden, hieraus folgt unmittelbar $\dot{\delta} = 0$ bzw. $\delta = \text{const.}$. Deshalb ergibt sich für die Körpererweiterung $K{<}\delta{>}/K$ der (nichtdifferentielle) Transzendenzgrad

$$\operatorname{trg} K{<}\delta{>}/K = 1 \quad . \tag{B 3.7-2}$$

Aufgrund der unterschiedlichen Transzendenzgrade können die beiden Körpererweiterungen L/K und $K{<}\delta{>}/K$ keinesfalls übereinstimmen, so daß L also nicht durch $K{<}\delta{>}$ generiert wird. Folglich ist δ kein differentiell primitives Element.

b) K sei jetzt ein Körper, der u. a. aus variablen Elementen α_i besteht. Die differentielle Körpererweiterung L/K sei generiert durch die endliche Menge $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$

und als algebraisch angenommen, es existieren demnach differentielle Polynome $P(\xi_k^{(\nu_k)}) = 0$. Alle Linearkombinationen

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i \qquad \alpha_i \in K \qquad , \tag{B 3.7-3}$$

die keines der differentiellen Polynome $P(\xi_k^{(\nu_k)})$ befriedigen, sind nun differentiell primitive Elemente. L entspricht also für *fast alle* α_i dem Körper $K<\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i>$. Eine *zufällige* Auswahl der α_i sollte deshalb genügen, um ein primitives Element zu erzeugen (Fliess 1990).

4 Differentialalgebraischer Ansatz zur Analyse nichtlinearer Systeme

Im folgenden wird aufgezeigt, wie die bisher erläuterten Begriffe der Differentialalgebra gezielt auf die Problemstellungen, die sich bei der Analyse nichtlinearer Systeme ergeben, angewendet werden können. Die Betrachtungen sind, aus Gründen der Anschaulichkeit, hauptsächlich auf analytisch lineare Systeme (ALS) mit dem Zustandsmodell[3]

$$\sum\nolimits_{ALS} \quad \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \qquad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \quad \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m; \quad \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{4.1}$$

beschränkt. Aber auch allgemeinere Systemklassen als diese lassen sich mit Hilfe der Differentialalgebra beschreiben.

4.1 Mathematische Beschreibung nichtlinearer Systeme

In der Algebra ist es üblich, mit einer umfassenden Menge als Grundkörper zu arbeiten und die für eine Problemlösung benötigten Elemente als Teilmenge dieses Grundkörpers anzusehen. In der Differentialalgebra geht man analog vor, indem in einem ersten Schritt Ω als differentieller Grundkörper definiert wird. D. h., Ω entspricht den in Abschnitt 3 formulierten Anforderungen an einen differentiellen Körper und beinhaltet alle Elemente.

Mit $k \subset \Omega$ wird ein differentieller Körper bezeichnet, der mindestens alle Koeffizienten der zu betrachtenden System-Differentialgleichungen beinhaltet. Im allgemeinen reichen für k die Mengen der rationalen oder reellen Zahlen aus. Der differentielle Körper $k<\boldsymbol{u}>$ ist dann die Menge aller rationalen Funktionen in den Elementen $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ sowie deren zeitlichen Ableitungen mit Koeffizienten in k. Die Ein-/Ausgangs-Differentialgleichungen, die ein Regelungssystem mit Eingangsvektor $\boldsymbol{u}(t)$ und Ausgangsvektor $\boldsymbol{y}(t)$ beschreiben, werden nun mittels der endlich generierten Körpererweiterung $k<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>/k<\boldsymbol{u}>$

[3] Die Annahme einer linearen Ausgangsgleichung $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$ bedeutet keine wesentliche Einschränkung der Allgemeingültigkeit (vgl. Anhang A).

modelliert, wobei der differentielle Körper $k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}$ gegenüber $k{<}\boldsymbol{u}{>}$ zusätzlich die p Ausgangsgrößen $y_1,\ldots,y_p$ sowie deren zeitliche Ableitungen beinhaltet. Die Erweiterung $k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ wird auch als *Dynamik* bezeichnet.

Die m Eingänge $u_1,\ldots,u_m$ eines Systems werden nur dann voneinander unabhängig genannt, wenn $\boldsymbol{u}(t)$ eine differentielle Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k$ darstellt. Vergleicht man die Aussage mit der Definition in Abschnitt 3, so sind die Eingänge nur dann voneinander unabhängig, wenn keine Polynome

$$P(u_i,\dot{u}_i,\ldots)=0 \quad ; \qquad i\subseteq\{1,\ldots,m\} \tag{4.2}$$

existieren. Dieser Zusammenhang ist einsichtig, denn wenn zwei oder mehr Systemeingänge über eine Differentialgleichung und im korrespondierenden, realen System somit auch physikalisch miteinander verknüpft sind, so sind sie zwangsläufig voneinander abhängig.

Die Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ hat die Eigenschaft, daß sie immer differentiell algebraisch ist (Fliess 1986b). Denn jedes System läßt sich generell, unabhängig davon, ob es sich um ein lineares oder nichtlineares handelt, durch eine oder mehrere implizite Differentialgleichungen höherer Ordnungen in den Variablen $y_i;\ i=1,\ldots,p$ und $u_k;\ k=1,\ldots,m$ beschreiben (Schwarz 1991):

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},\ldots,\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\ldots)=\boldsymbol{0} \qquad . \tag{4.3}$$

Damit ist die Voraussetzung für eine differentiell algebraische Körpererweiterung, nämlich daß ein Polynom $P(\boldsymbol{y},\dot{\boldsymbol{y}},\ldots)=0$ mit Koeffizienten in $\{\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}},\ldots\}$ existieren muß, für alle nichtlinearen Systeme erfüllt, deren beschreibende Differentialgleichungen entweder algebraisch sind oder aber in eine algebraische Form überführt werden können (vgl. Abschnitt 3.1).

Anstatt ein System durch Differentialgleichungen höherer Ordnungen zu beschreiben ist es oftmals zweckmäßiger, ein Zustandsmodell zu verwenden. Hierbei wird mittels einer Zustandsvariablen $\boldsymbol{x}(t)\in\mathbb{R}^n$ ein System durch mehrere, im allgemeinen miteinander gekoppelte, Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt. Satz 3.1 besagt nun, daß jede differentiell algebraische Körpererweiterung einen endlichen (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad aufweist, der gerade der minimalen Anzahl von Startwerten entspricht, deren Kenntnis Voraussetzung für eine numerische Lösung der zugehörigen Differentialgleichungen eines Systems ist.

Weil ein Zustandsmodell der Dimension n im allgemeinen genau n Startwerte benötigt, erhält man unmittelbar eine Verknüpfung zwischen Dynamik $k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ und Zustandsmodell eines Systems. Und zwar entspricht die minimal mögliche Ordnung n_{min} einer Systemrealisierung $\dot{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ genau dem (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad der Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ (Fliess 1990).

Handelt es sich bei einem Zustandsmodell um eine Minimalrealisierung der Dimension n_{min}, so bilden die Zustandsvariablen $x_1, \ldots, x_{n_{min}}$ eine (nichtdifferentielle) Transzendenzbasis zu $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$. Allerdings ist es im allgemeinen unmöglich, genau diese Transzendenzbasis $\boldsymbol{x}(t)$ zu finden, für die $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}$ mit $k{<}\boldsymbol{u}{>}(\boldsymbol{x}(t))$ bzw. der von rationalen Funktionen in $\boldsymbol{x}(t)$ mit Koeffizienten in $k{<}\boldsymbol{u}{>}$ generierten Menge übereinstimmt. Denn es existieren unendlich viele Transzendenzbasen, die über Zustandstransformationen miteinander verknüpft sind. Wichtiger ist jedoch aus mathematischer Sicht die Tatsache, daß die Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}(\boldsymbol{x}(t))$ immer algebraisch ist, da $\boldsymbol{y}(t) = f(\boldsymbol{x}(t))$ gilt.

Man bezeichne nun mit $\boldsymbol{\xi} = \{\xi_1, \ldots, \xi_\nu\}$; $\nu \geq n$ eine endliche Menge von Elementen in $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}$, die eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ beinhalten. Es läßt sich zeigen, daß alle zeitlichen Ableitungen $\{\dot{\xi}_1, \ldots, \dot{\xi}_\nu\}$ $k{<}\boldsymbol{u}{>}$-algebraisch abhängig über der Menge $\boldsymbol{\xi}$ sind, d. h., im allgemeinen Fall existieren Polynome $A_1, \ldots, A_\nu$ über k mit

$$\begin{aligned} A_1(\dot{\xi}_1, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(\alpha)}) &= 0 \\ &\vdots \\ A_\nu(\dot{\xi}_\nu, \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(\alpha)}) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.4}$$

Für die spezielle Klasse der ALS z. B. vereinfacht sich Gl. (4.4) insoweit, als daß die zeitlichen Ableitungen der Eingangsgrößen verschwinden und $\boldsymbol{u}(t)$ und die Ableitungen $\dot{\xi}_i$ nur linear eingehen.

Die Polynome $A_1, \ldots, A_\nu$ sind als *implizite* Differentialgleichungen erster Ordnung zu verstehen, die *global* über $k{<}\boldsymbol{u}{>}$ gültig sind. Nur wenn die Jacobi-Matrix $\boldsymbol{A}$ mit

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \partial A_1/\partial\dot{\xi}_1 & & \boldsymbol{0} \\ & \ddots & \\ \boldsymbol{0} & & \partial A_\nu/\partial\dot{\xi}_\nu \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

den vollen Rang ν aufweist, existieren auch die *expliziten* Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= a_1(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(\alpha)}) \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_\nu &= a_\nu(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(\alpha)}) \quad . \end{aligned} \tag{4.6}$$

Diese sind nur *lokal* in bestimmten Bereichen des Zustandsraums gültig, da $\boldsymbol{A}$ keinen vollen Rang hat an Stellen, an denen eine eindeutige Auflösung der impliziten Differentialgleichungen nach den $\dot{\xi}_i$ nicht möglich ist.

Durch die Gleichungen (4.6) können zahlreiche nichtlineare Systeme beschrieben werden, zumal, wenn man die Ausführungen in Abschnitt 3.1 über die Algebraisierung von Differentialgleichungen berücksichtigt. Als Beispiele der in Gl. (4.6) enthaltenen und zur Zeit besonders wichtigen Systemklassen können sowohl die bilinearen Systeme (BLS) als auch die ALS angegeben werden. Aber auch allgemeinere wie z. B. zustandslineare (ZLS) oder auch analytische Systeme (AS) (Schwarz 1991) lassen sich mit der Differentialalgebra erfassen.

Beispiel 4.1
Es wird ein ALS mit dem Zustandsmodell (Svaricek 1992)

$$\sum\nolimits_{ALS} \quad \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1(t) & 0 \\ x_2(t) & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \end{aligned} \tag{B 4.1-1}$$

betrachtet. Als differentieller Körper k der Koeffizienten der Differentialgleichungen wird die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ verwendet. $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$ ist folglich der Körper aller rationalen Funktionen in den Variablen u_1 und u_2 sowie deren zeitlichen Ableitungen, die Dynamik $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}>/\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$ entspricht einer endlichen, differentiellen Körpererweiterung um die Variablen y_1 und y_2.

Die beiden Eingänge u_1 und u_2 sind per Voraussetzung voneinander unabhängig, deshalb existieren keine algebraischen Differentialgleichungen $P(u_1, u_2, \dot{u}_1, \dot{u}_2, \ldots) = 0$. Daraus folgt, daß $\boldsymbol{u}(t)$ eine differentielle Transzendenzbasis zu der Körpererweiterung $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}>/\mathbb{Q}$ darstellt.

Die Ausgangsgrößen erfüllen Differentialgleichungen, die ausschließlich von $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots$ abhängig sind, denn aus

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 &&= u_1 x_1 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_3 &&= u_1 x_2 \\ \ddot{y}_1 &= \dot{u}_1 x_1 + u_1 \dot{x}_1 &&= \dot{u}_1 x_1 + u_1 u_2 \\ \ddot{y}_2 &= \dot{u}_1 x_2 + u_1 \dot{x}_2 &&= \dot{u}_1 x_2 + u_1^2 x_1 \end{aligned} \tag{B 4.1-2}$$

und

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= u_1 x_1 \quad \Rightarrow \quad & x_1 &= \frac{\dot{x}_2}{u_1} = \frac{\dot{y}_1}{u_1} \\ y_1 &= x_2 \quad \Rightarrow \quad & x_2 &= y_1 \\ \dot{x}_3 &= u_1 x_2 \quad \Rightarrow \quad & x_2 &= \frac{\dot{x}_3}{u_1} = \frac{\dot{y}_2}{u_1} \end{aligned} \tag{B 4.1-3}$$

ergeben sich die Ein-/Ausgangsdifferentialgleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \frac{\dot{u}_1}{u_1}\dot{y}_1 + u_1 u_2 \\ y_2^{(3)} &= \frac{3\dot{u}_1}{u_1}\ddot{y}_2 + \left(\frac{\ddot{u}_1}{u_1} - 3\left(\frac{\dot{u}_1}{u_1}\right)^2\right)\dot{y}_2 + u_1^2 u_2 \qquad . \end{aligned} \tag{B 4.1-4}$$

Beide Größen y_1 und y_2 erfüllen also zumindest jeweils eine Differentialgleichung mit rationalen Koeffizienten in $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$. Hieraus folgt unmittelbar, daß die Körpererweiterung $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>/\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$ differentiell algebraisch ist.

Der (nichtdifferentielle) Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>/\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$ bestimmt die minimale Dimension des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(t)$ einer mathematischen Realisierung. Da hierbei, im Gegensatz zu den vorherigen Betrachtungen, eine *nichtdifferentielle* Kenngröße gefragt ist, müssen die einzelnen Körper auch als nichtdifferentiell angesehen werden. Demnach erweitert $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>$ den Körper $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$ um die Variablen $y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots$. Der Transzendenzgrad entspricht nun gerade der Anzahl von Elementen in $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>$, die voneinander über $\mathbb{Q}<\boldsymbol{u}>$ algebraisch unabhängig sind.

Die Variablen y_1, y_2 sowie $\dot{y}_1$ sind offenbar voneinander unabhängig. Weil aus den obigen Beziehungen der Zusammenhang

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_3 = u_1 x_2 = u_1 y_1 \tag{B 4.1-5}$$

resultiert, ist $\dot{y}_2$ abhängig von y_1. Alle höheren Ableitungen $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2, \ldots$ sind, wie sich durch weitere Differentiationen bzw. Berücksichtigung von (B 4.1-4) zeigen läßt, ebenfalls von der Basis $\{y_1, y_2, \dot{y}_1\}$ abhängig. Der Transzendenzgrad ist folglich gleich 3, so daß ein Zustandsmodell für das System mindestens eine Ordnung von 3 aufweist. Die Darstellung (B 4.1-1), von der ausgegangen wurde, stellt also bereits eine minimale Realisierung dar.

4.2 Kenngrößen nichtlinearer Systeme

Neben der gerade diskutierten Beschreibung von nichtlinearen Ein-/Ausgangs- oder Zustandsmodellen ist es mit Hilfe der Differentialalgebra auch möglich, zahlreiche Kenngrößen, die aus der linearen Systemtheorie bekannt sind, auf nichtlineare Systeme zu übertragen. Im folgenden wird eine Auswahl von wichtigen Kenngrößen mit deren Definitionen vorgestellt.

Ein Teil der Kenngrößen für nichtlineare Systeme resultiert direkt aus den oben definierten Körpererweiterungen $k<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>/k$ bzw. $k<\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}>/k<\boldsymbol{u}>$. Für die weiteren Schritte ist es sinnvoll, zusätzlich den differentiellen Körper $k<\boldsymbol{y}>$ einzuführen, der der angewendeten Nomenklatur zufolge aus rationalen Funktionen der Variablen $\boldsymbol{y}^{(i)}$ mit Koeffizienten in k besteht.

4.2.1 Differentieller Rang

Eine für die Analyse wichtige Kenngröße ist der *Rang* eines Systems. Für LS entspricht diese Größe gerade dem Rang der Übertragungsmatrix $\boldsymbol{F}(s)$ und ist für eine Anzahl von Systemeigenschaften wie z. B. die Invertierbarkeit von Interesse. Für nichtlineare Systeme kann nun, in Analogie hierzu, ein *differentieller Rang* ρ^* über (Fliess 1986a)

$$\rho^* = \text{diff. trg } k\!<\!\boldsymbol{y}\!>\!/k \tag{4.7}$$

definiert werden. Der differentielle Rang eines Systems entspricht also der maximalen Anzahl der differentiell k-algebraisch unabhängigen Elemente von $k\!<\!\boldsymbol{y}\!>$ bzw. der Anzahl der voneinander unabhängigen Ausgangsvariablen y_i; $i = 1, \ldots, p$. Für ρ^* gilt der Zusammenhang (Wey 1992)

$$\rho^* \leq \min(m, p) \qquad . \tag{4.8}$$

Dies korrespondiert mit den Gegebenheiten bei LS. Insbesondere kann bei Anwendung der Differentialalgebra auf LS bewiesen werden, daß ρ^* mit dem Rang der Übertragungsmatrix $\boldsymbol{F}(s)$ übereinstimmt.

Beispiel 4.2

a) Es werde nochmals das System aus Beispiel 4.1 verwendet. Der differentielle Körper k entspricht demzufolge der Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$. Die Erweiterung $\mathbb{Q}\!<\!\boldsymbol{y}\!>$ wird durch die rationalen Zahlen und die beiden Ausgangsgrößen y_1 und y_2 generiert. Für die Bestimmung des differentiellen Systemrangs ist nun der differentielle Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}\!<\!\boldsymbol{y}\!>\!/\mathbb{Q}$ zu bilden. Er entspricht gerade der Anzahl von Ausgangsgrößen in $\mathbb{Q}\!<\!\boldsymbol{y}\!>$, die keine algebraische Differentialgleichung mit Koeffizienten in $\mathbb{Q}$ erfüllen. Zwar existieren mit den Gln. (B 4.1-4) und (B 4.1-5) differentielle Beziehungen zwischen y_1 und y_2, allerdings mit nicht in $\mathbb{Q}$ enthaltenen Koeffizienten wie z. B. $u_1, u_2, \ldots$. Weil keine Polynome

$$P(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \ldots) = 0 \tag{B 4.2-1}$$

mit ausschließlich rationalen Koeffizienten existieren, bilden die beiden Ausgangsgrößen eine Transzendenzbasis. Der differentielle Rang nimmt folglich den Wert

$$\rho^* = \text{diff. trg } \mathbb{Q}\!<\!\boldsymbol{y}\!>\!/\mathbb{Q} = 2 \tag{B 4.2-2}$$

an.

b) Gegeben ist ein ALS mit den Systemmatrizen

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \qquad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad ; \qquad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{B 4.2-3}$$

Das System hat einen Eingang u und zwei Ausgänge y_1 und y_2, der Rang des Systems kann demzufolge wegen Gl. (4.8) nicht größer als 1 sein. Es muß also ein Polynom $P(\boldsymbol{y}^{(i)}) = 0$ existieren, welches die beiden Ausgangsgrößen miteinander verknüpft. Bildet man die zeitlichen Ableitungen von $\boldsymbol{y}$, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = u \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = x_3^2 \quad \Rightarrow \quad \ddot{y}_2 = 2x_3\dot{x}_3 = 2x_3 u \quad . \end{aligned} \tag{B 4.2-4}$$

Die Elimination von u führt dann zu der gesuchten Differentialbeziehung zwischen y_1 und y_2:

$$\dot{y}_1 = u = \frac{\ddot{y}_2}{2x_3} \quad ; \qquad x_3 = \sqrt{\dot{y}_2} \qquad . \tag{B 4.2-5}$$

4.2.2 Invertierbarkeit

In Abhängigkeit vom Rang läßt sich entscheiden, ob ein System *links-* bzw. *rechtsinvertierbar* (Fliess 1986b) ist. Das sind wesentliche Systemeigenschaften, die u. a. anzeigen, ob sich aus Kenntnis der Ausgangsgröße $\boldsymbol{y}(t)$ eines Systems die Eingangsgröße $\boldsymbol{u}(t)$ berechnen läßt. Vollständig analog zu den LS wird ein nichtlineares System als *differentiell linksinvertierbar* bezeichnet, wenn

$$\rho^* = m \tag{4.9}$$

gilt und als *differentiell rechtsinvertierbar*, wenn der Zusammenhang

$$\rho^* = p \tag{4.10}$$

erfüllt ist. Es kann nun mit Hilfe der Differentialalgebra relativ einfach und elegant bewiesen werden, daß auch bei nichtlinearen Systemen die Eingangsgröße $\boldsymbol{u}(t)$ genau nur dann aus der Ausgangsgröße $\boldsymbol{y}(t)$ berechnet werden kann, wenn das System differentiell linksinvertierbar ist. Denn aus den Gln. (4.7) und (4.9) folgt für linksinvertierbare Systeme sofort

$$\text{diff. trg } \; k{<}\boldsymbol{y}{>}/k = m \qquad . \tag{4.11}$$

Außerdem wurde bereits oben festgestellt, daß die Menge $\{u_1, \ldots, u_m\}$ eine differentielle Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k$ ist. Man hat damit m voneinander unabhängige Eingänge, so daß der differentielle Transzendenzgrad von $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k$ sich folglich zu (vgl. Abschnitt 3.2)

$$\text{diff. trg } \; k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k = m \tag{4.12}$$

ergibt.

Die Anwendung der differentiellen Gradformel gemäß Gl. (3.8) führt bei Berücksichtigung von (4.11) und (4.12) zu (Fliess 1986b)

$$\begin{aligned} &\text{diff. trg } k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k = \text{diff. trg } k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{y}{>} + \text{diff. trg } k{<}\boldsymbol{y}{>}/k \\ \Leftrightarrow \quad & m = \text{diff. trg } k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{y}{>} + m \\ \Rightarrow \quad & \text{diff. trg } k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{y}{>} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{4.13}$$

Die Menge $\{u_1, \ldots, u_m\}$ ist demzufolge differentiell algebraisch über $k{<}\boldsymbol{y}{>}$, so daß alle u_i durch algebraische Differentialgleichungen mit Koeffizienten in k und $\{\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ldots\}$ beschrieben werden. Für differentiell linksinvertierbare Systeme kann daher allein aus der Kenntnis der Ausgangsgröße $\boldsymbol{y}(t)$ die Eingangsgröße $\boldsymbol{u}(t)$ ermittelt werden.

4.2.3 Struktur im Unendlichen nichtlinearer Systeme

Weitere wesentliche Kenngrößen nichtlinearer Systeme lassen sich anhand der sogenannten *Nullstellenstruktur im Unendlichen* definieren. Dieser Begriff, der bei LS direkt mit den Differenzengraden der Übertragungsmatrix $\boldsymbol{F}(s)$ verknüpft ist, hat für nichtlineare Systeme keine derart anschauliche Grundlage. Dennoch kann die Struktur im Unendlichen als eine aussagekräftige Größe für die Analyse nichtlinearer Systeme angesehen werden.

Als einer der ersten, der die Differentialalgebra im Bereich der nichtlinearen Regelungstheorie verwendete, führte Fliess (1986a) eine algebraische Definition für die Struktur im Unendlichen von ALS ein. Diese wird anhand von differentiellen k-Vektorräumen erstellt, welche aus den *Differentialen* der Ein- und Ausgangsgrößen resultieren. Im Gegensatz zur differentialgeometrisch definierten Struktur im Unendlichen verfügt die algebraische Darstellung über eine Reihe von Vorteilen, z. B. ist sie *global* über dem Zustandsraum eines Systems gültig (Wey 1992).

Geht man von einem ALS-Zustandsmodell gemäß (4.1) aus, so lassen sich zunächst die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgröße durch den Zusammenhang

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}}(t) &= \dot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) &&= \frac{\partial \boldsymbol{y}}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}] \\ \ddot{\boldsymbol{y}}(t) &= \ddot{\boldsymbol{y}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\dot{\boldsymbol{u}}) &&= \frac{\partial \dot{\boldsymbol{y}}}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}] + \frac{\partial \dot{\boldsymbol{y}}}{\partial \boldsymbol{u}}\dot{\boldsymbol{u}} \\ &\vdots \\ \boldsymbol{y}^{(k+1)} &= \boldsymbol{y}^{(k+1)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\ldots,\boldsymbol{u}^{(k)}) &&= \frac{\partial \boldsymbol{y}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{x}}[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}] + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \boldsymbol{y}^{(k)}}{\partial \boldsymbol{u}^{(i)}}\boldsymbol{u}^{(i+1)} \ , \end{aligned} \tag{4.14}$$

beschreiben. Hierbei sind die $\boldsymbol{y}^{(i)}(t)$ nicht nur Funktionen der Eingangsgröße $\boldsymbol{u}(t)$ und deren zeitlichen Ableitungen, sondern auch vom Zustand $\boldsymbol{x}(t)$. Will man auf die Betrachtung einer reinen Ein-/Ausgangsdarstellung (Gl. (4.3)) verzichten und die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgrößen in der Form (4.14) differentialalgebraisch beschreiben, so reicht der oben definierte Körper $k\langle\boldsymbol{u}\rangle$ hierfür nicht aus. Denn in ihm sind keine Funktionen in $\boldsymbol{x}(t)$ enthalten, die aber als Koeffizienten der Differentialgleichungen benötigt werden. Deshalb wird nun der differentielle Körper K eingeführt, der neben $k\langle\boldsymbol{u}\rangle$ auch alle rationalen Funktionen in $\boldsymbol{x}(t)$ als Elemente enthalten soll. K besteht also aus rationalen Funktionen in $(\boldsymbol{u}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(n-1)})$ mit meromorphen[4] Koeffizienten in der Variablen $\boldsymbol{x}(t)$ (Di Benedetto u. a. 1989).

Im Gegensatz zum Körper $k\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle$ enthält K keine zeitlichen Ableitungen von $\boldsymbol{x}(t)$. Dies ist aus mathematischer Sicht sinnvoll, denn durch sukzessives Einsetzen der Zustandsgleichungen (vgl. (4.14)) tritt in den Differentialgleichungen kein Koeffizient mit zeitlichen Ableitungen von $\boldsymbol{x}(t)$ auf. Unter Verwendung des mit der Zustandsgleichung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t) \tag{4.15}$$

eines ALS korrespondierenden, maximalen differentiellen Ideals I kann K auch durch eine Körpererweiterung ausgedrückt werden. Und zwar entspricht K genau dem Körper, um den I erweitert werden muß, damit man $k\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle$ erhält:

$$K = k\langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}\rangle - I \qquad . \tag{4.16}$$

Dieser Zusammenhang ist offensichtlich, denn I enthält gerade die $\dot{\boldsymbol{x}}(t)$ und somit auch alle höheren zeitlichen Ableitungen von $\boldsymbol{x}(t)$ (differentielles Ideal: $a \in I \;\Rightarrow\; \dot{a} \in I$).

Über dem differentiellen Körper K wird nun ein differentieller Vektorraum $\mathcal{F}$ definiert. Er wird aufgespannt durch die Basis $\{d\boldsymbol{u}, \ldots, d\boldsymbol{u}^{(n-1)}\}$, wobei der Operator '$d$' die Bildung eines Differentials entsprechend der Gleichung

$$d\eta(\boldsymbol{v}) = \sum_{i=1}^{j} \frac{\partial \eta(\boldsymbol{v})}{\partial v_i} dv_i \tag{4.17}$$

bedeutet.

Beispiel 4.3
Die Elemente der Vektorraum-Basis von $\mathcal{F}$ sind in der vorliegenden Schreibweise in sogenannten *lokalen Koordinaten* notiert. Aus dieser Darstellung resultiert unmittelbar die bekanntere, aber schreibaufwendigere Vektorschreibweise, z. B. für $n = 2$ und $m = 2$ [5]:

$$\text{span}\,\{du_1, du_2, d\dot{u}_1, d\dot{u}_2\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \tag{B 4.3-1}$$

[4]Eine Funktion heißt meromorph, innerhalb eines offenen Gebiets Γ, wenn sie in Γ analytisch ist bis auf Pole. Die Polstellen einer meromorphen Funktion sind stets isoliert, d. h. innerhalb einer gewissen Umgebung der Polstelle ist die Funktion analytisch. Dasselbe gilt für die Nullstellen der Funktion (Engell 1988).

[5]Der Operator **span** steht für den von seinen Argumenten aufgespannten Vektorraum (vgl. Anhang B).

Anhand der Gleichung ist sofort zu erkennen, daß die Differentiale $d\boldsymbol{u}^{(i)}$ keine Variablen darstellen, die Zahlenwerte annehmen. Vielmehr müssen sie in Bezug auf den Körper K gesehen werden und können als die aufspannenden Vektoren des K-Vektorraums $\mathcal{F}$ interpretiert werden.

Die Projektionen der Ausgangsgrößen-Differentiale $d\boldsymbol{y}^{(i)}$; $0 \leq i \leq n$ über K spannen nun differentielle K-Vektorräume auf, deren differentielle Dimensionen mit ρ_i bezeichnet werden. Aus diesen ρ_i läßt sich direkt die Nullstellenstruktur im Unendlichen eines Systems ableiten (Fliess 1986a).

Ein Problem liegt in der praktischen Bestimmung der differentiellen Dimensionen der Vektorräume. Moog (1988) führt deshalb eine Erweiterung der Basis von $\mathcal{F}$ um die Differentiale $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$ ein. Der daraus resultierende Vektorraum wird im weiteren mit $\mathcal{E}$ benannt. Der wesentliche Vorteil von $\mathcal{E}$ liegt darin, daß er als *gewöhnlicher* Vektorraum interpretiert werden kann. Gleiches gilt für die K-Vektorräume der Projektionen der Ausgangsgrößen-Differentiale, wenn sie ebenfalls um die dx_i erweitert werden. Im einzelnen ergeben sich die erweiterten K-Vektorräume damit zu

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_0 &:= \operatorname{span}\{d\boldsymbol{x}\} = \operatorname{span}\{dx_1, \ldots, dx_n\} \\
\mathcal{E}_1 &:= \operatorname{span}\{d\boldsymbol{x}, d\dot{\boldsymbol{y}}\} = \operatorname{span}\{dx_1, \ldots, dx_n, d\dot{y}_1, \ldots, d\dot{y}_p\} \\
&\vdots \\
\mathcal{E}_n &:= \operatorname{span}\left\{d\boldsymbol{x}, d\dot{\boldsymbol{y}}, \ldots, d\boldsymbol{y}^{(n)}\right\} \quad .
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Die Differentiale $d\dot{\boldsymbol{y}}, d\ddot{\boldsymbol{y}}, \ldots, d\boldsymbol{y}^{(n)}$ sind aufgrund der Gln. (4.14) und (4.17) Funktionen in den Elementen der Basis $\{d\boldsymbol{x}, d\boldsymbol{u}, d\dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, d\boldsymbol{u}^{(n-1)}\}$ von $\mathcal{E}$. Sie können somit als Vektoren in $\mathcal{E}$ aufgefaßt werden, die ihrerseits wieder Vektorräume aufspannen. Es gilt daher der Zusammenhang $\mathcal{E}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}$. Die Vektorräume $\mathcal{E}_0$ bis $\mathcal{E}_2$ dieser Kette sind in

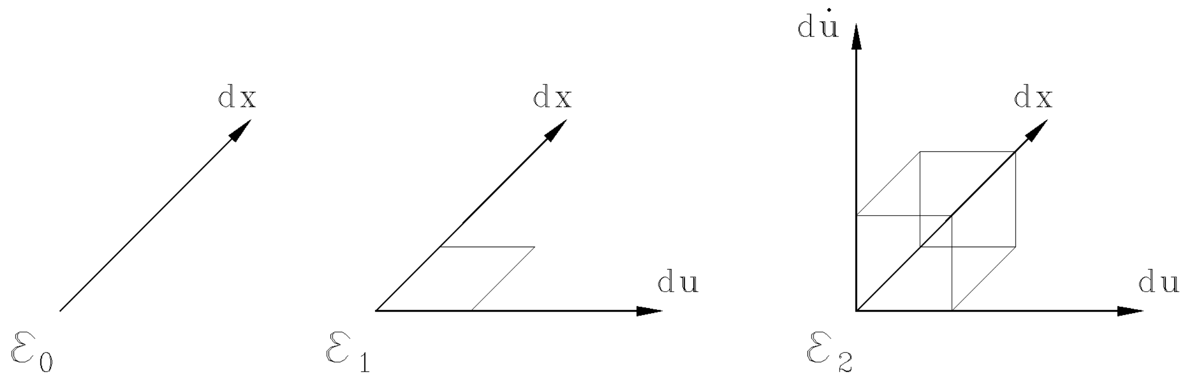

Bild 4.1: Kette von Vektorräumen $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$

Bild 4.1 schematisch wiedergegeben, die mit $d\boldsymbol{x}$, $d\boldsymbol{u}$ und $d\dot{\boldsymbol{u}}$ gekennzeichneten Vektoren sind hierbei als Stellvertreter für mehrdimensionale Räume zu verstehen.

Beispiel 4.4 (Nijmeijer 1986)
Gegeben sei ein ALS mit $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^2$ und

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{B 4.4-1}$$

Zunächst berechnet man die erste zeitliche Ableitung der Ausgangsgrößen und daraus die zugehörigen Differentiale:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 && = x_1 + x_2 u_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_3 && = x_1 + u_2 \\ \Rightarrow d\dot{y}_1 &= dx_1 + x_2 du_2 + u_2 dx_2 \\ d\dot{y}_2 &= dx_1 + du_2 \quad . \end{aligned} \tag{B 4.4-2}$$

Die Basis für den Vektorraum $\mathcal{E}$ ist

$$\{dx_1, dx_2, dx_3, du_1, du_2, d\dot{u}_1, d\dot{u}_2, d\ddot{u}_1, d\ddot{u}_2\} \quad , \tag{B 4.4-3}$$

so daß sich für die ersten beiden Untervektorräume folgende Ergebnisse errechnen lassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3\} = \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{E}_1 &= \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2\} \\ &= \text{span}\{dx_1, dx_2, dx_3, dx_1 + u_2 dx_2 + x_2 du_2, dx_1 + du_2\} \\ &= \text{span}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ x_2 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \quad . \end{aligned} \tag{B 4.4-4}$$

Im weiteren müssen zur Definition einer Struktur im Unendlichen die nun nichtdifferentiellen Dimensionen

$$\rho_k = \dim \mathcal{E}_k \quad ; \quad k = 1, \ldots, n \tag{4.19}$$

bestimmt werden.

Beispiel 4.5
Besonders einfach läßt sich die Dimension eines Vektorraums durch eine Rangbestimmung der Matrix errechnen, deren Spalten den aufspannenden Vektoren entsprechen[6]. In Beispiel 4.4 ergibt sich z. B. für die Dimension von $\mathcal{E}_0$

$$\rho_0 = \dim \mathcal{E}_0 = \operatorname{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ & \mathbf{0} & \end{bmatrix} = 3 \quad . \tag{B 4.5-1}$$

Die definierten Vektorräume $\mathcal{E}_0, \ldots, \mathcal{E}_n$ und deren Dimensionen enthalten eine Reihe von strukturellen Informationen über das zugehörige System. U. a. kann mit ihnen sofort eine nichtdifferentielle Definition für die Struktur im Unendlichen abgeleitet werden:

Definition 4.1 (Moog 1988)
Die Anzahl der NU der Ordnung kleiner oder gleich k, $k \geq 1$, ist $\sigma_k = \rho_k - \rho_{k-1}$. Die Nullstellenstruktur im Unendlichen ist gegeben durch $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\}$, die Anzahl der NU mit der Ordnung k ist identisch mit der Differenz $\sigma_k - \sigma_{k-1}$. □

Anhand der NU können nun wichtige Kenngrößen nichtlinearer Systeme sehr einfach mit gewöhnlichen mathematischen Hilfsmitteln berechnet werden, so unter anderem auch der differentielle Rang, für den der Zusammenhang

$$\rho^* = \sigma_n \tag{4.20}$$

gilt (Fliess 1986a, Di Benedetto u. a. 1989). Außerdem lassen sich so wesentliche Systemeigenschaften wie *Block-Entkoppelbarkeit*, *Störentkoppelbarkeit* oder *Nulldynamik* (Schwarz 1991) mit Hilfe der NU beschreiben.

Die Kette von Untervektorräumen von $\mathcal{E}$ beinhaltet zudem weitere, zum Teil noch nicht vollständig erforschte, *strukturelle* Informationen über nichtlineare Systeme. Diese lassen sich alle mit Hilfe der „herkömmlichen“ Algebra analysieren, weil, wie oben erwähnt, die $\mathcal{E}_i$ gewöhnliche, nichtdifferentielle Vektorräume darstellen.

[6] Siehe auch Anhang B.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Der vorliegende Bericht gibt einen Überblick über die Grundlagen der Differentialalgebra. Aufbauend auf der „klassischen“ Algebra werden die wichtigsten Begriffe dieser mathematischen Theorie genannt und anhand von zahlreichen Beispielen ausführlich erläutert.

Im Anschluß daran wird der Einsatz der Differentialalgebra bei der Analyse nichtlinearer Regelungssysteme vorgestellt. Es zeigt sich, daß eine Reihe von Systemkenngrößen, die von linearen Systemen her bekannt sind, mit Hilfe der Differentialalgebra einfach auf nichtlineare Systeme übertragen werden können. Überhaupt lassen sich die mathematischen Zusammenhänge, die bei nichtlinearen Systemen sehr komplex ausfallen, mit der Differentialalgebra deutlich eleganter und einfacher beschreiben, als es mit üblichen mathematischen Ansätzen möglich ist. Aus diesem Grund spielt die Differentialalgebra bei der Systemanalyse mittlerweile eine ebenso wichtige Rolle wie die wesentlich früher in die nichtlineare Systemtheorie eingeführte Differentialgeometrie.

Eine Anzahl von Problemstellungen auf dem Gebiet der nichtlinearen Regelungstheorie konnte bereits differentialalgebraisch analysiert werden. Zu nennen sind u. a. die Block- und Störentkopplung durch statische und dynamische Zustandsrückführung, die Steuerbarkeit sowie die Invertierbarkeit von ALS.

Die Forschung auf dem Gebiet der differentialalgebraischen Analyse nichtlinearer Systeme ist zur Zeit jedoch noch nicht abgeschlossen, die bisher erarbeiteten Ergebnisse sind vielversprechend. Es kann deshalb davon ausgegangen werden, daß in absehbarer Zeit weitere Fragestellungen bezüglich nichtlinearer Systeme und deren Regelung mit Hilfe der Differentialalgebra gelöst werden können. Vor allem im Bereich der *Nullstellen im Unendlichen* und bei der Definition *struktureller Systemeigenschaften* ist noch ein erhebliches Forschungspotential vorhanden.

6 Literaturverzeichnis

Bell, D.J. 1976. *Mathematics of linear and nonlinear systems.* Oxford: Clarendon.

Bronstein, I.N. und K.A. Semendjajew. 1987. *Taschenbuch der Mathematik.* Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft.

Di Benedetto, M.D.; J.W. Grizzle und C.H. Moog. 1989. Rank invariants of nonlinear systems. *SIAM J. Control and Optimization.* Vol. 27. 658-672.

Engell, S. 1988. *Optimale lineare Regelung.* Berlin: Springer-Verlag.

Fliess, M. 1986a. A new approach to the structure at infinity of nonlinear systems. *Systems & Control Letters.* Vol. 7. 419-421.

Fliess, M. 1986b. Nonlinear Control Theory and Differential Algebra. *Proc. I.I.A.S.A. Conf. Modeling and Adaptive Control.* Sopron. Hungary.

Fliess, M. 1990. Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics. *IEEE Trans. Automat. Contr.* Vol. 35. No. 9. 994-1001.

Haddak, A. 1989. Differential Algebra and Controllability. *IFAC Nonlinear Control Systems Design.* Capri. Italy. 13-16.

Kaplansky, I. 1976. *An Introduction to Differential Algebra.* Paris: Hermann.

Meyberg, K. 1976. *Algebra.* Teil 2. München: Carl Hanser Verlag.

Moog, C. H. 1988. Nonlinear Decoupling and Structure at Infinity. *Math. Control Signals Systems 1.* 257-268.

Nijmeijer, H. 1986. Right-invertibility for a class of nonlinear control systems: A geometric approach. *Systems & Control Letters.* Vol. 7. 125-132.

Ritt, J. F. 1950. *Differential Algebra.* New York: Amer. Math. Soc.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme.* München: Oldenbourg.

Shapiro, L. 1975. *Introduction to Abstract Algebra.* International Series in pure and applied Mathematics. New York: McGraw-Hill.

Svaricek, F. 1992. A Graph-theoretic Approach for the Determination of the Structure at Infinity of Nonlinear Systems. *IFAC Nonlinear Control System Design Symposium (NOLCOS '92).* Bordeaux.

Wey, T. 1992. *Numerische Berechnung der Struktur im Unendlichen nichtlinearer Systeme.* Diplomarbeit (unveröffentlicht). MSRT. Universität - GH - Duisburg.

A ALS mit einer linear vom Zustand abhängigen Ausgangsgröße

Wird das Zustandsmodell für ein ALS

$$\sum_{ALS} \quad \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) & = & \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t)) \qquad ; \qquad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \end{array} \tag{A.1}$$

mit $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ verwendet, so bedeutet die Annahme einer linearen Ausgangsgleichung der Form

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \tag{A.2}$$

keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit, weil ein System mit einer als analytisch vorausgesetzten Ausgangsgröße $\boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))$ in eines gemäß Gl. (A.2) umgewandelt werden kann (Schwarz 1991).

Zu diesem Zweck wird die Ausgangsgröße differenziert:

$$\dot{\boldsymbol{y}}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{c}(\boldsymbol{x}(t))}{\partial \boldsymbol{x}}\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))[\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t)] \tag{A.3}$$

und ein erweiterter Zustandsvektor

$$\boldsymbol{z}(t) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) \end{bmatrix} \qquad ; \qquad \boldsymbol{z}(t) \in \mathbb{R}^{n+p} \tag{A.4}$$

eingeführt. Daraus erhält man das neue Zustandsmodell

$$\sum_{ALS} \quad \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{z}}(t) & = & \begin{bmatrix} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) \\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t)) \\ \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t)) \end{bmatrix} \boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) & = & [\,0\ 0 \cdots 0\ \underbrace{1 \cdots 1}_{p\text{-mal}}\,]\boldsymbol{z}(t) \qquad ; \qquad \boldsymbol{z}_0 = \boldsymbol{z}(t_0) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{x}(t_0) \\ \boldsymbol{y}(t_0) \end{bmatrix} \quad , \end{array} \tag{A.5}$$

welches jetzt eine von der Zustandsgröße nur linear abhängige Ausgangsgröße aufweist. Das neue System (A.5) ist, obwohl die Dimension seines Zustandsvektors um p gegenüber dem ursprünglichen größer ist, äquivalent zu dem entsprechenden System mit nichtlinearer Verknüpfung von Ausgangsgröße $\boldsymbol{y}(t)$ und Zustandsvektor $\boldsymbol{x}(t)$. Insbesondere bleibt auch die Nullstellenstruktur im Unendlichen eines Systems bei dieser Umformung erhalten.

B Operatoren für Vektorfelder

Ein *Vektorfeld* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ ist eine abkürzende Schreibweise für

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{x}) \\ f_2(\boldsymbol{x}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{bmatrix} \quad . \tag{B.1}$$

Durch ein Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ wird ein Punkt $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ in einen Punkt $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}^m$ abgebildet: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Unter einer *Jacobi-Matrix* zu einem Vektorfeld $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ versteht man dessen Differentiation nach dem Argument $\boldsymbol{x}$, die abkürzende Schreibweise hierfür ist $\boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x})$. Ausgeschrieben ergibt sich die Jacobi-Matrix zu:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{f}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \tag{B.2}$$

Die *Lie-Ableitung* $L_{\boldsymbol{f}}\lambda(\boldsymbol{x})$ einer skalarwertigen Funktion $\lambda(\boldsymbol{x})$ entlang eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ führt zu einer skalaren Funktion

$$L_{\boldsymbol{f}}\lambda(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x})}{\partial x_i} f_i(x_1, \ldots, x_n) \quad . \tag{B.3}$$

Definiert man die Ableitung einer skalarwertigen Funktion $\lambda(\boldsymbol{x})$ nach dem vektoriellen Argument $\boldsymbol{x}$ als Vektor

$$\left[\frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T = \left[\frac{\partial \lambda}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial \lambda}{\partial x_n}\right] \quad , \tag{B.4}$$

so kann die Lie-Ableitung auch geschrieben werden als das Skalarprodukt

$$L_{\boldsymbol{f}}\lambda(\boldsymbol{x}) = \left[\frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\right]^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \nabla^T \lambda(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \quad . \tag{B.5}$$

Eine mehrfache Lie-Ableitung, zunächst entlang eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x})$ und dann entlang eines Vektorfeldes $\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})$, kann durch wiederholtes Anwenden von Gl. (B.5) ermittelt werden:

$$\begin{aligned} L_{\boldsymbol{f}_2} L_{\boldsymbol{f}_1} \lambda(\boldsymbol{x}) &= \left[\frac{\partial (L_{\boldsymbol{f}_1} \lambda(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} \right]^T \cdot \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) \\ &= \left[\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} \left(\left[\frac{\partial \lambda(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \right]^T \cdot \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) \right) \right]^T \cdot \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) \qquad . \end{aligned} \tag{B.6}$$

Eine weitere Definition im Zusammenhang mit der Lie-Ableitung ist die *k-fache Lie-Ableitung* $L^k_{\boldsymbol{f}} \lambda(\boldsymbol{x})$ von $\lambda(\boldsymbol{x})$ entlang $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, die gegeben ist durch die rekursive Beziehung

$$\begin{aligned} L^k_{\boldsymbol{f}} \lambda(\boldsymbol{x}) &= \left[\frac{\partial (L^{k-1}_{\boldsymbol{f}} \lambda(\boldsymbol{x}))}{\partial \boldsymbol{x}} \right]^T \cdot \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) \\ & \text{mit} \quad L^0_{\boldsymbol{f}} \lambda(\boldsymbol{x}) = \lambda(\boldsymbol{x}) \qquad . \end{aligned} \tag{B.7}$$

Die *Lie-Klammer* $[\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})]$ zweier Vektorfelder ist durch den Zusammenhang

$$[\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{f}_{2\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{f}_{1\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) \tag{B.8}$$

definiert. Für die Lie-Klammer können die folgenden Rechenregeln notiert werden:

- $$[f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})] = -[f_2(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x})]$$
- Jacobi-Identität:
  $$[[f_1(\boldsymbol{x}), f_2(\boldsymbol{x})], f_3(\boldsymbol{x})] + [[f_2(\boldsymbol{x}), f_3(\boldsymbol{x})], f_1(\boldsymbol{x})] + [[f_3(\boldsymbol{x}), f_1(\boldsymbol{x})], f_2(\boldsymbol{x})] = 0$$
- $$[a\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + b\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})] = a[\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})] + b[\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_3(\boldsymbol{x})]$$

Der Operator **span** bezeichnet einen Vektorraum bzw. eine Distribution $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$, die von den Vektorfeldern, auf die **span** angewendet wird, aufgespannt ist:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \text{span}\,\{\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x})\} \tag{B.9}$$

Ordnet man die Vektorfelder spaltenweise zu einer Matrix

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) | \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) | \cdots | \boldsymbol{f}_d(\boldsymbol{x})] \tag{B.10}$$

an, dann kann $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$ auch mittels des Operators **bild** notiert werden:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \text{bild}\ \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \qquad . \tag{B.11}$$

Der Operator **dim** bezeichnet die Dimension einer Distribution $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x})$, mit Hilfe der Matrix $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x})$ aus Gl. (B.10) läßt er sich auf eine Rangbestimmung zurückführen:

$$\dim \boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = \text{rang}\, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \qquad . \tag{B.12}$$