

Fuzzy-Modellierung eines Gasofens

K. Küpper

Forschungsbericht Nr. 7/93

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In diesem Forschungsbericht wird ein am Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik weiterentwickelter Algorithmus zur Identifikation von Fuzzy-Modellen mit bekannten Algorithmen aus der Literatur verglichen. Dabei werden von Box und Jenkins (1970) veröffentlichte Meßdaten verwendet. Die Ergebnisse des weiterentwickelten Algorithmus sind sehr vielversprechend. Weiterhin werden einige theoretische Untersuchungen vorgestellt, die den Algorithmus vereinfachen und auch bei bestimmten Typen von Fuzzy-Reglern anwendbar sind.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitung	1
2 Ergebnisse aus der Literatur	2
2.1 Testdaten	2
2.2 Bisherige Ergebnisse aus der Literatur	3
3 Eigene Ergebnisse	6
3.1 Identifikation	6
3.2 Optimierung	9
4 Einfluß der Fuzzy-Mengen des Ausgangs	10
4.1 Vereinfachtes äquivalentes Fuzzy-System	10
4.2 Exakte Darstellung eines Meßwertes	13
4.3 Identifikation des vereinfachten Fuzzy-Systems	16
5 Zusammenfassung und Ausblick	20
6 Literatur	21

Nomenklatur

a	Zahl der Eingangswerte
b	Zahl der Fuzzy-Mengen über der Ausgangsgröße
c_i	Zahl der Fuzzy-Mengen X^i über \mathbb{D}_i für den Eingangswert x_i
\mathbb{D}_i	Definitionsbereich der Eingangsgröße x_i
d	Zahl der Regeln eines Fuzzy-Systems
e_q	Mittlerer quadratischer Fehler
f_{kl}	Gewichtung der Regel l . Sie bezieht sich auf die Fuzzy-Menge \mathbb{Y}_k des Ausgangs (spezieller Fall)
F_k	Fläche der Fuzzy-Menge \mathbb{Y}_k des Ausgangs
$F(z)$	zeitdiskrete Übertragungsfunktion
g_{kl}	Gewichtung der Regel l . Sie bezieht sich auf die Fuzzy-Menge Y_k des Ausgangs (allgemeiner Fall)
N	Zahl der Meßwerte
R_l	Regel l eines Fuzzy-Systems
s_k	Schwerpunkt der Fuzzy-Menge Y_k des Ausgangs
\mathbb{W}	Definitionsbereich der Ausgangsgröße y
$X_{p_i}^i$	p_i -te Fuzzy-Menge über \mathbb{D}_i
\mathbb{X}^i	Familie der Fuzzy-Mengen über \mathbb{D}_i
x_i	Eingangsgröße
Y_k	k -te Fuzzy-Menge über \mathbb{W}
\mathbb{Y}	Familie der Fuzzy-Mengen über \mathbb{W}
y	Ausgangsgröße
α_l	Erfülltheitsgrad des Voraussetzungsteils der Regel l
μ_k	Zugehörigkeitsgrad zur Fuzzy-Menge Y_k des Ausgangs
μ_{kl}	Aus der Regel R_l resultierender Zugehörigkeitsgrad zur Fuzzy-Menge Y_k des Ausgangs
τ	Totzeit

Indizierung

$\hat{}$	Ausgang des Fuzzy-Modells
$\tilde{}$	„komplexes Fuzzy-Modell“
\ast	„vereinfachtes Fuzzy-Modell“
$i = 1 \dots a$	bezeichnet die Eingangsgröße
$k = 1 \dots b$	bezeichnet die Fuzzy-Menge der Ausgangsgröße
$l = 1 \dots d$	bezeichnet die Regeln eines Fuzzy-Systems
$m = 1 \dots N$	bezeichnet die einzelnen Meßdatensätze
$p_{i,l} \in \{1 \dots c_i\}$	bezeichnet eine beliebige, aber feste Fuzzy-Menge über \mathbb{D}_i im Voraussetzungsteil der Regel R_l . l kann auch weggelassen werden.

1 Einleitung

Bei der Entwicklung und Erprobung von Algorithmen, hier zur Identifikation dynamischer Systeme, stellt sich das Problem, neue und bereits aus der Literatur bekannte Verfahren zu vergleichen. Insbesondere bei Quellen im Bereich der Fuzzy-Identifikation fällt der Vergleich schwer, da häufig reale Systeme anhand von Meßdaten identifiziert werden, die dem Leser nicht zur Verfügung stehen.

In diesem Forschungsbericht soll deshalb das im Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik weiterentwickelte Verfahren zur Fuzzy-Identifikation (Bertram und Schwarz 1993, Küpper 1993) anhand von in der Literatur veröffentlichten Daten (Box und Jenkins 1970) erprobt werden. Auf diese Daten greifen auch andere Veröffentlichungen im Bereich der Fuzzy-Identifikation zurück (Tong 1978, Pedrycz 1984a, Xu und Lu 1987, Sugeno und Tanaka 1991, Sugeno und Yasukawa 1993). Außerdem wurde eine lineare zeitdiskrete Übertragungsfunktion für diese Daten identifiziert (Box und Jenkins 1970).

Als Vergleichsmaßstab für die Güte der Modelle wird hier der mittlere quadratische Fehler

$$e_q = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2 \quad (1.1)$$

verwendet, wobei N die Zahl der Meßwerte, y_i den i -ten Meßwert des Systemausgangs und \hat{y}_i dessen Schätzwert (Modellausgang) darstellt. Im weiteren wird zwischen zwei Möglichkeiten unterschieden, eine rekursive (Modell-) Gleichung der Form

$$y(k+1) = f(u(k), \dots, u(k-j), y(k), \dots, y(k-i)) \quad (1.2)$$

auszuwerten: Bei der *rekursiven Lösung* wird der Ausgang zeitverzögert zurückgeführt, d.h., auf der rechten Seite der Gleichung werden die früheren Ausgangsgrößen der Gleichung (bzw. ihre Schätzwerte) als Eingangswerte des Modells eingesetzt. Dagegen werden bei der *Einschrittprädiktion* auf der rechten Seite die Meßwerte aus dem Datensatz verwendet. Der Fehler in der Simulation kann sich also nicht akkumulieren. Die Steuergrößen u werden in beiden Fällen den Meßdaten entnommen.

Bei Voruntersuchungen zur Identifikation wurde beobachtet, daß die Zahl der Fuzzy-Mengen, die über dem Ausgang definiert sind, eine untergeordnete Rolle spielt. Dies war der Anlaß zu einigen theoretischen Untersuchungen, die wichtige Aussagen für den verwendeten Identifikationsalgorithmus, aber auch für Regler mit der sum-prod-Komposition ergeben. Unter anderem bestätigen sie die genannten Beobachtungen.

Nach dieser Einleitung werden zunächst die Testdaten und bisherige Ergebnisse der Fuzzy-Modellbildung aus der Literatur vorgestellt. Anschließend werden im Abschnitt 3 eigene Ergebnisse sowohl aus der Identifikation als auch aus der Optimierung der Fuzzy-Modelle (Küpper 1993) dargestellt. Es folgen dann die theoretischen Untersuchungen zum Einfluß der Fuzzy-Mengen des Ausgangs (Abschnitt 4). Eine Zusammenfassung und ein Ausblick schließen den Forschungsbericht ab.

2 Ergebnisse aus der Literatur

In diesem Abschnitt werden zunächst die verwendeten, aus der Literatur stammenden Meßdaten (Box und Jenkins 1970) kurz vorgestellt. Anschließend werden mehrere auf sie abgestimmte Modelle mit ihren Ergebnissen zitiert (Pedrycz 1984a, Xu und Lu 1987, Sugeno und Tanaka 1991, Sugeno und Yasukawa 1993).

2.1 Testdaten

Die verwendeten Testdaten sind einem Buch von Box und Jenkins (1970) entnommen. Es sind 296 Datenpaare, die das Ein-/Ausgangsverhalten eines Gasofens beschreiben (Bild 2.1). Die Eingangsgröße ist ein Steuersignal x , das einen Methanvolumenstrom über

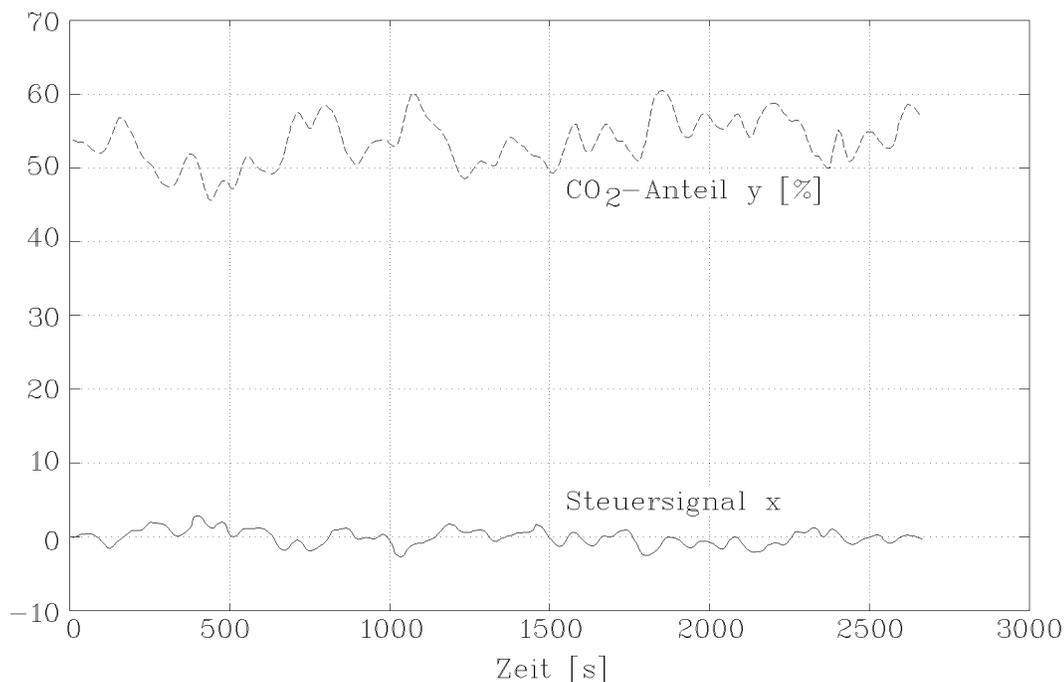


Bild 2.1: Gasofen-Daten aus Box und Jenkins (1970)

$$\dot{V}_{Methan}(t) = (0,6 - 0,04 x(t)) \frac{\text{cu. ft.}}{\text{min}} \quad (2.1)$$

steuert. Der Volumenstrom liegt im Bereich von $0,5 - 0,7 \frac{\text{cu. ft.}}{\text{min}}$ (entspricht $14,2 - 19,8 \frac{1}{\text{min}}$), das Steuersignal im Intervall $[-2,5 ; 2,5]$. Letzteres ist ein gefiltertes weißes Rauschen. Ausgangssignal ist der CO_2 -Anteil im Abgas des Ofens in %. Die Abtastzeit beträgt 9 s. Weitere Angaben können in Box und Jenkins (1970) gefunden werden.

2.2 Bisherige Ergebnisse aus der Literatur

Box und Jenkins (1970) haben in ihrem Buch ein lineares zeitdiskretes Modell mit der Übertragungsfunktion

$$F(z) = \frac{-z^{-3}(0,53 + 0,37z^{-1} + 0,51z^{-2})}{1 - 0,57z^{-1}} \quad (2.2)$$

identifiziert. Sie geben den mittleren quadratischen Fehler (1.1) dieses Modells mit

$$e_q^{BJ} = 0,71 \quad (2.3)$$

an. Eine eigene rekursive Simulation in MATLAB (o.A. 1990) (vgl. Bild 2.2) ergab dagegen einen Fehler von

$$e_q^{BJ \text{ rek}} = 0,725 \quad (2.4)$$

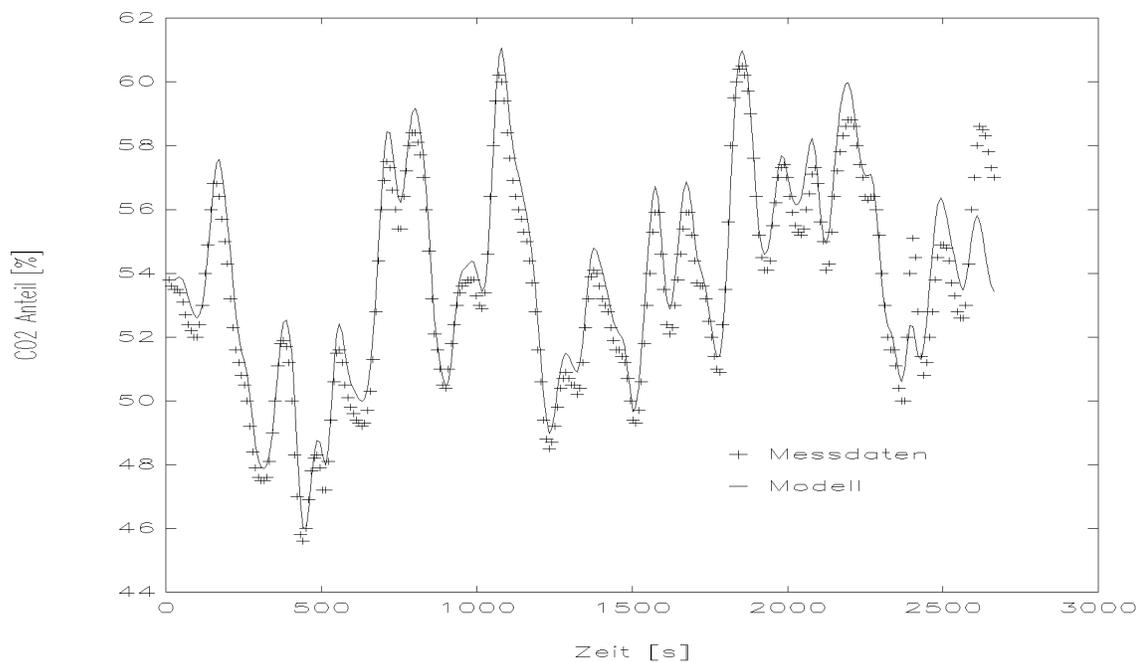


Bild 2.2: Lineare Übertragungsfunktion

Wertet man die Übertragungsfunktion (2.2) als Einschrittprädiktion aus, kann der Fehler auf

$$e_q^{BJ \text{ pr}} = 0,194 \quad (2.5)$$

reduziert werden. Pedrycz (1984a), der sich auf Box und Jenkins (1970) bezieht, gibt für diese Berechnungsmethode den Fehler mit

$$e_q^{BJ \text{ ped}} = 0,202 \quad (2.6)$$

an. Die beiden genannten Abweichungen sind wahrscheinlich durch unterschiedliche Berechnungsverfahren zu erklären.

Tong (1978) entwickelte für die gegebenen Daten ein erstes Fuzzy-Modell. Er erzielte bei der Einschnittprädiktion einen mittleren quadratischen Fehler von

$$e_q^{Tong} = 0,469, \quad (2.7)$$

der auch von Pedrycz (1984a) zitiert wird. Die Definitionsbereiche der beiden Eingangswerte waren dabei in 7 Fuzzy-Mengen für $u(k-4)$ bzw. 6 Fuzzy-Mengen für $y(k-1)$ unterteilt. Der Ausgangswert $y(k)$ besaß 6 Fuzzy-Mengen. Den verwendeten Algorithmus der "Logical examination" (LE) beschreibt Tong (1978) ausführlich.

Pedrycz (1984a) verwendet einen Identifikationsalgorithmus, der auf der Lösung von Fuzzy-Relationalgleichungen beruht. Dieser wird auch an anderer Stelle beschrieben (Pedrycz 1984b, 1985). Eine Besonderheit dieses Algorithmus besteht darin, daß er die Zugehörigkeitsfunktionen der Ein- und Ausgänge nicht willkürlich wählt, sondern mit Hilfe einer Fuzzy-Clustering-Methode bestimmt (Bezdek 1981). Damit kann insbesondere die Verteilung der Meßdaten über dem Wertebereich berücksichtigt werden.

Als Fuzzy-Operator wählte Pedrycz die max-prod-Komposition, die sich der max-min-Komposition als überlegen erwies. Die Eingangswerte des Modells sind $y(k)$ und $u(k-\tau)$, der Ausgangswert $y(k+1)$. Die Auswertung erfolgt als Einschnittprädiktion. Das beste Modell ergab sich mit einer Totzeit $\tau = 2$ ($\hat{=} 18s$). Die Ergebnisse für die Unterteilung aller Wertebereiche in jeweils 5, 7 und 9 Fuzzy-Mengen sind in der Tabelle 2.1 dargestellt. Die Zahl der identifizierten Regeln wird nur für das erste Modell angegeben, sie

Fuzzy-Mengen	5	7	9
mittl. quadratischer Fehler	0,776	0,478	0,320

Tabelle 2.1: Mittlerer quadratischer Fehler der Modelle nach Pedrycz (1984a)

beträgt 20. Es sei darauf hingewiesen, daß die Regelbasen automatisch generiert wurden. Eine Nachbesserung der Regeln „von Hand“ wie bei Tong wurde nicht vorgenommen.

Ein weiteres Fuzzy-Relationalmodell mit der Totzeit $\tau = 4$ wurde von Xu und Lu (1987) und Xu (1989) identifiziert. Nach der Schätzung eines initialen Modells wird dieses durch einen selbstlernenden Algorithmus stetig weiter verbessert. Dabei werden sowohl für die Eingangswerte $y(k)$ und $u(k-3)$ als auch für den Ausgangswert $y(k+1)$ jeweils fünf Fuzzy-Mengen definiert. Der mittlere quadratische Fehler dieses Modells ist mit

$$e_q^{Xu} = 0,328 \quad (2.8)$$

angegeben. Der Fehler wird allerdings erst ab dem elften Meßdatensatz berechnet. Man kann aus den Veröffentlichungen nicht erkennen, ob es sich wirklich, wie bei dem geringen Fehler zu vermuten ist, um eine Einschnittprädiktion handelt.

Sugeno und Tanaka (1991) identifizierten zwei Fuzzy-Modelle. Da es sich hierbei aber um Fuzzy-Funktionalmodelle handelt, sind die Ergebnisse nur bedingt vergleichbar. Beide Modelle bestehen je aus nur zwei Regeln. Die Prämisse bezieht sich in beiden Fällen auf $y(k-1)$, die Folgerung ist $y(k)$. Beim ersten Modell wird dessen Wert durch eine Linearkombination aus $y(k-1)$, $y(k-2)$, $y(k-3)$, $u(k)$, $u(k-1)$ und $u(k-2)$ berechnet, beim zweiten Modell nur aus $y(k-1)$ und $u(k-1)$. Die Modellparameter werden durch rekursive Optimierung und ein Least-Squares-Verfahren bestimmt. Die angegebenen quadratischen Fehler sind

$$e_q^{ST1} = 0,068 \quad \text{und} \quad e_q^{ST2} = 0,359 . \quad (2.9)$$

Auch hier läßt sich vermuten, daß es sich um eine Einschnittprädiktion handelt.

Die jüngste Veröffentlichung, die sich mit der Fuzzy-Modellierung der Box-Jenkins Daten beschäftigt, stammt von Sugeno und Yasukawa (1993). Sie entwickeln ein "Position-gradient-model", das einen mittleren quadratischen Fehler von

$$e_q^{SY} = 0,190 \quad (2.10)$$

bei 6 Regeln aufweist. Die Eingangssignale sind $y(k)$, $u(k-3)$ und $u(k-2)$, das Ausgangssignal $y(k+1)$. Der genaue Algorithmus wird in Sugeno und Yasukawa (1993) beschrieben.

3 Eigene Ergebnisse

In diesem Abschnitt wird zunächst ein weiterentwickelter Fuzzy-Identifikationsalgorithmus auf die Meßdaten angewendet. Zum Vergleich wird anschließend ein optimiertes Modell berechnet und ausgewertet (Küpper 1993).

3.1 Identifikation

Der verwendete Identifikationsalgorithmus (Bertram und Schwarz 1993, Küpper 1993) beruht auf dem von Pedrycz (1984a) vorgestellten Verfahren. Er wurde im Fachgebiet MSRT weiterentwickelt. Als Zugehörigkeitsfunktionen werden symmetrische, über einem kontinuierlichen Grundbereich gleichverteilte Dreiecke verwendet, die sich zu jeweils 50% überlappen und ein Fuzzy-Informationssystem bilden. Einzelheiten zum Algorithmus können in der angeführten Literatur gefunden werden. Zur Defuzzifizierung wird die erweiterte Schwerpunktbildung verwendet. Es sei jedoch darauf hingewiesen, daß bei der Überlagerung der Flächen verschiedener Zugehörigkeitsfunktionen (nicht bei der Überlagerung der Gewichte der gleichen Menge $y(k)$ wird. Mit anderen Worten werden doppelt gezählt

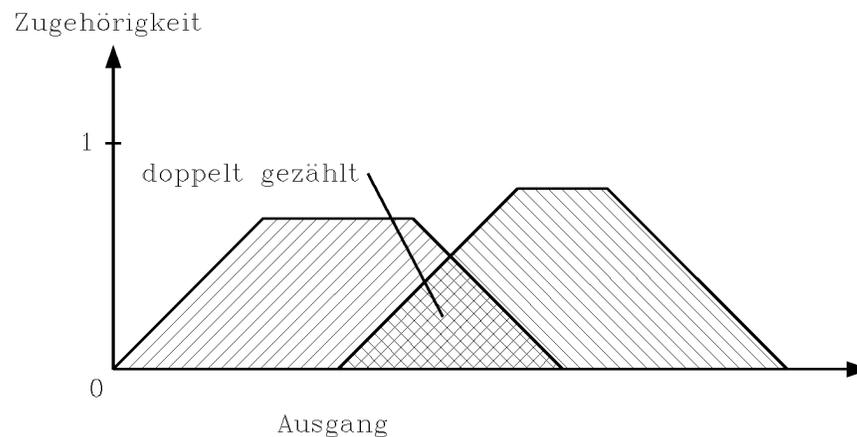


Bild 3.1: Verwendung des Summenoperators bei der Defuzzifizierung

verwendet, als Ausgangswert $y(k + 1)$. In einem ersten Schritt wurden drei Kompositionsooperatoren, max-min, max-prod und sum-prod (Bertram 1991), sowie unterschiedliche Totzeiten τ untersucht. Die mittleren quadratischen Fehler dieser Varianten sind in Bild 3.2 dargestellt. Dabei sind die Eingangs- und Ausgangswertebereiche in 7 Fuzzy-Mengen unterteilt. Die Totzeit $\tau = 3$ mit dem kleinsten Fehler für alle drei Kompositionen wurde dann für alle weiteren Identifikationsläufe verwendet. Dabei wurde die Zahl der Fuzzy-Mengen für die Wertebereiche von 5 auf 7 bzw. 9 erhöht. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3.1 dargestellt. Bei der sum-prod Komposition kann ohne Verlust der Genauigkeit auf *nur zwei* Fuzzy-Mengen am Ausgang zurückgegangen werden. Das führt zu einer deutlich niedrigeren Regelanzahl. Die Ergebnisse sind durchgehend besser als bei Pedrycz.

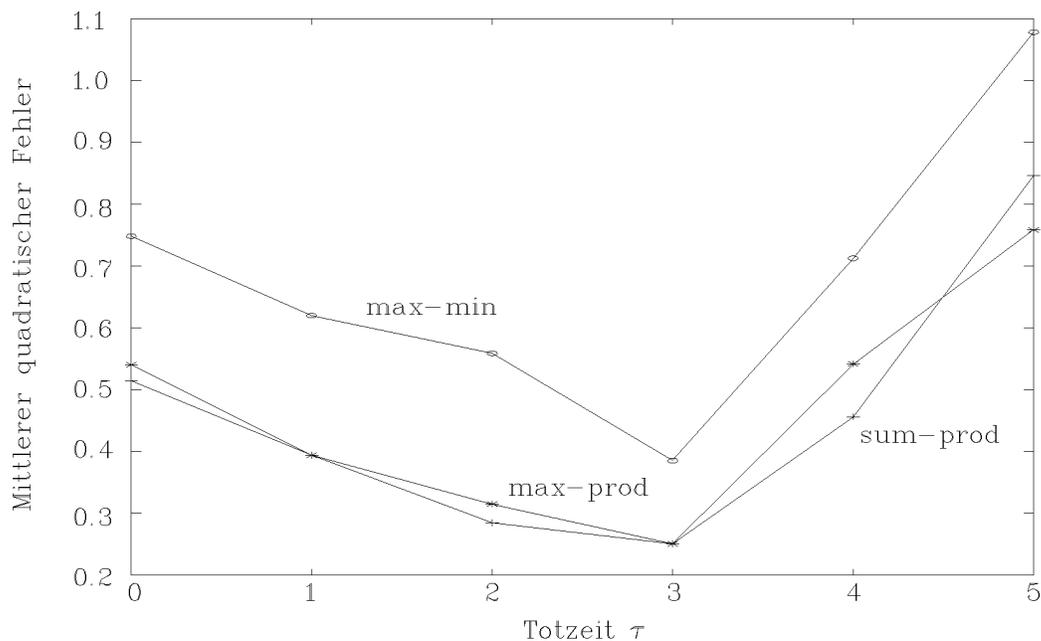


Bild 3.2: Fehler für verschiedene Totzeiten und Operatoren

Jedoch muß darauf hingewiesen werden, daß in allen Fällen auch mehr Regeln identifiziert werden. Ein Vergleich zwischen den Meßdaten und dem identifizierten Modell mit 9 Fuzzy-Mengen und der sum-prod Komposition ist in Bild 3.3 dargestellt.

In einem letzten Schritt wurden schließlich die besten für die drei verschiedenen Kompositionsooperatoren gefundenen Modelle auch rekursiv ausgewertet, d.h., das geschätzte $\hat{y}(k+1)$ wird im nächsten Schritt als Eingangswert verwendet. Die quadratischen Fehler sind in Tabelle 3.2 dargestellt, der Verlauf der Meßwerte für das rekursive Modell mit dem sum-prod Operator findet sich in Bild 3.4. Mit diesem Fuzzy-Modell kann also die Güte der linearen Übertragungsfunktion (2.2) von Box und Jenkins (1970) erreicht werden, wenn auch mit einem etwas höheren Aufwand.

Tabelle 3.1: Mittlerer quadratischer Fehler und Zahl der Regeln

Fuzzy-Mengen Ein- und Ausgangswerte	5		7		9	
	Fehler	Regeln	Fehler	Regeln	Fehler	Regeln
max-min	0,9164	65	0,3854	112	0,2351	168
max-prod	0,4854	67	0,3152	123	0,2037	189
sum-prod	0,6416	65	0,2511	112	0,1754	168
sum-prod Ausgang: 2 Fuzzy-M.	0,6416	40	0,2511	68	0,1754	102

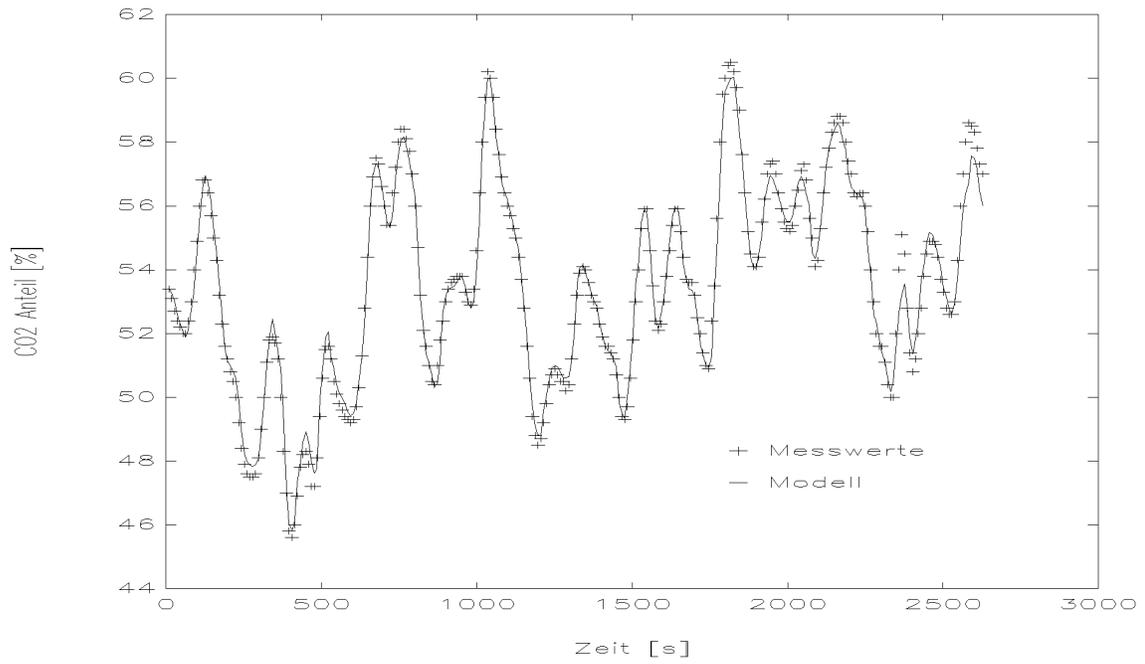


Bild 3.3: Fuzzy-Modell mit 9 Fuzzy-Mengen (sum-prod)

Tabelle 3.2: Mittlerer quadratischer Fehler der rekursiven Modelle

	max-min	max-prod	sum-prod
mittl. quadr. Fehler	1,0368	1,1353	0,8502

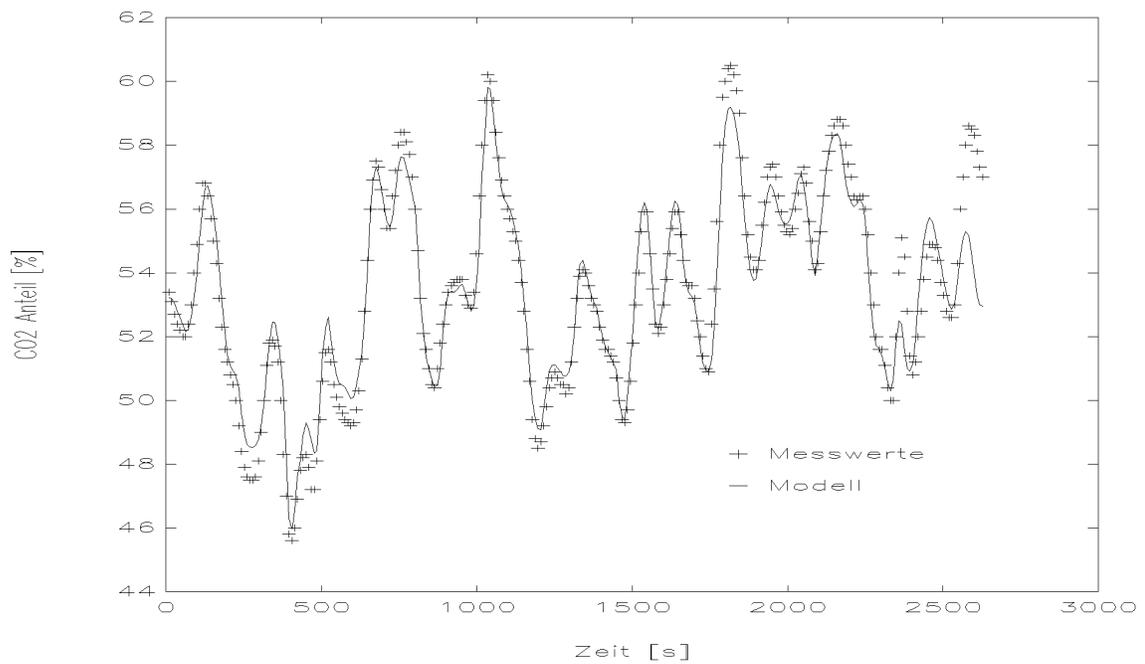


Bild 3.4: Rekursives Fuzzy-Modell

3.2 Optimierung

Neben der Identifikation der Parameter eines Fuzzy-Modells, die in den vorhergehenden Abschnitten dargestellt wurde, ist auch eine Optimierung möglich (Küpper 1993). Dabei werden die Elemente der Relationalmatrix¹ über eine numerische Optimierung so bestimmt, daß das Fuzzy-Modell die Meßdaten im Sinne eines kleinsten quadratischen Fehlers optimal wiedergibt. Sie soll hier weniger als eine weitere Möglichkeit zur Bestimmung der Relationalmatrix verwendet werden als vielmehr die Möglichkeiten und Grenzen der Fuzzy-Modellbildung aufzeigen. Um den numerischen Aufwand in Grenzen zu halten, wurde das Fuzzy-Modell mit je 5 Fuzzy-Mengen für die Eingangswerte $y(k)$ und $u(k-3)$ und 2 Fuzzy-Mengen für den Ausgang $y(k+1)$ optimiert. Somit müssen $5 \times 5 \times 2 = 20$ Parameter optimiert werden. Die numerische Optimierung erfolgte in MATLAB (o.A. 1990), die Elemente der Relationalmatrix sind alle größer Null.

Das optimierte Fuzzy-Modell wurde wiederum sowohl als Einschrittprädiktion als auch als rekursives Modell ausgewertet. Die entsprechenden Verläufe der Werte sind in den Bildern 3.5 und 3.6 dargestellt. Die mittleren quadratischen Fehler sind dabei

$$e_q^{opt pr} = 0,1162 \quad \text{und} \quad e_q^{opt rek} = 0,7804. \quad (3.1)$$

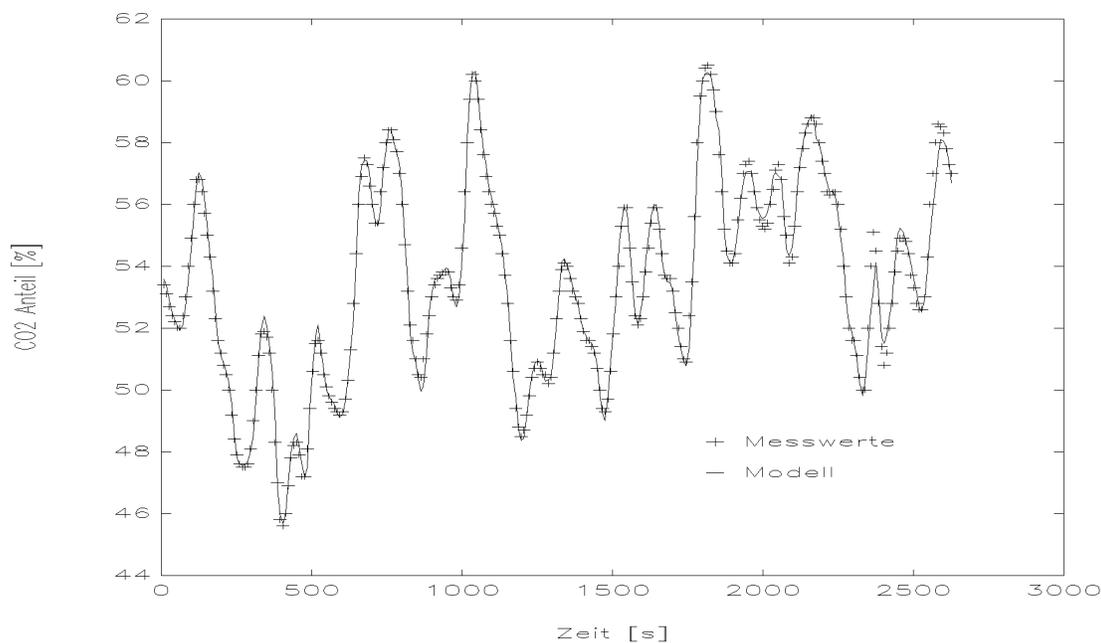


Bild 3.5: Optimiertes Modell, Einschrittprädiktion

Sie liegen damit deutlich unter dem Fehler, den das beste identifizierte Fuzzy-Modell mit je 9 Fuzzy-Mengen für die Eingangswerte aufzuweisen hat. Das läßt auf weiteres Entwicklungspotential bei der Fuzzy-Modellbildung schließen.

¹Der Begriff „Relationalmatrix“ hat sich in der Literatur eingebürgert und wird auch hier verwendet. Tatsächlich handelt es sich um einen Tensor, dessen Dimension von der Zahl der Ein- und Ausgangswerte abhängt

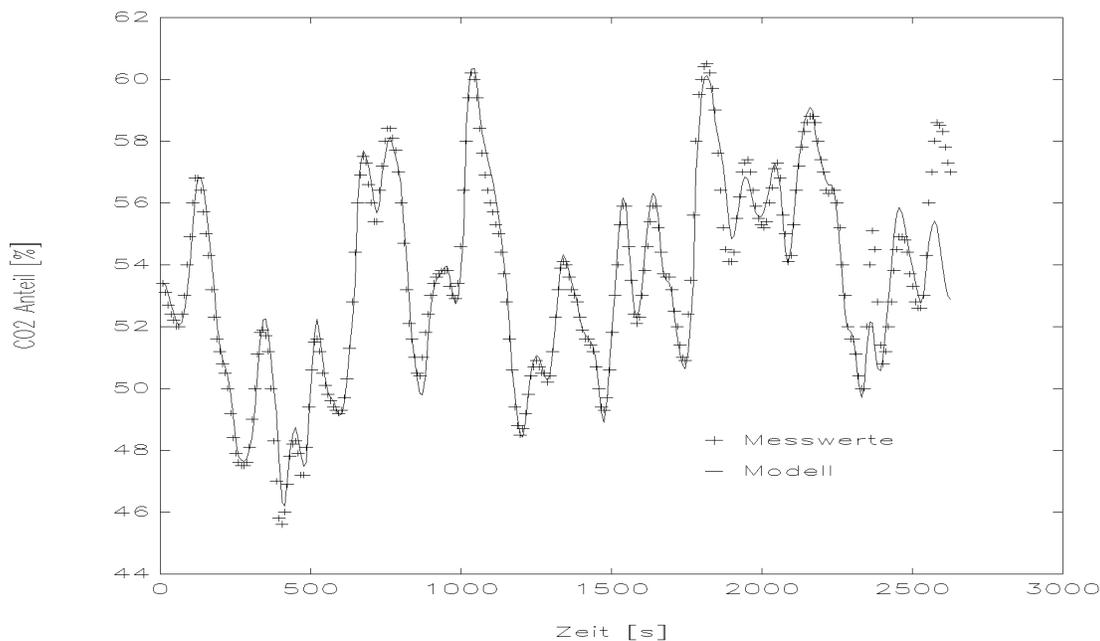


Bild 3.6: Optimiertes Modell, rekursive Auswertung

4 Einfluß der Fuzzy-Mengen des Ausgangs

Bei der praktischen Arbeit mit dem Identifikationsalgorithmus wurde festgestellt, daß die Zahl der Fuzzy-Referenzmengen keinen Einfluß auf die Ergebnisse hat. Das ist auch im Abschnitt 3 zu sehen. Diese Tatsache führte auf die im folgenden erläuterten und bewiesenen Aussagen. Dabei wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit davon ausgegangen, daß die Meßwerte auf das Intervall $[-1, 1]$ transformiert sind.

4.1 Vereinfachtes äquivalentes Fuzzy-System

Im folgenden wird gezeigt, daß bei der Verwendung der sum-prod-Inferenz und der Defuzzifizierung über die erweiterte Flächenschwerpunktmethode zwei Fuzzy-Mengen für die Ausgangsgröße ausreichen, um jede andere Zahl, Form und Verteilung von Fuzzy-Mengen ersetzen zu können. Eine Berechnungsformel für die Relationalmatrixelemente des sich ergebenden vereinfachten Fuzzy-Modells werden in diesem Abschnitt hergeleitet.

Die beiden Fuzzy-Mengen sind für einen Wertebereich der Ausgangsgröße von $[-1, 1]$ in Bild 4.1 dargestellt. Im folgenden wird ein Fuzzy-System mit a Eingängen

$$x_i \in \mathbb{D}_i, \quad i = 1 \dots a \quad (4.1)$$

betrachtet, wobei \mathbb{D}_i der jeweilige Definitionsbereich ist. Auf diesem seien jeweils c_i , $i = 1 \dots a$ Fuzzy-Mengen $X_{p_i}^i$ für die Eingangsgrößen x_i definiert:

$$\mathbb{X}^i = \{X_{p_i}^i | X_{p_i}^i \rightarrow [0, 1]\}, \quad p_i = 1 \dots c_i, \quad i = 1 \dots a. \quad (4.2)$$

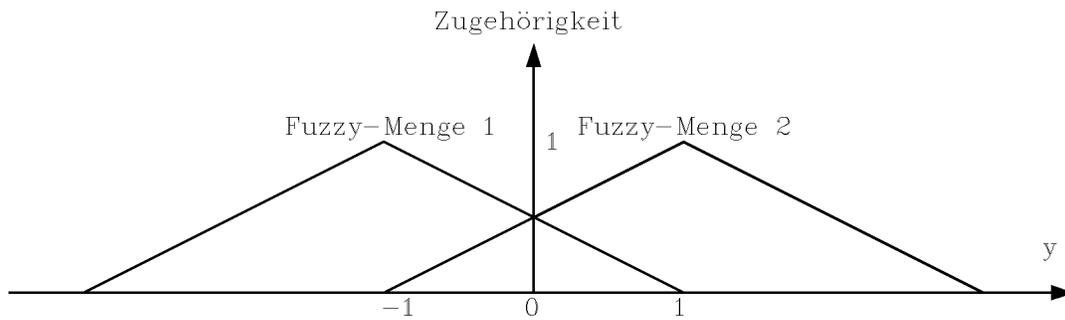


Bild 4.1: Ersatzfuzzy-Mengen für die Ausgangsgröße

Die Ausgangsgröße sei, ohne Beschränkung der Allgemeinheit,

$$y \in \mathbb{W} = [-1, 1]. \quad (4.3)$$

Auf diesem Intervall seien b Fuzzy-Mengen für die Ausgangsgröße definiert

$$\mathbb{Y} = \{Y_k | Y_k \rightarrow [0, 1]\}, \quad k = 1 \dots b. \quad (4.4)$$

Die allgemeinste Regel R_l innerhalb des betrachteten Fuzzy-Systems ist also

$$\text{Wenn } X_{p_{1l}}^1(x_1) \text{ und } X_{p_{2l}}^2(x_2) \text{ und } \dots \text{ und } X_{p_{al}}^a(x_a) \text{ dann } Y_k(y) \mid g_{kl}, \quad (4.5)$$

wobei g_{kl} die Gewichtung dieser Regel ist. Dabei bedeutet $X_{p_i l}^i \in \mathbb{X}^i$ eine beliebige, aber feste Fuzzy-Menge über x_i . Der Index l kennzeichnet die Regel, der Index k die Fuzzy-Menge Y_k des Ausgangs, die angesprochen wird. Wird diese Regel nun ausgewertet, ergibt sich ihr Erfülltheitsgrad und damit die Zugehörigkeit μ_{kl} von Y_k zu

$$\mu_{kl} = g_{kl} X_{p_1}^1(x_1) X_{p_2}^2(x_2) \cdots X_{p_a}^a(x_a) = g_{kl} \alpha_l. \quad (4.6)$$

Es ist nun grundsätzlich möglich, dem Voraussetzungsteil der Regel (4.5) (Index l) jede Fuzzy-Menge des Ausgangs Y_k , $k = 1 \dots b$ mit einer Gewichtung g_{kl} als Folgerungsteil zuzuordnen und so b Regeln zu generieren. Eine solche Gruppe von Regeln, die alle den gleichen Voraussetzungsteil besitzen, soll im folgenden als *Regelsatz* bezeichnet werden. Ein „vollständiges“ Fuzzy-System besteht aus mehreren solchen Regelsätzen, genauer gesagt aus

$$z = \prod_{i=1}^a c_i \quad (4.7)$$

Jetzt wird der scharfe Ausgang des Fuzzy-Systems für *einen* Regelsatz berechnet. Die Defuzzifizierung nach der erweiterten Schwerpunktmethodemethode kann durch folgende Formel beschrieben werden:

$$\hat{y}_l = \frac{\sum_{k=1}^b \mu_{kl} s_k F_k}{\sum_{k=1}^b \mu_{kl} F_k} = \quad (4.8a)$$

$$= \frac{X_{p_{1l}}^1(x_1)X_{p_{2l}}^2(x_2)\cdots X_{p_{al}}^a(x_a)\sum_{k=1}^b g_{kl}s_k F_k}{X_{p_{1l}}^1(x_1)X_{p_{2l}}^2(x_2)\cdots X_{p_{al}}^a(x_a)\sum_{k=1}^b g_{kl} F_k} \quad (4.8b)$$

$$= \frac{\alpha_l \sum_{k=1}^b g_{kl}s_k F_k}{\alpha_l \sum_{k=1}^b g_{kl} F_k} = \frac{\sum_{k=1}^b g_{kl}s_k F_k}{\sum_{k=1}^b g_{kl} F_k}, \quad l = 1 \dots z. \quad (4.8c)$$

Dabei ist s_k der y-Wert des Schwerpunktes und F_k die Fläche der Zugehörigkeitsfunktion Y_k des Ausgangs.

Wird das Fuzzy-System mit einem Meßwertesatz $\{x_1 \dots x_a\}$ beaufschlagt, werden im allgemeinen mehrere Regelsätze angesprochen. Der Grund dafür ist, daß jede scharfe Eingangsgröße mehreren Fuzzy-Mengen $X_{p_i}^i$ des Eingangs zugehörig ist. Werden d Regelsätze angeregt, wird jede Ausgangsfuzzy-Menge Y_k d -mal angesprochen und jeweils mit der Zugehörigkeit μ_{kl} , $l = 1 \dots d$ gewichtet. Da in dieser Herleitung der Summenoperator für die Komposition verwendet wird, müssen diese Zugehörigkeitsgrade über l summiert werden:

$$\mu_k = \sum_{l=1}^d \mu_{kl}, \quad k = 1 \dots b. \quad (4.9)$$

Die scharfe Ausgangsgröße \hat{y} errechnet sich zu

$$\hat{y} = \frac{\sum_{k=1}^b \left(\sum_{l=1}^d \mu_{kl} \right) s_k f_k}{\sum_{k=1}^b \left(\sum_{l=1}^d \mu_{kl} \right) f_k}. \quad (4.10)$$

Nun werden die Summen in Gl. (4.10) vertauscht und die Summe über die Regelsätze aufgelöst:

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{\sum_{l=1}^d \left(\sum_{k=1}^b \mu_{kl} s_k F_k \right)}{\sum_{l=1}^d \left(\sum_{k=1}^b \mu_{kl} F_k \right)} \\ &= \frac{\alpha_1 \sum_{k=1}^b g_{k1} s_k F_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^b g_{k2} s_k F_k + \cdots + \alpha_d \sum_{k=1}^b g_{kd} s_k F_k}{\alpha_1 \sum_{k=1}^b g_{k1} F_k + \alpha_2 \sum_{k=1}^b g_{k2} F_k + \cdots + \alpha_d \sum_{k=1}^b g_{kd} F_k} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^d \alpha_l \sum_{k=1}^b g_{kl} s_k F_k}{\sum_{l=1}^d \alpha_l \sum_{k=1}^b g_{kl} F_k}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Diese allgemein gültige Formel wird jetzt für den Fall spezialisiert, daß der Ausgang nur in zwei Fuzzy-Mengen ($b = 2$) nach Bild 4.1 aufgeteilt ist. In diesem Fall sind die Flächen unter den Zugehörigkeitsfunktionen gleich ($F_1 = F_2$) und können aus Gl. (4.11) gekürzt werden. Die Schwerpunkte liegen bei $s_1 = -1$ bzw. $s_2 = 1$. Werden nun die Gewichte mit f_{1l} (linkes Dreieck) und f_{2l} (rechtes Dreieck) bezeichnet, ergibt sich

$$\begin{aligned} \hat{y} &= \frac{-\sum_{l=1}^d \mu_{1l} + \sum_{l=1}^d \mu_{2l}}{\sum_{l=1}^d \mu_{1l} + \sum_{l=1}^d \mu_{2l}} = \frac{-\mu_1 + \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ &= \frac{\alpha_1(-f_{11} + f_{21}) + \alpha_2(-f_{12} + f_{22}) + \dots + \alpha_d(-f_{1d} + f_{2d})}{\alpha_1(f_{11} + f_{21}) + \alpha_2(f_{12} + f_{22}) + \dots + \alpha_d(f_{1d} + f_{2d})} \\ &= \frac{\sum_{l=1}^d \alpha_l(-f_{1l} + f_{2l})}{\sum_{l=1}^d \alpha_l(f_{1l} + f_{2l})}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aus dem Vergleich von (4.11) mit (4.12),

$$\sum_{k=1}^b g_{k\ l} s_k F_k = (-f_{1l} + f_{2l}), \quad (4.13)$$

$$\sum_{k=1}^b g_{k\ l} F_k = (f_{1l} + f_{2l}), \quad l = 1 \dots d, \quad (4.14)$$

kann man unmittelbar die Rechenvorschriften für die Gewichte f_{1l} und f_{2l} herleiten:

$$f_{1l} = 0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k\ l} F_k - \sum_{k=1}^b g_{k\ l} s_k F_k \right), \quad l = 1 \dots d, \quad (4.15)$$

$$f_{2l} = 0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k\ l} F_k + \sum_{k=1}^b g_{k\ l} s_k F_k \right), \quad l = 1 \dots d. \quad (4.16)$$

Man kann also immer geeignete Gewichte f_{1l} und f_{2l} finden, so daß der Ausgang eines Fuzzy-Systems nur in die in Bild 4.1 gezeigten Fuzzy-Mengen unterteilt werden muß.

Diese Aussage ist nicht nur für die aus einer Identifikation stammenden Modelle interessant. Es können nämlich insbesondere auch Regler, die aus einem Voraussetzungsteil mehrere Schlußfolgerungen ziehen, erheblich vereinfacht werden. Das ist speziell bei zeitkritischen Anwendungen vorteilhaft.

4.2 Exakte Darstellung eines Meßwertes

Das von Bertram und Schwarz (1993) und Küpper (1993) beschriebene Fuzzy-Identifikationsverfahren wurde aus dem Verfahren von Pedrycz (1984) weiterentwickelt. Die

wesentlichen Erweiterungen liegen in der Verwendung der sum-prod-Inferenz und der Tatsache, daß zu einem Bedingungsteil mehrere, z.T. auch widersprüchliche Folgerungsteile unterschiedlicher Gewichtung zugelassen werden. Pedrycz beschränkt sich auf die Zulassung des Folgerungsteils mit dem höchsten Erfülltheitsgrad. Diese Änderungen wurden hauptsächlich heuristisch gefunden und die höhere Qualität der so gewonnenen Fuzzy-Modelle konnte in Simulationen und an Meßdaten (Bertram und Schwarz 1993, Küpper 1993) nachgewiesen werden.

Hier soll nun ein Teilaspekt des Identifikationsalgorithmus näher untersucht werden: Jeder Datensatz generiert eine Teilrelationalmatrix, die zu der gesuchten Gesamtrelationalmatrix beiträgt. Bereits in Küpper (1993) wurde numerisch gezeigt, daß unter bestimmten Voraussetzungen die Teilrelationalmatrix ihren erzeugenden Meßwertesatz exakt darstellt. Das heißt, wenn sie mit den Eingangswerten aus dem Datensatz beaufschlagt wird, ist der defuzzyfizierte Ausgang genau gleich der Ausgangsgröße im Meßdatensatz. Diese Aussage schließt die Fuzzyfizierung und Defuzzyfizierung notwendigerweise mit ein und geht damit über die Betrachtung der Relationalgleichungen wie z.B. in Pedrycz (1984a) hinaus.

Es werden wie im vorhergehenden Abschnitt die sum-prod-Inferenz und die Defuzzyfizierung mit der erweiterten Schwerpunktmethode verwendet. Für die b Fuzzy-Mengen $Y_k, k = 1 \dots b$ des Ausgangswertes werden die folgenden zusätzlichen Annahmen gemacht: Über dem Definitionsbereich $\mathbb{W} = [-1, 1]$ sind die Zugehörigkeitsfunktionen symmetrische, gleichverteilte Dreiecke mit einer Überschneidung von 50%. Die Spitzen der äußeren Dreiecke liegen auf den Intervallgrenzen. Die Spitzenabstände der Dreiecke sind also

$$\Delta s = \frac{2}{b-1}. \quad (4.17)$$

Die Basisbreite der Dreiecke ist $2 \times \Delta s$. Dementsprechend gehört jeder scharfe Ausgangswert zu maximal 2 Fuzzy-Mengen. Für einen beliebigen Ausgangswert $y_0 \in \mathbb{W}$ sind die beiden angesprochenen Fuzzy-Mengen in Bild 4.2 herausgezeichnet. Dabei sei die linke

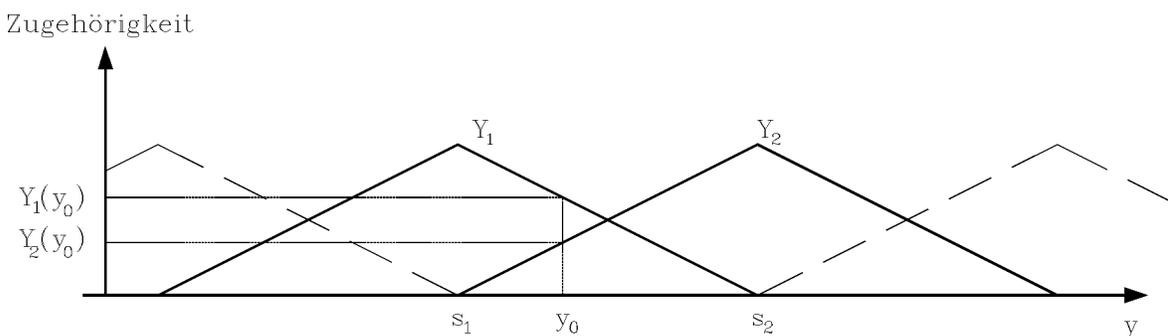


Bild 4.2: Fuzzy-Mengen für eine scharfe Ausgangsgröße

Fuzzy-Menge willkürlich mit Y_1 und die rechte mit Y_2 bezeichnet. Dementsprechend sind s_i die Schwerpunkte der Dreiecke.

Zunächst wird nun die Defuzzifizierung eines scharfen Ausgangswertes beschrieben:

$$\hat{y}_0 = \frac{s_1 F_1 \mu_1 + s_2 F_2 \mu_2}{F_1 \mu_1 + F_2 \mu_2} = \frac{s_1 \mu_1 + s_2 \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} . \quad (4.18)$$

Dabei sind μ_i die Summen der Erfülltheitsgrade, die aus den einzelnen Regeln eines Fuzzy-Modells aufaddiert wurden. Die Flächen F_i sind gleich und können gekürzt werden. Nun wird der reale Ausgangswert y_0 , der aus einem Meßdatensatz stammt fuzzyfiziert. Die sich dabei nach Bild 4.2 ergebenden Zugehörigkeiten sind

$$Y_1(y_0) = \frac{s_2 - y_0}{s_2 - s_1} \quad \text{und} \quad (4.19a)$$

$$Y_2(y_0) = \frac{y_0 - s_1}{s_2 - s_1} . \quad (4.19b)$$

Werden diese Werte für μ_i in Gl. (4.18) eingesetzt, ergibt sich

$$\hat{y}_0 = \frac{s_1 Y_1(y_0) + s_2 Y_2(y_0)}{Y_1(y_0) + Y_2(y_0)} = \frac{s_1(s_2 - y_0) + s_2(y_0 - s_1)}{s_2 - y_0 + y_0 - s_1} = y_0 . \quad (4.20)$$

Die Defuzzifizierung nach der erweiterten Schwerpunktmethode ist also unter den genannten Voraussetzungen die inverse Operation zur beschriebenen Fuzzyfizierung.

Es bleibt nun zu zeigen, daß die Defuzzifizierung mit dem Meßdatensatz und der identifizierten Teilrelationalmatrix sich ebenfalls auf die Form (4.20) bringen läßt. Dazu werden zunächst die Zugehörigkeiten μ_1 und μ_2 bestimmt. Sie setzen sich aus den Erfülltheitsgraden von d Regeln zusammen

$$\mu_1 = \sum_{l=1}^d \mu_{1l} = \sum_{l=1}^d g_{1l} \alpha_l \quad (4.21)$$

$$\mu_2 = \sum_{l=1}^d \mu_{2l} = \sum_{l=1}^d g_{2l} \alpha_l . \quad (4.22)$$

Dabei kennzeichnet der erste Index von g die Fuzzy-Menge des Ausgangs an, der zweite Index, wie bereits im Abschnitt 4.1, den Voraussetzungsteil der Regel. α_l gibt die Erfülltheitsgrade der Voraussetzungsteile der Regeln an. Die Gewichtungen g_{kl} der Regeln werden bei der Identifikation gemäß der Verwendung des Produktoperators als das Produkt der Zugehörigkeiten der Ein- und Ausgangswerte zu den jeweiligen Fuzzy-Mengen bestimmt

$$\begin{aligned} g_{11} &= Y_1(y_0) \alpha_1 \\ g_{12} &= Y_1(y_0) \alpha_2 , \\ &\vdots \\ g_{1d} &= Y_1(y_0) \alpha_d , \end{aligned} \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned}
g_{2\ 1} &= Y_2(y_0)\alpha_1 \\
g_{2\ 2} &= Y_2(y_0)\alpha_2 , \\
&\vdots \\
g_{2\ d} &= Y_2(y_0)\alpha_d .
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Da die Erfülltheitsgrade der Voraussetzungsteile α_l in Gl. (4.21) und Gl. (4.23) bzw. in Gl. (4.22) und Gl. (4.24) gleich sind (Es werden ja genau die Daten betrachtet, mit denen das Modell auch identifiziert wurde), kann man Gl. (4.21) und (4.22) umschreiben

$$\begin{aligned}
\mu_1 &= Y_1(y_0)\alpha_1^2 + Y_1(y_0)\alpha_2^2 + \cdots + Y_1(y_0)\alpha_d^2 \\
&= Y_1(y_0) \sum_{l=1}^d \alpha_l^2 ,
\end{aligned} \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
\mu_2 &= Y_2(y_0)\alpha_1^2 + Y_2(y_0)\alpha_2^2 + \cdots + Y_2(y_0)\alpha_d^2 \\
&= Y_2(y_0) \sum_{l=1}^d \alpha_l^2 .
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Werden diese Ausdrücke in Gl. (4.18) eingesetzt

$$\hat{y}_0 = \frac{s_1\mu_1 + s_2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \tag{4.27}$$

$$= \frac{s_1 Y_1(y_0) \sum_{l=1}^d (\alpha_l)^2 + s_2 Y_2(y_0) \sum_{l=1}^d (\alpha_l)^2}{Y_1(y_0) \sum_{l=1}^d (\alpha_l)^2 + Y_2(y_0) \sum_{l=1}^d (\alpha_l)^2} \tag{4.28}$$

$$= \frac{s_1 Y_1(y_0) + s_2 Y_2(y_0)}{Y_1(y_0) + Y_2(y_0)} . \tag{4.29}$$

ergibt sich genau Gl. (4.20). Damit ist gezeigt, daß mit den Gewichten $g_{k\ l}$ aus der Identifikation, also mit der Teilrelationalmatrix für einen Meßwertesatz, die exakte Ausgangsgröße wiedergefunden werden kann.

Dieses Ergebnis zeigt, daß Abweichungen zwischen der Auswertung eines Fuzzy-Relationalmodells und den Meßdaten auf die Verknüpfung der Teilrelationalmatrizen zur Gesamtrationalmatrix zurückzuführen sind. Es bedarf also noch weiterer Untersuchungen, um einen geeigneten Verknüpfungsoperator zu finden.

4.3 Identifikation des vereinfachten Fuzzy-Systems

Im Abschnitt 4.1 konnte gezeigt werden, daß, unter den gemachten Annahmen, jedes Fuzzy-Modell in ein anderes umgerechnet werden kann, bei dem der Definitionsbereich der Ausgangsgröße $y \in \mathbb{W}$ nur in zwei Fuzzy-Mengen unterteilt wird. Dieses neue Modell soll als „vereinfachtes Modell“ bezeichnet werden, das ursprüngliche Modell als „komplexes

Modell“. Die Umrechnung ist selbstverständlich auch dann möglich, wenn das „komplexe Modell“ aus der Identifikation z.B. von Meßdaten stammt. Es kann darüber hinaus gezeigt werden, daß in diesem Fall das „vereinfachte Modell“ genau dem Modell entspricht, daß der gleiche Identifikationsalgorithmus findet, wenn dabei von vornherein nur zwei Fuzzy-Mengen für die Ausgangsgröße y vorgegeben werden. Dieses Modell soll „direktes Modell“ heißen. Es müssen ferner die in Abschnitt 4.2 gemachten Annahmen, insbesondere über die Formen der Fuzzy-Mengen gelten. Die Gleichheit wird im folgenden bewiesen.

Zunächst soll nur ein Meßdatensatz betrachtet werden. Beide Modelle, also das „direkte Modell“ und das „vereinfachte Modell“ beschreiben den Meßdatensatz exakt. Das wurde in den beiden vorhergehenden Abschnitten bereits gezeigt. Wird das „vereinfachte Modell“ mit (*) gekennzeichnet, ist also die Gleichung

$$(\hat{y})^* = \hat{y} = y_0 \quad (4.30)$$

erfüllt, wobei y_0 der exakte Meßwert ist.

Gemäß den Voraussetzungen von Abschnitt 4.2 sind die Flächen der Fuzzy-Mengen für den Ausgang des „komplexen Modells“ gleich. Damit vereinfacht sich Gl. (4.10) zu

$$\hat{y} = \frac{\sum_{k=1}^b \left(\sum_{l=1}^d \mu_{k l} \right) s_k}{\sum_{k=1}^b \left(\sum_{l=1}^d \mu_{k l} \right)}, \quad (4.31)$$

und die Elemente der Relationalmatrix des „vereinfachten Modells“ berechnen sich zu (vgl. Gl. (4.15) und Gl. (4.16))

$$f_{1 l}^* = 0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k l} - \sum_{k=1}^b g_{k l} s_k \right), \quad l = 1 \dots d, \quad (4.32)$$

$$f_{2 l}^* = 0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k l} + \sum_{k=1}^b g_{k l} s_k \right), \quad l = 1 \dots d. \quad (4.33)$$

Diese Elemente sollen mit denen des „direkten Modells“, $f_{1 l}$ und $f_{2 l}$, übereinstimmen. Um das zu zeigen, werden zunächst alle Relationalelemente $g_{k l}$ und $f_{k l}^*$ gemäß Gl. (4.23) und Gl. (4.24) umgeformt. Dabei bezeichnet die Tilde $\tilde{}$ die Fuzzy-Mengen des „komplexen Modells“.

$$f_{1 l}^* = 0,5 \left(\sum_{k=1}^b \tilde{Y}_k(y_0) \alpha_l - \sum_{k=1}^b \tilde{Y}_k(y_0) \alpha_l s_k \right) \quad (4.34)$$

$$\stackrel{!}{=} f_{1 l} = Y_1(y_0) \alpha_l, \quad l = 1 \dots d,$$

$$f_{2 l}^* = 0,5 \left(\sum_{k=1}^b \tilde{Y}_k(y_0) \alpha_l + \sum_{k=1}^b \tilde{Y}_k(y_0) \alpha_l s_k \right) \quad (4.35)$$

$$\stackrel{!}{=} f_{2 l} = Y_1(y_0) \alpha_l, \quad l = 1 \dots d.$$

Die Erfülltheitsgrade der Voraussetzungsteile α_l sind gleich. Nach den im vorherigen Abschnitt gemachten Annahmen über die Fuzzy-Mengen des Ausgangs $\tilde{Y}_k(y_0)$ werden von einem scharfen Wert y_0 nur zwei Fuzzy-Mengen aktiviert. Ihr Zugehörigkeitsgrad ist durch Gl. (4.19) und (4.20) beschrieben und sei hier noch einmal angeben:

$$\tilde{Y}_1(y_0) = \frac{s_2 - y_0}{s_2 - s_1}, \quad (4.36a)$$

$$\tilde{Y}_2(y_0) = \frac{y_0 - s_1}{s_2 - s_1}. \quad (4.36b)$$

Für das „direkte Modell“ ergibt sich mit $s_1 = -1$ und $s_2 = 1$

$$Y_1(y_0) = \frac{1}{2}(1 - y_0) \quad \text{und} \quad (4.37a)$$

$$Y_2(y_0) = \frac{1}{2}(1 + y_0). \quad (4.37b)$$

Durch Einsetzen dieser Werte ergibt in Gl. (4.35) und (4.36) sich unmittelbar die Erfüllung der Gl. (4.36). Damit ist gezeigt, daß die Teilrelationalmatrizen des direkten und des vereinfachten Modells für einen Meßwertesatz übereinstimmen. Es bleibt, deren Überlagerung zur Gesamrelationalmatrix zu betrachten. Der Fall, daß die Gesamrelationalmatrix des „vereinfachten Modells“ aus seinen Teilrelationalmatrizen berechnet wird, ist trivial. Werden dagegen die Teilrelationalmatrizen des komplexen Modells zusammengefaßt und erst danach vereinfacht, ist ein Zwischenschritt notwendig.

Bei der Zusammenfassung der Teilrelationalmatrizen werden deren Elemente addiert. Betrachtet man nun die des „direkten Modells“ für einen bestimmten Voraussetzungsteil, gekennzeichnet mit dem Index l , gilt für das Gesamtergebnis

$$f_{1\ l\ ges} = \sum_{m=1}^N f_{1\ l\ m}, \quad (4.38)$$

$$f_{2\ l\ ges} = \sum_{m=1}^N f_{2\ l\ m}. \quad (4.39)$$

Dabei bezeichnet N die Zahl der Meßdatensätze. Da die Gewichte $f_{1\ l\ m}$ und $(f_{1\ l\ m})^*$, wie gezeigt, gleich sind, gilt mit den Gleichungen (4.32) und (4.33)

$$\begin{aligned} f_{1\ l\ ges} &= \sum_{m=1}^N (f_{1\ l\ m})^* \\ &= \sum_{m=1}^N \left(0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k\ l\ m} - \sum_{k=1}^b g_{k\ l\ m} s_k \right) \right) \\ &= 0,5 \left(\sum_{k=1}^b \left(\sum_{m=1}^N g_{k\ l\ m} \right) - \sum_{k=1}^b \left(\sum_{m=1}^N g_{k\ l\ m} \right) s_k \right) \\ &= 0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k\ l\ ges} - \sum_{k=1}^b g_{k\ l\ ges} s_k \right) \end{aligned}$$

$$= (f_{1 \text{ l ges}})^* , \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned} f_{2 \text{ l ges}} &= \sum_{m=1}^N (f_{2 \text{ l m}})^* \\ &= \sum_{m=1}^N \left(0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k \text{ l m}} + \sum_{k=1}^b g_{k \text{ l m}} s_k \right) \right) \\ &= 0,5 \left(\sum_{k=1}^b \left(\sum_{m=1}^N g_{k \text{ l m}} \right) + \sum_{k=1}^b \left(\sum_{m=1}^N g_{k \text{ l m}} \right) s_k \right) \\ &= 0,5 \left(\sum_{k=1}^b g_{k \text{ l ges}} + \sum_{k=1}^b g_{k \text{ l ges}} s_k \right) \\ &= (f_{2 \text{ l ges}})^* . \end{aligned} \quad (4.41)$$

Damit sind also die Relationalmatrizen beider Modelle gleich, wenn die des Modells mit mehreren Fuzzy-Mengen für den Ausgang gemäß Gl. (4.32) bzw. Gl. (4.33) zusammengefaßt wird.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Dieser Forschungsbericht umfaßt zwei wesentliche Teile: Im ersten Teil wurde das am Fachgebiet MSRT weiterentwickelte Fuzzy-Identifikationsverfahren (Bertram und Schwarz 1993, Küpper 1993) anhand von veröffentlichten Meßdaten (Box und Jenkins 1970) überprüft. Da diese Meßdaten häufig zum Nachweis der Leistungsfähigkeit von konventionellen und Fuzzy-Identifikationsalgorithmen herangezogen werden, kann man ihre Identifikation als Benchmarkproblem betrachten. Die im Fachgebiet mit der sum-prod-Komposition erzielten Ergebnisse zeigen die Eignung von Fuzzy-Identifikationsverfahren, aus Meßdaten geeignete Modelle zu gewinnen. Die Ergebnisse sind teilweise vergleichbar, in den meisten Fällen sogar besser als die in der Literatur veröffentlichten. Eine vergleichende Zusammenstellung der Resultate ist in der Tabelle 5.1 gezeigt. Der zweite Teil des

Tabelle 5.1: Zusammenfassung der Ergebnisse

Modell nach	mittl. quadr. Fehler		Fuzzy-Mengen			τ	Regeln
	rekursiv	Einschrittpräd.	y(k+1)	y(k)	u(k- τ)		
Box und Jenkins (1970)	0,725 (0,71)	0,194 (0,202)	lineares Modell				–
Tong (1979)	–	0,469	6	6	7	3	19
Pedrycz (1984a)	–	0,776	5	5	5	2	20
	–	0,478	7	7	7	2	?
	–	0,320	9	9	9	2	?
Xu und Lu (1987)	–	0,328	5	5	5	3	?
Sugeno u. Tanaka (1991)	–	0,068	Funktionalmodell				2
	–	0,359	Funktionalmodell				2
Sugeno u. Yasukawa (1993)	–	0,190	andere Eingangswerte				6
Eigene Identifikation	–	0,6416	2	5	5	3	40
	–	0,2511	2	7	7	3	68
	0,8502	0,1754	2	9	9	3	102
Optimierung	0,7804	0,1162	2	5	5	3	46

Berichtes beinhaltet eine theoretische Untersuchung zu den Strukturen des verwendeten Fuzzy-Relationalmodells und dessen Identifikation. Es konnte in mehreren Schritten gezeigt werden, daß bei der sum-prod-Komposition jede beliebige Kombination von Fuzzy-Referenzmengen für den Ausgangswert durch zwei dreiecksförmige Mengen ersetzt werden kann. Somit wird der Aufwand sowohl bei der Identifikation als auch bei der Modellauswertung deutlich verringert. Selbstverständlich läßt sich die gemachte Aussage auch auf Fuzzy-Regler mit der entsprechenden Struktur übertragen.

Die vorliegenden Untersuchungen des Fuzzy-Identifikationsalgorithmus scheinen seine Eignung für die Modellbildung nichtlinearer Systeme zu bestätigen. Jedoch sollten noch weitere Systeme und Systemklassen identifiziert werden. Auch lassen die Ergebnisse der optimierten Modelle noch ein Verbesserungspotential für die Identifikation erhoffen.

6 Literatur

- Bertram, T.** 1991. *Einführung in die Fuzzy-Regelung*. Forschungsbericht Nr. 4/91 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- Bertram, T. und H. Schwarz.** 1993. Fuzzy identification of hydraulic systems. *12th IFAC World Congress*. Sydney, Australia, Vol. VII. 489-492
- Bezdek, J.** 1981. *Pattern Recognition with Fuzzy Objective Function Algorithms*. New York: Plenum Press.
- Box, G. und G. Jenkins.** 1970. *Time Series Analysis*. Oakland: Holden-Day.
- Küpper, K.** 1993. *Numerisch optimierte Fuzzy-Modelle*. Forschungsbericht Nr. 5/93 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- o. A.** 1990. *Matlab User's Guide*. Natick: The MathWorks, Inc.
- Pedrycz, W.** 1984a. An identification algorithm in fuzzy relational systems. *Fuzzy Sets and Systems*. 13. 153–167.
- Pedrycz, W.** 1984b. Identification in fuzzy systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 14. 361–366.
- Pedrycz, W.** 1985. Design of fuzzy control algorithms with the aid of fuzzy models. *Industrial Applications of Fuzzy Control*. ed. M. Sugeno. Amsterdam: North-Holland.
- Sugeno, M. und K. Tanaka** 1991. Successive identification of a fuzzy model and its applications to prediction of a complex system. *Fuzzy Sets and Systems*. 42. 315-334.
- Sugeno, M. und T. Yasukawa** 1993. A fuzzy logic based approach to qualitative modeling. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*. 1. 1-34.
- Tong, R.M.** 1978. Synthesis of fuzzy models for industrial processes-some recent results. *Int. J. General Systems* 4. 142–162.
- Xu, C.-W.** 1989. Fuzzy system identification. *IEE Proceedings*. 136. 146-150.
- Xu, C.-W. and Y. Z. Lu** 1987. Fuzzy model identification and self-learning for dynamic systems. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics*. 17. 683-689.