

Zur Identifikation bilinearer Modelle in kanonischer Form

H. Reuter

Forschungsbericht Nr. 08/93

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: In diesem Forschungsbericht wird die Identifikation bilinearer parametrischer Modelle in kanonischer Form behandelt. Dazu werden vier bilineare kanonische Formen, die eine Bilinearisierung der allgemeinen nichtlinearen kanonischen Formen darstellen, definiert. Zur Identifikation dieser vier Formen mittels Prädiktionsfehlerverfahren werden die benötigten Gleichungen angegeben. Die Verdeutlichung der Vorteile dieser Prädiktionsfehlerverfahren gegenüber Least-Squares-Methoden erfolgt anhand von Simulationsbeispielen. Abschließend werden bilineare Modelle eines elektro-hydraulischen Linearantriebes identifiziert.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Prädiktionsfehlerverfahren	2
3	Bilineare kanonische Modelle	4
3.1	Reglerkanonische Form	6
3.2	Steuerbarkeitskanonische Form	7
3.3	Beobachterkanonische Form	8
3.4	Beobachtbarkeitskanonische Form	10
4	Simulationsergebnisse	13
4.1	Startwerte und Konvergenzprobleme	13
4.2	Beispiele	15
4.2.1	Rekursives Prädiktionsfehlerverfahren	15
4.2.2	Nichtrekursives Prädiktionsfehlerverfahren	19
5	Identifikation eines elektro-hydraulischen Translationsantriebes	24
6	Zusammenfassung und Ausblick	32
7	Literatur	34
	Anhang	36
A	Transformation linearer Modelle in kanonische Formen	36

1 Einleitung

Das Interesse an der nichtlinearen Systemtheorie und ihrer Anwendung hat in den letzten Jahren deutlich zugenommen. Dies liegt hauptsächlich an zwei Gründen. Zum einen liefern lineare Approximationen gewöhnlich nur in einem schmalen Bereich um den Arbeitspunkt genügend genaue Ergebnisse. Zum anderen sind spezielle Klassen nichtlinearer Systeme und ihre Eigenschaften schon gut bekannt. Dies trifft besonders auf die bilinearen Systeme zu, die ausführlich von der theoretischen (Isidori 1989, Schwarz 1991) und der praktischen Seite (z.B. Mohler 1973) untersucht wurden. Gerade in der Kerntechnik, bei chemischen Reaktoren, bei der Wärmeübertragung und bei hydraulischen Antrieben beispielsweise bieten sich bilineare Modelle an. Sie eignen sich ebenfalls für die Approximation der Dynamik von einer großen Klasse anderer nichtlinearer Systeme. Sowohl Modellbildung als auch Regelung hydraulischer Antriebe mit bilinearen Modellen wurde z.B. bereits von Schwarz, Dorßen und Guo (1988), Dorßen (1990) und Yin (1992) untersucht. Für manche Analyse- und Synthesprobleme ist es nützlich, wenn das Modell keine allgemeine, sondern eine kanonische Form besitzt.

In diesem Bericht wird die Identifikation bilinearer Zustandsraummodelle in kanonischer Form behandelt. Da während der Identifikation von Zustandsraummodellen nicht nur die Parameter sondern auch die Zustände geschätzt werden müssen, liegt ein nichtlineares Schätzproblem vor, weshalb z.B. Least-Squares-Verfahren in der Regel nicht angewendet werden können. Hierfür bieten sich dann Prädiktionsfehlerverfahren an.

Existiert bei der Identifikation eines kanonischen bilinearen Modells keine solche Approximation des Prozesses, ergibt sich automatisch eine lineare kanonische Form. Deshalb treten nur geringe Rechenzeitunterschiede bei der Identifikation eines linearen und eines bilinearen Zustandsraummodells auf.

Ein anderes Problem bei der Identifikation von Zustandsraummodellen ist das Konvergenzproblem. Hierbei müssen nicht nur die Parameter der Ein-/Ausgangsbeziehung geschätzt werden, sondern die der Eingangs-/Zustands-Beziehung, die Zustände selbst und die der Zustands-/Ausgangs-Beziehung. Aus diesem Grunde sollen die Startwerte für die Schätzung schon relativ gut sein, so daß eine zweistufige Identifikation vorgeschlagen wird.

In Abschnitt 2 werden kurz die verwendeten Prädiktionsfehlerverfahren beschrieben. Anschließend erfolgt in Abschnitt 3 die Definition von vier bilinearen kanonischen Formen sowie die Herleitung der Prädiktorgradienten, die für die Identifikation mittels Prädiktionsfehlerverfahren benötigt werden. In Abschnitt 4 werden anhand von Simulationen sowie bei einem Vergleich mit einem Least-Squares-Verfahren die Vorteile der Prädiktionsfehlerverfahren verdeutlicht. Hiernach erfolgt die Identifikation von Modellen in beobachtbarkeitskanonischer Form für einen elektro-hydraulischen Translationsantrieb (Abschnitt 5). Eine Zusammenfassung mit Ausblick schließt diesen Bericht ab.

2 Prädiktionsfehlerverfahren

Da das im nächsten Abschnitt näher behandelte allgemeine bilineare Zustandsraummodell (3.1) nicht linear in den Parametern ist, können Least-Squares-Methoden zur Identifikation seiner Parameter nicht verwendet werden. Linear in den Parametern bedeutet hierbei, daß sich das Zustandsraummodell in eine Darstellung

$$y(k+1) = \Theta^T \Phi(k) \quad (2.1)$$

überführen läßt. Dabei setzt sich der Parametervektor Θ aus den Parametern des Zustandsraummodells und der Meßvektor Φ aus den zugehörigen Anteilen der Eingangsgröße u sowie der Ausgangsgröße y zusammen. Als sehr sinnvoll für die Identifikation nichtlinearer Modelle erwiesen haben sich Prädiktionsfehlerverfahren, da sie in den rekursiven Modellgleichungen Linearität in der Ein-/Ausgangsdarstellung und in den Parametern nicht voraussetzen (Ljung and Söderström 1987).

Die Verwendung der Summe der Quadrate des Prädiktionsfehlers $e(k) = y(k) - \hat{y}(k)$ ($y(k)$ = gemessener Ausgang, $\hat{y}(k)$ = prädizierter Ausgang) als Minimierungskriterium mit dem allgemeinen rekursiven Lösungsalgorithmus (Ljung und Söderström 1987) führt auf das folgende rekursive Prädiktionsfehlerverfahren (RPEM) (Reuter 1992b)

$$\mathbf{L}(k) = \frac{\mathbf{P}(k-1) \Psi(k)}{\left[\lambda(k) + \Psi^T(k) \mathbf{P}(k-1) \Psi(k) \right]} \quad (2.2)$$

$$\Theta(k) = \Theta(k-1) + \mathbf{L}(k) e(k) \quad (2.3)$$

$$\mathbf{P}(k) = \frac{\left[\mathbf{P}(k-1) - \mathbf{L}(k) \Psi^T(k) \mathbf{P}(k-1) \right]}{\lambda(k)} \quad (2.4)$$

mit der Kovarianzmatrix $\mathbf{P}(k)$, dem Parametervektor $\Theta(k)$, dem Parameterkorrekturvektor $\mathbf{L}(k)$, dem Vergessensfaktor $\lambda(k)$ sowie dem Prädiktorgradienten

$$\Psi(k) = \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial \Theta} \quad (2.5)$$

Hierbei wird als Minimierungskriterium die Verlustfunktion

$$V = V(N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N e^2(k) \quad (2.6)$$

verwendet (mit N = Anzahl der Meßwerte).

Da zur Identifikation komplexerer Modelle sehr viel mehr Meßdaten als bei der einer linearen Übertragungsfunktion benötigt werden, damit der rekursive Algorithmus konvergiert, bieten sich iterative nichtrekursive Prädiktionsfehlerverfahren an, bei denen der für die Identifikation zur Verfügung stehende Meßdatensatz mehrmals durchlaufen wird.

Eine relativ einfache Möglichkeit liegt darin, den rekursiven Algorithmus mehrfach hintereinander auf die Daten anzuwenden (Ljung und Söderström 1987). Hiermit kommt man in der Praxis zwar in die Nähe des Minimums der Verlustfunktion, wenn der zeitliche Vergessensfaktorverlauf gut gewählt war. Das Minimum selbst wird jedoch nur in Sonderfällen erreicht, da sich bei praktischen Anwendungen die Parameter auch bei Konvergenz noch leicht über dem Meßdatensatz ändern, so daß sich ein leicht zeitvariantes Modell ergäbe.

Die andere, in diesem Punkt bessere Möglichkeit besteht in der Verwendung eines iterativen, gedämpften Newton-Raphson-Verfahrens (z.B. Wernstedt 1989) mit dem Dämpfungsfaktor α zur nichtlinearen Optimierung. Diese Prädiktionsfehlermethode (vgl. Ljung 1987) wird zwar hier verwendet, soll jedoch an anderer Stelle näher erläutert werden. Es sei aber noch kurz angemerkt, daß zur Bildung der Hesse-Matrix ein vereinfachtes Verfahren verwendet wird, bei dem die Kenntnis des Prädiktorgradienten $\Psi(k)$ ausreicht.

3 Bilineare kanonische Modelle

Für viele Analyse- und Synthesaufgaben wie, z.B. zur Beobachtbarkeitsanalyse oder zur Zustandsreglerauslegung, kann es sinnvoll sein, wenn ein Systemmodell eine kanonische Form besitzt. Solche kanonischen Formen für nichtlineare Systeme werden u.a. von Zeitz (1985, 1989) (vgl. Schwarz 1991, Ackermann 1988) definiert:

- Regler-/regelungskanonische Form,
- Steuerbarkeitskanonische Form,
- Beobachterkanonische Form,
- Beobachtbarkeits-/filterkanonische Form.

Diese kanonischen Formen besitzen eine minimale Anzahl von Parametern, die von 0 oder 1 verschieden sind. Zur Ermittlung eines solchen Modells existieren u.a. drei Vorgehensweisen:

1. Bestimmung eines nichtparametrischen Modells (z.B. mittels Korrelationsanalyse) mit folgender Realisierung durch ein Zustandsraummodell und anschließender Transformation in eine kanonische Form.
2. Schätzung eines parametrischen Ein-/Ausgangsmodells mit Realisierung sowie Transformation.
3. Identifikation eines Zustandsraummodells in kanonischer Form.

Die ersten beiden Vorgehensweisen liefern in vielen Fällen jedoch nicht das gewünschte Ergebnis, da sich beispielsweise aus einem nichtparametrischen Modell durch Realisierung oft kein bilineares Modell mit kanonischer Form berechnen läßt. Es erweist sich deshalb als geeigneter, die Parameter der bilinearen Approximation in kanonischer Form direkt zu identifizieren. Auch ist die Identifikation von Modellen in kanonischer Form gerade dann sinnvoll, wenn nur wenig Apriori-Wissen über den zu untersuchenden Prozeß und seine Struktur vorhanden ist.

Eine Bilinearisierung der allgemeinen nichtlinearen kanonischen Formen nach Zeitz führt zu den unten angegebenen Modellstrukturen, in denen wiederum die linearen kanonischen Formen (Ackermann 1988) enthalten sind. Dadurch ergibt sich für den Fall, daß keine bilineare kanonische Approximation existiert, automatisch eine lineare kanonische Form: In diesem Abschnitt werden der Einfachheit wegen bilineare Eingrößensysteme

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \mathbf{x}(k) u(k) + \mathbf{b} u(k) \\ y(k) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

mit dem Zustandsvektor

$$\mathbf{x}(k) = [x_1(k) \ x_2(k) \ \cdots \ x_n(k)]^T \quad (3.2)$$

betrachtet, wobei n die Anzahl der Zustände darstellt. Die Erweiterung auf Mehrgrößensysteme ist jedoch prinzipiell möglich.

1. Reglerkanonische Form (Controller canonical form, CRCF):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ n_1 & \cdots & n_n \end{bmatrix}; \quad (3.3)$$

$$\mathbf{b} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T; \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]^T,$$

2. Steuerbarkeitskanonische Form (Controllability canonical form, CYCF):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & n_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n_n \end{bmatrix}; \quad (3.4)$$

$$\mathbf{b} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T; \quad \mathbf{c} = [c_1 \ c_2 \ \cdots \ c_n]^T,$$

3. Beobachterkanonische Form (Observer canonical form, ORCF):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_1 \\ 1 & \ddots & \vdots & a_2 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & n_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n_n \end{bmatrix}; \quad (3.5)$$

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T; \quad \mathbf{c} = [0 \ \cdots \ 0 \ 1]^T,$$

4. Beobachtbarkeitskanonische Form (Observability canonical form, OYCF):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \\ n_1 & \cdots & n_n \end{bmatrix}; \quad (3.6)$$

$$\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \cdots \ b_n]^T; \quad \mathbf{c} = [1 \ 0 \ \cdots \ 0]^T.$$

Benutzt man die allgemeinen Gleichungen nach Fnaiech und Ljung (1987) zur Identifikation eines allgemeinen bilinearen Modells (3.1), wobei der Ausgangsvektor \mathbf{c} als bekannt vorausgesetzt wird, so ergeben sich für die Berechnung des Prädiktorgradienten $\Psi(k)$ für kleine Ordnungen n schon umfangreiche Gleichungen. Daher kann diese Methode praktisch nur für sehr spezielle Anwendungen mit bekannter Modellstruktur und, wegen des Identifizierbarkeitsproblems (Godfrey and DiStefano 1985), einer kleinen Anzahl von Parametern angewendet werden.

Deshalb werden hier die Gleichungen zur Berechnung von $\Psi(k)$ für diese vier kanonischen Formen für beliebige n hergeleitet, so daß die Identifikation solcher Modelle mit Prädiktionsfehlerverfahren möglich ist. Zudem lassen sich für beobachter- und beobachtbarkeitskanonische Form die Gleichungen zur Anwendung von Least-Squares-Methoden angeben.

3.1 Reglerkanonische Form

Mit dem Parametervektor

$$\Theta = [a_1 \dots a_n, n_1 \dots n_n, c_1 \dots c_n]^T \quad (3.7)$$

für diese Form und der Summendarstellung von (3.1), (3.2) und (3.3),

$$x_i(k) = x_{i+1}(k-1) \quad , \quad i = 1 \dots n-1 \quad (3.8)$$

$$x_n(k) = \sum_{i=1}^n (a_i + n_i u(k-1)) x_i(k-1) + u(k-1) \quad (3.9)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(k) \quad , \quad (3.10)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial c_i} = x_i(k) \quad , \quad i = 1 \dots n \quad (3.11)$$

Um die Prädiktorgradienten

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} \quad \text{und} \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial n_i} = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} \quad (3.13)$$

für die Parameter a_i und n_i ($i = 1 \dots n$) berechnen zu können, werden die Gradienten

$$\frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} = x_i(k-n+j-1) +$$

$$+ \sum_{r=1}^n \left((a_r + n_r u(k-n+j-1)) \frac{\partial x_r(k-n+j-1)}{\partial a_i} \right) \quad \text{und} \quad (3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} &= x_i(k-n+j-1) u(k-n+j-1) + \\ &+ \sum_{r=1}^n \left((a_r + n_r u(k-n+j-1)) \frac{\partial x_r(k-n+j-1)}{\partial n_i} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

benötigt. Es ist jedoch nicht notwendig, alle Gradienten $\partial x_j(k)/\partial a_i$ und $\partial x_j(k)/\partial n_i$ zu jedem Zeitpunkt k neu zu ermitteln. Wegen der kanonischen Form können sie zurückgeführt werden auf

$$\frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} = \frac{\partial x_n(k-n+j)}{\partial a_i} \quad \text{und} \quad (3.16)$$

$$\frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} = \frac{\partial x_n(k-n+j)}{\partial n_i} \quad , \quad (3.17)$$

so daß für jedes neue k nur noch $2n$ Gradienten zu berechnen sind und nicht mehr $2n^2$.

3.2 Steuerbarkeitskanonische Form

Mit dem Parametervektor

$$\Theta = [a_1 \dots a_n, n_1 \dots n_n, c_1 \dots c_n]^T \quad (3.18)$$

und der Summendarstellung aus (3.1), (3.2) und (3.4),

$$x_j(k) = \begin{cases} u(k-1) & , \forall j = 1 \\ x_{j-1}(k-1) & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} + (a_j + n_j u(k-1)) x_n(k-1) \quad , \quad (3.19)$$

$$y(k) = \sum_{i=1}^n c_i x_i(k) \quad , \quad (3.20)$$

erhält man auch hier

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial c_i} = x_i(k) \quad , \quad i = 1 \dots n \quad . \quad (3.21)$$

Für die Parameter a_i und n_i ($i = 1 \dots n$) ergibt sich analog zur reglerkanonischen Form

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial a_i} = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} \quad \text{und} \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial n_i} = \sum_{j=1}^n c_j \frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} \quad (3.23)$$

mit den Gradienten

$$\frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} = (a_j + n_j u(k-1)) \frac{\partial x_n(k-1)}{\partial a_i} + \begin{cases} 0 & , \forall j = 1 \\ \frac{\partial x_{j-1}(k-1)}{\partial a_i} & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} +$$

$$+ \begin{cases} x_n(k-1) & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} \quad \text{und} \quad (3.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} &= (a_j + n_j u(k-1)) \frac{\partial x_n(k-1)}{\partial n_i} + \begin{cases} 0 & , \forall j = 1 \\ \frac{\partial x_{j-1}(k-1)}{\partial n_i} & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} + \\ &+ \begin{cases} u(k-1) x_n(k-1) & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} . \end{aligned} \quad (3.25)$$

Auch hier kann man durch rekursives Einsetzen alle Zustände x_j ($j = 1 \dots n-1$) mit

$$x_j(k) = \sum_{r=1}^j \left((a_r + n_r u(k-j+r-1)) x_n(k-j+r-1) \right) + u(k-j) \quad (3.26)$$

auf x_n zurückführen, so daß die Gradienten beschrieben werden können durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} &= \begin{cases} x_n(k-j+i-1) & , \forall i = 1 \dots j \\ 0 & , \forall i = j+1 \dots n \end{cases} + \\ &+ \sum_{r=1}^j \left((a_r + n_r u(k-j+r-1)) \frac{\partial x_n(k-j+r-1)}{\partial a_i} \right) \quad \text{und} \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} &= \begin{cases} u(k-j+i-1) x_n(k-j+i-1) & , \forall i = 1 \dots j \\ 0 & , \forall i = j+1 \dots n \end{cases} + \\ &+ \sum_{r=1}^j \left((a_r + n_r u(k-j+r-1)) \frac{\partial x_n(k-j+r-1)}{\partial n_i} \right) . \end{aligned} \quad (3.28)$$

Jedoch steigt bei Verwendung von (3.27) und (3.28) zur Gradientenberechnung die Anzahl der notwendigen Rechenoperationen gegenüber (3.24) and (3.25) deutlich an.

3.3 Beobachterkanonische Form

Prädiktionsfehlerverfahren

Beim Prädiktionsfehlerverfahren mit den zu schätzenden Parametern

$$\Theta = [a_1 \dots a_n, n_1 \dots n_n, b_1 \dots b_n]^T \quad (3.29)$$

sowie

$$\begin{aligned} x_j(k) &= \begin{cases} 0 & , \forall j = 1 \\ x_{j-1}(k-1) & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} + \\ &+ (a_j + n_j u(k-1)) x_n(k-1) + b_j u(k-1) , \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$y(k) = x_n(k) \quad (3.31)$$

aus (3.1), (3.2) und (3.5) vereinfachen sich die Anteile von $\Psi(k)$ zu

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial a_i} = \frac{\partial x_n(k)}{\partial a_i}; \quad \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial n_i} = \frac{\partial x_n(k)}{\partial n_i}; \quad \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial b_i} = \frac{\partial x_n(k)}{\partial b_i}; \quad i = 1 \dots n \quad . \quad (3.32)$$

Die hierfür benötigten Gradienten werden rekursiv geschätzt zu

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial a_i} &= \begin{cases} x_n(k-1) & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} + \begin{cases} 0 & , \forall j = 1 \\ \frac{\partial x_{j-1}(k-1)}{\partial a_i} & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} + \\ &+ (a_j + n_j u(k-1)) \frac{\partial x_n(k-1)}{\partial a_i} \quad , \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial n_i} &= \begin{cases} u(k-1)x_n(k-1) & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} + \begin{cases} 0 & , \forall j = 1 \\ \frac{\partial x_{j-1}(k-1)}{\partial n_i} & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} + \\ &+ (a_j + n_j u(k-1)) \frac{\partial x_n(k-1)}{\partial n_i} \quad , \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_j(k)}{\partial b_i} &= \begin{cases} u(k-1) & , \forall i = j \\ 0 & , \forall i \neq j \end{cases} + \begin{cases} 0 & , \forall j = 1 \\ \frac{\partial x_{j-1}(k-1)}{\partial b_i} & , \forall j = 2 \dots n \end{cases} + \\ &+ (a_j + n_j u(k-1)) \frac{\partial x_n(k-1)}{\partial b_i} \quad . \end{aligned} \quad (3.35)$$

Least-Squares-Verfahren

Die Zustandsraumdarstellung (3.5) läßt sich durch Elimination der Zustände x_1 bis x_n in die Ein-/Ausgangsdarstellung

$$y(k) = \sum_{j=1}^n a_{n+1-j} y(k-j) + \sum_{j=1}^n n_{n+1-j} y(k-j) u(k-j) + \sum_{j=1}^n b_{n+1-j} u(k-j) \quad (3.36)$$

überführen. Diese Darstellung ist linear in den zu identifizierenden Parametern,

$$y(k) = \Theta^T \Phi(k) \quad , \quad (3.37)$$

so daß hierfür auch Least-Squares-Methoden mit dem Parametervektor

$$\Theta^T = [a_1 \dots a_n, n_1 \dots n_n, b_1 \dots b_n] \quad (3.38)$$

und dem Meßvektor

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} y(k-n) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(k-n)u(k-n) \\ \vdots \\ y(k-1)u(k-1) \\ u(k-n) \\ \vdots \\ u(k-1) \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

verwendet werden können.

3.4 Beobachtbarkeitskanonische Form

Prädiktionsfehlerverfahren

Mit der Indexschreibweise aus (3.1), (3.2) und (3.5),

$$\begin{aligned} x_j(k) &= x_{j+1}(k-1) + b_j u(k-1) \\ &= \sum_{r=j}^{n-1} b_r u(k-r+j-1) + x_n(k-n+j) \quad , \quad j = 1 \dots n-1, \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$x_n(k) = \sum_{r=1}^n (a_r + n_r u(k-1)) x_r(k-1) + b_n u(k-1) \quad , \quad (3.41)$$

$$y(k) = x_1(k) \quad , \quad (3.42)$$

sowie dem Parametervektor

$$\Theta = [a_1 \dots a_n, n_1 \dots n_n, b_1 \dots b_n]^T \quad (3.43)$$

für das Prädiktionsfehlerverfahren erhält man für die Anteile von $\Psi(k)$

$$\frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial a_i} = \frac{\partial x_1(k)}{\partial a_i}; \quad \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial n_i} = \frac{\partial x_1(k)}{\partial n_i}; \quad \frac{\partial \hat{y}(k)}{\partial b_i} = \frac{\partial x_1(k)}{\partial b_i}; \quad i = 1 \dots n \quad . \quad (3.44)$$

Bei der Schätzung der Parameter a_i und n_i ergeben sich die Gradienten zu

$$\frac{\partial x_1(k)}{\partial a_i} = \frac{\partial x_n(k-n+1)}{\partial a_i} \quad \text{mit} \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial x_n(k)}{\partial a_i} = \sum_{r=1}^n (a_r + n_r u(k-1)) \frac{\partial x_r(k-1)}{\partial a_i} + x_i(k-1) \quad \text{und} \quad (3.46)$$

$$\frac{\partial x_1(k)}{\partial n_i} = \frac{\partial x_n(k-n+1)}{\partial n_i} \quad \text{mit} \quad (3.47)$$

$$\frac{\partial x_n(k)}{\partial n_i} = \sum_{r=1}^n (a_r + n_r u(k-1)) \frac{\partial x_r(k-1)}{\partial n_i} + x_i(k-1) u(k-1) \quad , \quad (3.48)$$

wobei eine Rückführung der Gradienten der Zustände x_r ($r = 1 \dots n-1$) mit

$$\frac{\partial x_r(k)}{\partial a_i} = \frac{\partial x_n(k-n+r)}{\partial a_i} \quad \text{und} \quad (3.49)$$

$$\frac{\partial x_r(k)}{\partial n_i} = \frac{\partial x_n(k-n+r)}{\partial n_i} \quad (3.50)$$

auf den des n -ten Zustandes sinnvoll ist, damit diese nicht explizit berechnet werden müssen. Ähnlich wird mit den Parametern b_i verfahren,

$$\frac{\partial x_1(k)}{\partial b_i} = \begin{cases} u(k-i) & , \forall i = 1 \dots n-1 \\ 0 & , \forall i = n \end{cases} + \frac{\partial x_n(k-n+1)}{\partial b_i} \quad \text{mit} \quad (3.51)$$

$$\frac{\partial x_n(k)}{\partial b_i} = (a_1 + n_1 u(k-1)) \frac{\partial x_1(k-1)}{\partial b_i} +$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{cases} 0 & , \forall i = 1 \dots n-1 \\ u(k-1) & , \forall i = n \end{cases} + \\
& + \sum_{r=2}^n \left((a_r + n_r u(k-1)) \frac{\partial x_n(k-n+r-1)}{\partial b_i} \right) \quad , \quad (3.52)
\end{aligned}$$

wobei hier allerdings eine Rückführung von x_1 auf x_n nicht erfolgt.

Least-Squares-Verfahren

Überführt man die beobachtbarkeitskanonische Form (3.6) in eine Ein-/Ausgangsdarstellung, so ist diese nicht mehr linear in den zu identifizierenden Parametern (Dai und Sinha 1989). Trotzdem sind hier die Parameter des Zustandsraummodells bestimmbar, da von der folgenden Ein-/Ausgangsdarstellung

$$y(k) = \sum_{j=1}^n (a_{n+1-j} + n_{n+1-j} u(k-n)) y(k-j) + \sum_{j=1}^n (g_j + h_j u(k-n)) u(k-j) \quad , (3.53)$$

die auch linear in ihren Parametern ist, mit dem Parametervektor

$$\Theta^T = [a_1 \dots a_n, n_1 \dots n_n, g_1 \dots g_n, h_1 \dots h_n] \quad (3.54)$$

und dem Meßvektor

$$\Phi(k) = \begin{bmatrix} y(k-n) \\ \vdots \\ y(k-1) \\ y(k-n) u(k-n) \\ \vdots \\ y(k-1) u(k-n) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-n) \\ u(k-1) u(k-n) \\ \vdots \\ u(k-n) u(k-n) \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

mit

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ g_3 \\ \vdots \\ g_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -a_n & 1 & & & \mathbf{0} \\ -a_{n-1} & -a_n & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -a_2 & \cdots & -a_{n-1} & -a_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

und

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & & & & \\ -n_n & 0 & & & \mathbf{0} \\ -n_{n-1} & -n_n & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ -n_2 & \cdots & -n_{n-1} & -n_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

auf die Parameter der Zustandsraumdarstellung zurückgerechnet werden kann. Treten jedoch bei der Identifikation der Parameter a_i und g_i Parameterfehler oder -schwankungen auf, was bei realen Prozessen i.a. der Fall ist, so können sich diese bei der Berechnung der b_i nach Gl. (3.56) noch verstärken.

4 Simulationsergebnisse

4.1 Startwerte und Konvergenzprobleme

Die Konvergenz des rekursiven Algorithmus zeigen Ljung und Söderström (1987) unter mehreren Bedingungen. Die wichtigste hiervon ist, daß der Prädiktor $\hat{y}(k)$ zu jedem Zeitpunkt k stabil sein muß. Für die Stabilitätsprüfung kann man das bilineare Modell ansehen als ein stark zeitvariantes lineares System. Der Prädiktor ist dann stabil, wenn für die Eigenwerte ρ_i nach

$$\det[\rho \mathbf{I} - \mathbf{S}] = 0 \quad \text{mit} \quad (4.1)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\Theta}(k)) + \mathbf{N}(\boldsymbol{\Theta}(k)) u(k) \quad (4.2)$$

zum Zeitpunkt k gilt:

$$|\rho_i(k)| < 1 \quad , \quad \forall i = 1 \dots n \quad . \quad (4.3)$$

Wird beim rekursiven Algorithmus zu einzelnen Zeitpunkten ein gemäß Gl. (4.3) instabiles Modell geschätzt, kann das damit verbundene $\boldsymbol{\Theta}(k+1)$ durch den letzten zu einem stabilen Modell gehörenden Parametersatz $\boldsymbol{\Theta}(k)$ ersetzt werden.

Diese Stabilitätsbedingung gilt prinzipiell auch für das nichtrekursive Prädiktionsfehlerverfahren, d.h. hier muß das Modell für den gesamten Bereich des auftretenden Eingangssignals mit $u(k) \in [u_{min}, u_{max}]$ stabil sein. Es zeigt sich jedoch, daß während der Identifikation vor der Konvergenzphase auch kleine Bereiche von $u(k)$ zugelassen werden können, für die Gl. (4.3) nicht erfüllt wird, ohne daß die Konvergenz des Algorithmus dadurch deutlich beeinträchtigt wäre.

Eine andere Forderung ist die nach hinreichend „guten“ Startwerten für die Algorithmen. Da gewöhnlich keine Informationen über die Startwerte von $\boldsymbol{\Psi}$ und seinen Gradienten vorliegen, ist es zulässig, sie zu

$$\boldsymbol{\Psi}(0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \frac{\partial \mathbf{x}(k \leq 0)}{\partial \boldsymbol{\Theta}} = \mathbf{0} \quad (4.4)$$

zu setzen. Auch die Anfangswerte $\mathbf{x}(0)$ der Zustände können, falls nicht bekannt, zu $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ vorgegeben werden.

In der Literatur (z.B. Isermann 1988) wird, wenn keine Apriori-Informationen über die Parameter vorliegen,

$$\boldsymbol{\Theta}(0) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{P}(0) = p \mathbf{I} \quad (p \gg 1) \quad (4.5)$$

vorgeschlagen. Werden mit diesen Startwerten die Parameter einer linearen Übertragungsfunktion identifiziert, so konvergiert der Algorithmus relativ schnell, da nur die

Parameter der Ein-/Ausgangsbeziehung bestimmt werden müssen. Im Falle der Identifikation von Zustandsraummodellen jedoch müssen die Eingangs-/Zustands-Beziehung, die Zustands-/Ausgangs-Beziehung sowie die zugehörigen Zustände geschätzt werden, so daß ein nichtlineares Schätzproblem vorliegt. (Ähnliches gilt auch für Wiener- und Hammerstein-Modelle.)

Aus diesem Grund konvergieren der rekursive und der nichtrekursive Algorithmus innerhalb akzeptabler Zeit und Meßwertanzahl nur dann gegen das Minimum der Verlustfunktion und die richtigen Parameter, wenn die Startwerte $\Theta(0)$ gut genug sind und in der Nähe des Verlustfunktionsminimums liegen. Die zugehörige Kovarianzmatrix $P(0)$ für den rekursiven Algorithmus kann nach Ljung und Söderström (1987: Kap. 5.8) geschätzt werden.

Beim rekursiven Algorithmus werden die Auswirkungen der Fehler (verursacht durch die Startwerte) durch Verwendung eines zeitvariablen Vergessensfaktors

$$\lambda(k) = \lambda(k-1)(1 - \Delta\lambda) + \Delta\lambda \quad (4.6)$$

vermindert. Dabei bezeichnet $\lambda(0)$ den Startwert und $\Delta\lambda$ einen Schrittweitenfaktor. Der Zeitverlauf in Gl. (4.6) kann ebenfalls einen günstigen Einfluß auf das Konvergenzverhalten für den Fall besitzen, daß die Startparameter $\Theta(0)$ zwar nicht sehr gut, aber auch nicht sehr schlecht sind (sie brauchen zwar nicht in der Nähe des Verlustfunktionsminimums, sollen aber auch nicht zu weit davon entfernt liegen).

Beim nichtrekursiven Algorithmus läßt sich das Konvergenzverhalten durch den Dämpfungsfaktor α des gedämpften Newton-Raphson-Verfahrens beeinflussen. Dieser muß für schlechte Startwerte oder viele Modellparameter sehr klein ($\alpha \leq 0.05$) gewählt werden, damit Konvergenz eintritt, was eine sehr kleine Parameterschrittweite bedeutet.

Es stellt sich nun die Frage, wie man Startwerte $\Theta(0)$ erhält, die besser sind als $\Theta(0) = \mathbf{0}$? Hierfür wird eine zweistufige Identifikation vorgeschlagen. Im ersten Schritt können die Parameter beispielsweise einer linearen Übertragungsfunktion mit einem einfachen Least-Squares-Verfahren geschätzt werden. Diese werden anschließend in ein lineares Zustandsraummodell mit der geforderten kanonischen Form transformiert (Anhang A). Die Parameter dieser Form stellen mit $n_i = 0$ ($i = 1 \dots n$) für den bilinearen Anteil die Startwerte $\Theta(0)$ für die im zweiten Schritt anzuwendenden Prädiktionsfehlerverfahren dar. Für die beobachter- und beobachtbarkeitskanonische Form ist es sinnvoller, die dort angegebenen Least-Squares-Verfahren für solche bilinearen Modelle zur Erlangung der Startwerte heranzuziehen.

4.2 Beispiele

4.2.1 Rekursives Prädiktionsfehlerverfahren

Beispiel 1: Steuerbarkeitskanonische Form mit starkem Rauschanteil

Mit einem gleichverteilten weißen Rauschen als Eingangssignal $u(k) \in [-1, 1]$, $N = 2000$ Meßwerten und dem Modell

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

ergibt sich der ungestörte Ausgang $y_s(k)$. Das simulierte gestörte Ausgangssignal erhält man aus $y_r(k) = y_s(k) + r(k)$ mit $r(k)$ als normalverteiltem Rauschen mit dem Rauschverhältnis $\sigma(r)/\sigma(y_s) = 1$, d.h. Rauschleistung und Nutzsignalleistung sind gleich groß ($\sigma(\cdot)$ = Standardabweichung).

Die Identifikation der Parameter einer linearen Übertragungsfunktion und ihre Transformation in eine lineare steuerbarkeitskanonische Form liefert $\Theta(0)$ aus dem linearen Modell

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1676 \\ 1 & 0.3350 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0.9987 \\ 2.0596 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Nach der Anwendung des rekursiven Prädiktionsfehlerverfahrens ergibt sich mit $\Theta(N)$ das bilineare Modell zu

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 0 & -0.6825 \\ 1 & 1.4794 \end{bmatrix}; & \mathbf{N} &= \begin{bmatrix} 0 & 0.2958 \\ 0 & -0.1862 \end{bmatrix}; \\ \mathbf{b}^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}; & \mathbf{c}^T &= \begin{bmatrix} 1.0715 & 2.1004 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Bild 4.1 zeigt die verschiedenen Ausgangssignale für die ersten 100 von 2000 Meßwerten und Bild 4.2 den Parameterschätzverlauf während der Identifikation mit $\lambda(0) = 0.96$ und $\Delta\lambda = 0.005$. Hierbei wird das stärkere Zittern der Parameterverläufe bis $k \approx 800$ unter anderem verursacht durch die Wahl des Vergessensfaktorverlaufes $\lambda(k)$.

Für kleine Modelle kann festgestellt werden, daß für größere, durch die Startwerte $\Theta(0)$ verursachte Fehler die Parameter konvergieren, wenn $\Theta(0)$ die Dynamik des gemessenen Ausgangssignals qualitativ beschreibt. Je größer und komplexer die Modelle sind, umso genauer müssen die Startwerte $\Theta(0)$ die „richtigen“ Parameter und das dynamische Verhalten des dynamischen Prozesses approximieren.

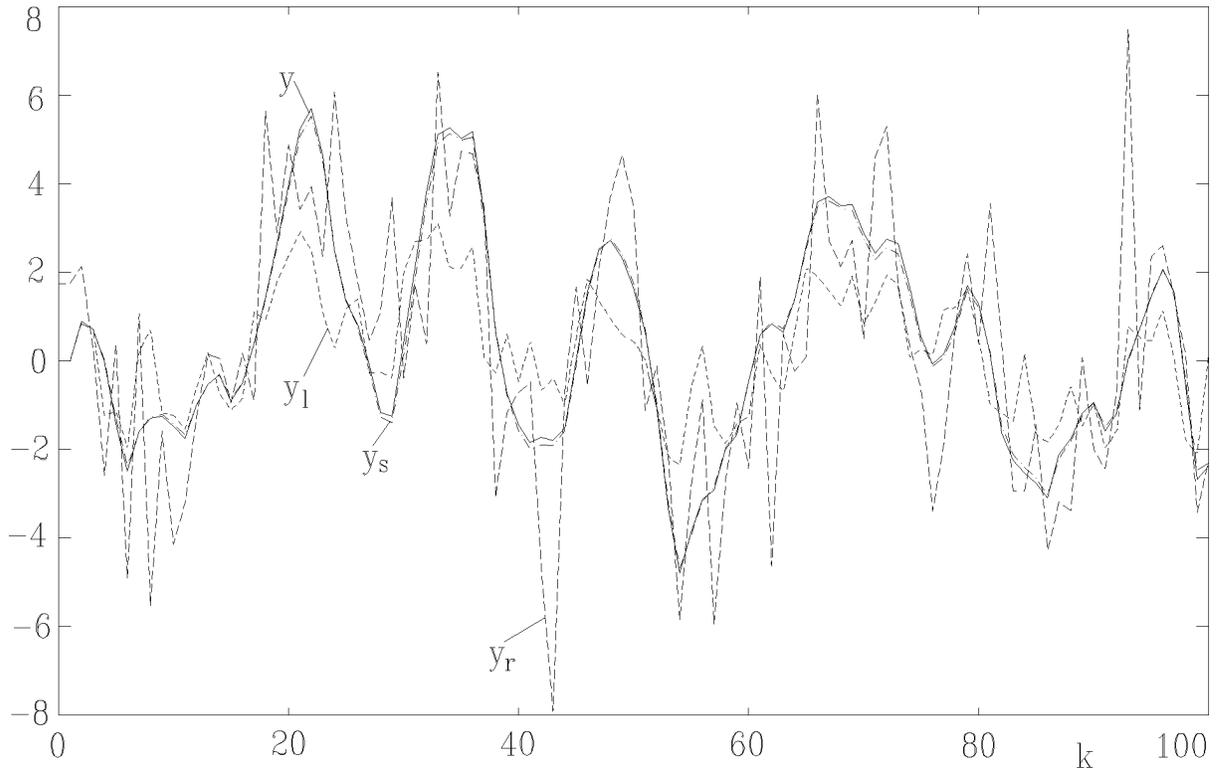


Bild 4.1: Ausgangssignale, Beispiel 1 (y_s : ungestört, y_r : gestört, y_l : lineares Modell, y : identifizierte bilineare steuerbarkeitskanonische Form)

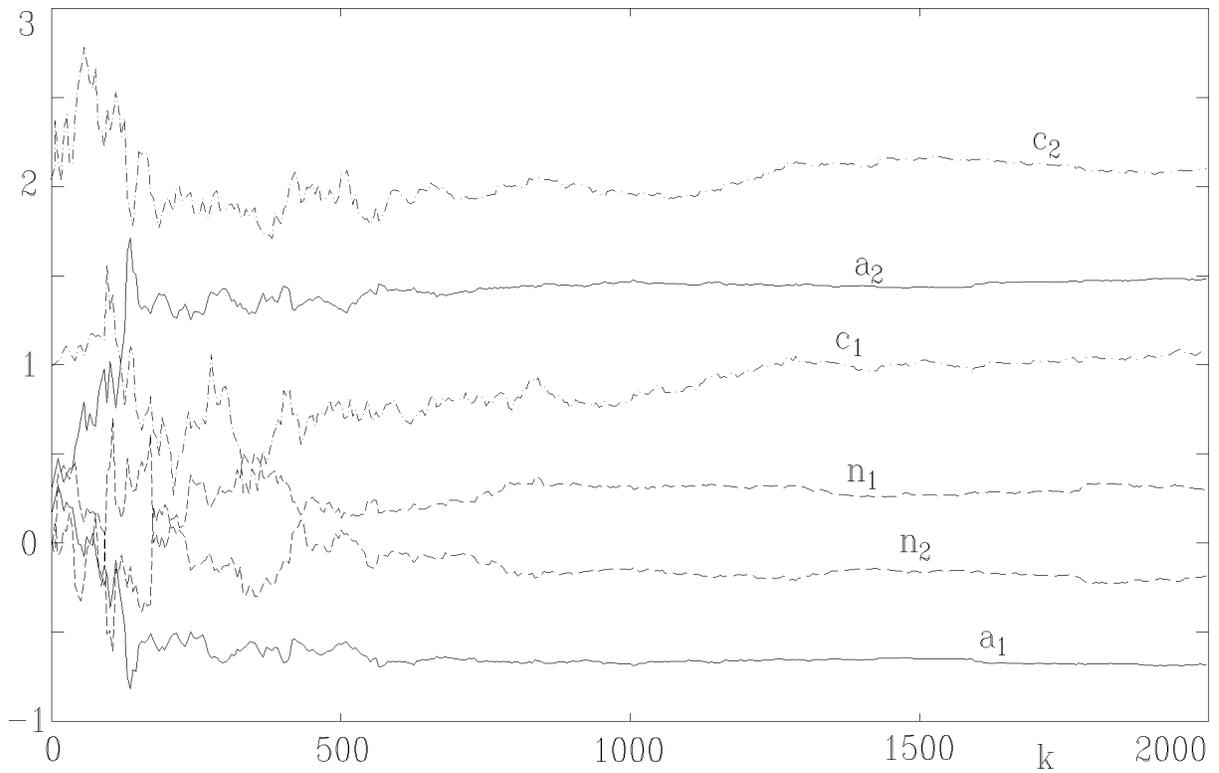


Bild 4.2: Parameterschätzverlauf (Beispiel 1)

Beispiel 2: Vergleich zwischen rekursivem Prädiktionsfehlerverfahren und rekursivem Least-Squares-Verfahren an einer beobachterkanonischen Form

Mit einem gleichverteilten weißen Rauschen als Eingangssignal $u(k) \in [-1, 1]$, dem Modell

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.7 \\ 1 & 1.5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0.25 \\ 0 & -0.15 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

und dem verrauschten Ausgangssignal mit Rauschverhältnis $\sigma(r)/\sigma(y_s) = 0.2$ ergeben sich die Startparameter zu

$$\Theta(0) = [-0.290, 1.063, 0, 0, 1.938, 2.057]^T \quad . \quad (4.11)$$

Verwendet man $\lambda(0) = 0.96$ und $\Delta\lambda = 0.005$ für das rekursive Prädiktionsfehlerverfahren sowie $\lambda(k) = 1$ für das RLS-Verfahren (Reuter 1992a), ergibt sich aus $\Theta_{\text{RPEM}}(N)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.6937 \\ 1 & 1.4818 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0.2525 \\ 0 & -0.1493 \end{bmatrix}; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1.0723 & 1.9952 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

und aus $\Theta_{\text{RLS}}(N)$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -0.3589 \\ 1 & 1.1216 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0.1900 \\ 0 & -0.1640 \end{bmatrix}; \quad (4.13)$$

$$\mathbf{b}^T = \begin{bmatrix} 1.9011 & 1.9799 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Man sieht hierbei, daß die biasbehafteten Schätzwerte in $\Theta(0)$ durch die Anwendung des rekursiven Prädiktionsfehlerverfahrens verschwinden (Bild 4.3), wohingegen die Parameteränderungen durch das RLS-Verfahren gering sind (Bild 4.4). Die anfänglichen Parameterschwankungen in Bild 4.3 werden hier durch den Vergessensfaktor verursacht. Auch bei Verwendung der exakten Startwerte für das RLS-Verfahren gemäß Gl. (4.7) ergaben sich sehr ähnliche Endwerte wie in Gl. (4.13).

Bei der Identifikation einer beobachter- oder beobachtbarkeitskanonischen Form konvergiert der Algorithmus auch für $\Theta(0) = \mathbf{0}$, da in diesen beiden Fällen die Zustands-/Ausgangs-Beziehung bekannt ist und nur die Eingangs-/Zustandsbeziehung geschätzt werden muß. Für die regler- oder steuerbarkeitskanonische Form konvergiert der rekursive Algorithmus für $\Theta(0) = \mathbf{0}$ dagegen nicht.

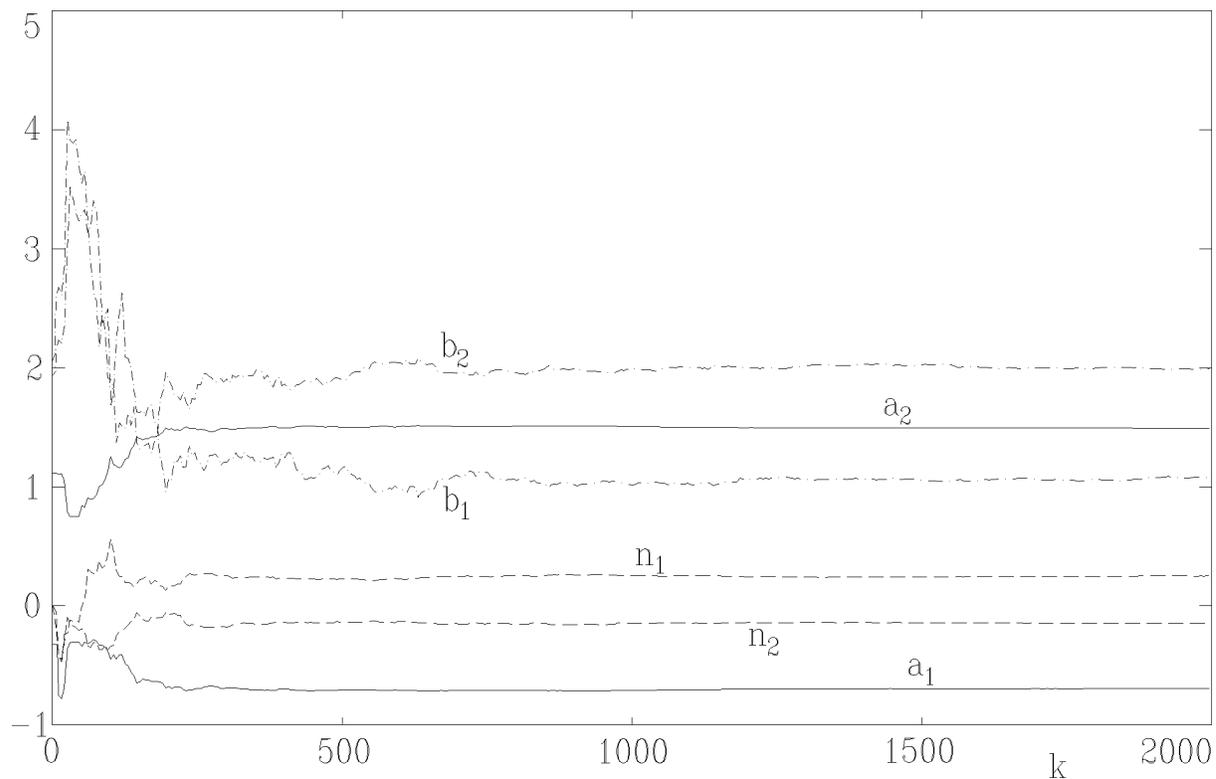


Bild 4.3: Parameterschätzverlauf beim rekursiven Prädiktionsfehlerverfahren (Beispiel 2)

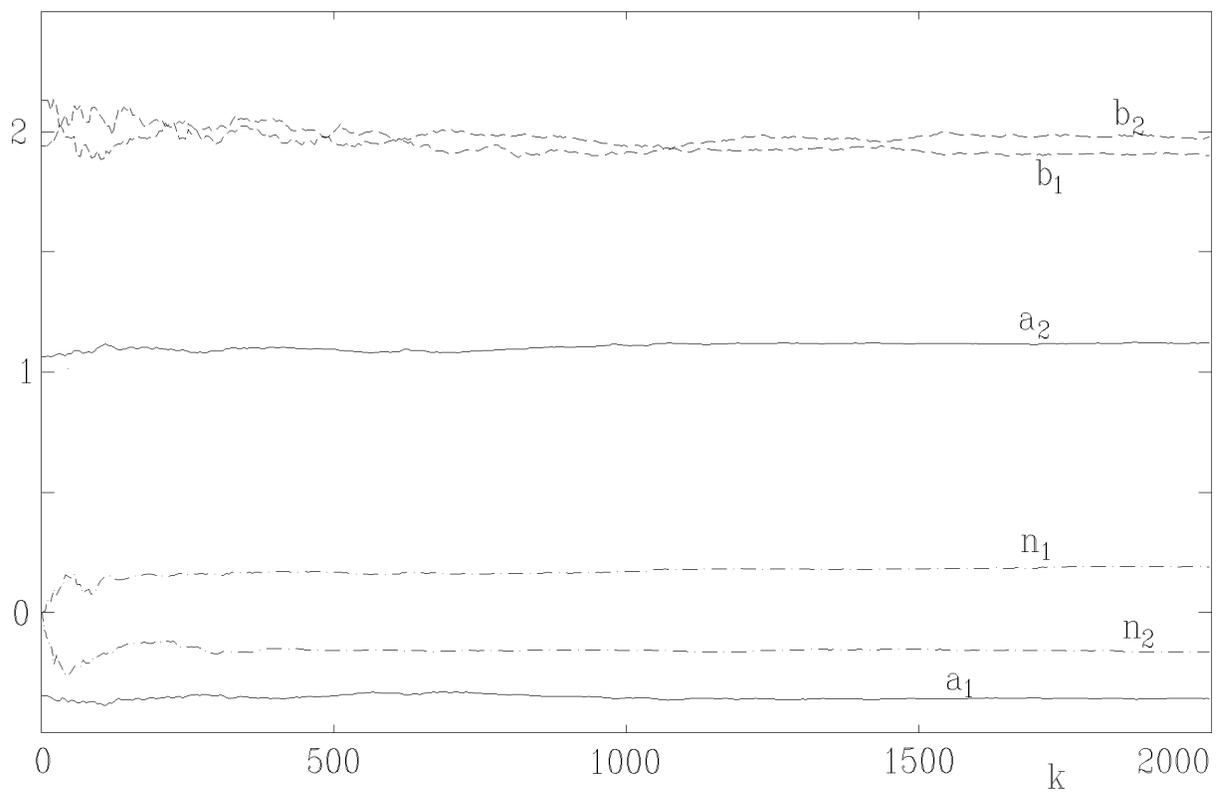


Bild 4.4: Parameterschätzverlauf beim RLS-Verfahren (Beispiel 2)

4.2.2 Nichtrekursives Prädiktionsfehlerverfahren

Beispiel 3: Reglerkanonische Form 5. Ordnung

Vorgegeben wird ein zeitdiskretes bilineares Modell in reglerkanonischer Form (Gl. (3.3)) mit den Parametern

$$\begin{aligned}
 a_1 &= 0.0012 ; & n_1 &= 0.10 ; & c_1 &= 0.0144 ; \\
 a_2 &= -0.0244 ; & n_2 &= -0.20 ; & c_2 &= -0.1560 ; \\
 a_3 &= 0.1790 ; & n_3 &= 0.06 ; & c_3 &= 0.6200 ; \\
 a_4 &= -0.6700 ; & n_4 &= 0.35 ; & c_4 &= -1.2000 ; \\
 a_5 &= 1.3000 ; & n_5 &= -0.15 ; & c_5 &= 1.0000 .
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

Als Eingangssignal $u(k)$ wurde ein gleichverteiltes weißes Rauschen mit $u(k) \in [-1, 1]$ und Taktzeit = $10 \times$ Tastzeit gewählt, d.h. das Eingangssignal wurde für 10 Tastzeitpunkte konstant gehalten. Dies bedingt zwar einerseits eine schlechtere Anregung des Modells, liegt aber andererseits näher an den in der Praxis auftretenden Bedingungen.

Zuerst wurde mit einem einfachen Least-Squares-Verfahren ein lineares Modell identifiziert und in die lineare reglerkanonische Form transformiert. Für die Anwendung des Prädiktionsfehlerverfahrens mit dem gedämpften Newton-Raphson-Algorithmus stehen jetzt zwei Möglichkeiten zur Verfügung. Wenn die Startparameter schlecht sind, so daß es bei der Invertierung des Hesse-Matrix zu numerischen Problemen kommt, muß der Dämpfungsfaktor $\alpha \ll 1$ gewählt werden und das Verfahren sich langsam an bessere Startwerte herantasten. Liegen dagegen Startwerte im Bereich des absoluten Verlustfunktionsminimums vor, wird von $\alpha = 1$ ausgehend α so variiert, daß nur neue Modelle mit kleinerer Verlustfunktion zugelassen werden. Zuerst wird mit $\alpha = 1$ solange ein neues Modell berechnet, wie dieses eine kleinere Verlustfunktion besitzt als das vorherige. Bei einem plötzlich auftretenden größeren Wert für die Verlustfunktion wird α solange halbiert, bis der Verlustfunktionswert sich wieder verkleinert. Als Abbruchschranke hat sich $\alpha_{\text{grenz}} = 10^{-6}$ als geeignet erwiesen.

Im Falle des ungestörten Ausgangssignals ergaben sich für $\alpha = 0.02$ nach ca. 40-50 Iterationen gute Startwerte, die dann für $\alpha = 1$ nach 12 weiteren Iterationen zu den exakten Werten konvergiert waren. Auch der rekursive Algorithmus konvergiert hier mit $\lambda(0) = 0.96$ und $\Delta\lambda = 0.001$ nach ca. 2500 Schritten zu den exakten Werten.

Bei der Betrachtung eines mit einer Störung mit $\sigma(r)/\sigma(y_s) = 0.05$ beaufschlagten Aus-

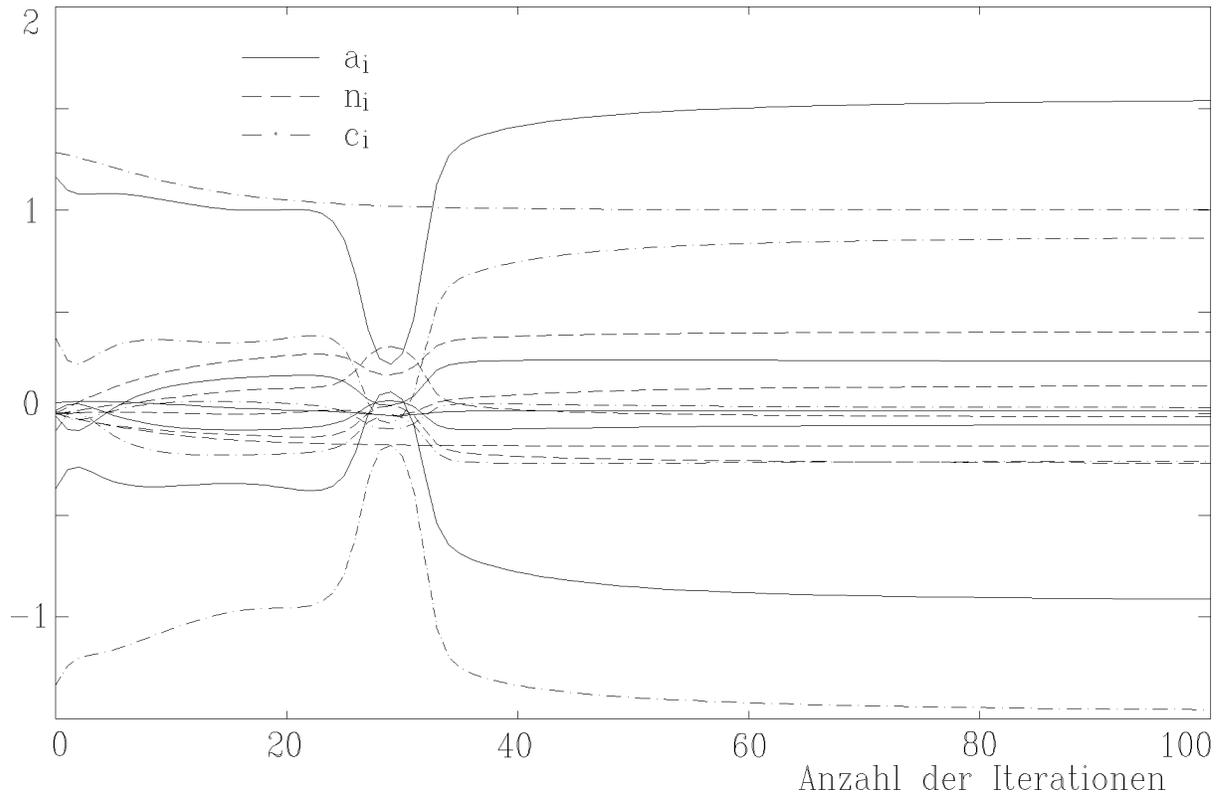


Bild 4.5: Iterationsverlauf bei schlechten Startwerten ($\alpha = 0.1$, Beispiel 3)

gangssignals y_r ergaben sich die Startwerte aus dem linearen Modell zu

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = & 0.0542 ; & n_1 = 0 ; & c_1 = 0.0127 ; \\
 a_2 = & 0.0180 ; & n_2 = 0 ; & c_2 = -0.0828 ; \\
 a_3 = & -0.0103 ; & n_3 = 0 ; & c_3 = 0.3709 ; \\
 a_4 = & -0.3676 ; & n_4 = 0 ; & c_4 = -1.3345 ; \\
 a_5 = & 1.1636 ; & n_5 = 0 ; & c_5 = 1.2833 .
 \end{array} \tag{4.15}$$

Bei einem Dämpfungsfaktor $\alpha = 0.1$ konvergierte die Schätzung nach ca. 60 Iterationsschritten gegen feste Parameterwerte (Bild 4.5) und ein Verlustfunktionsminimum

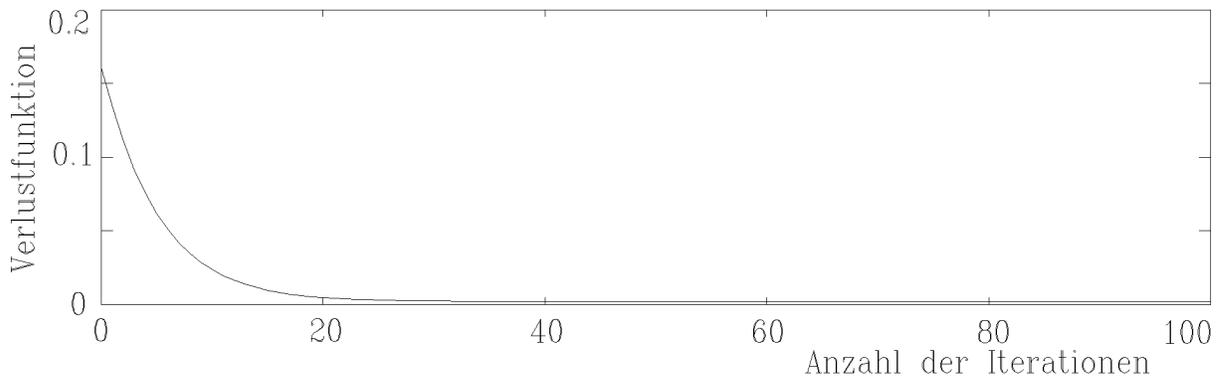


Bild 4.6: Verlustfunktionsverlauf bei schlechten Startwerten ($\alpha = 0.1$, Beispiel 3)

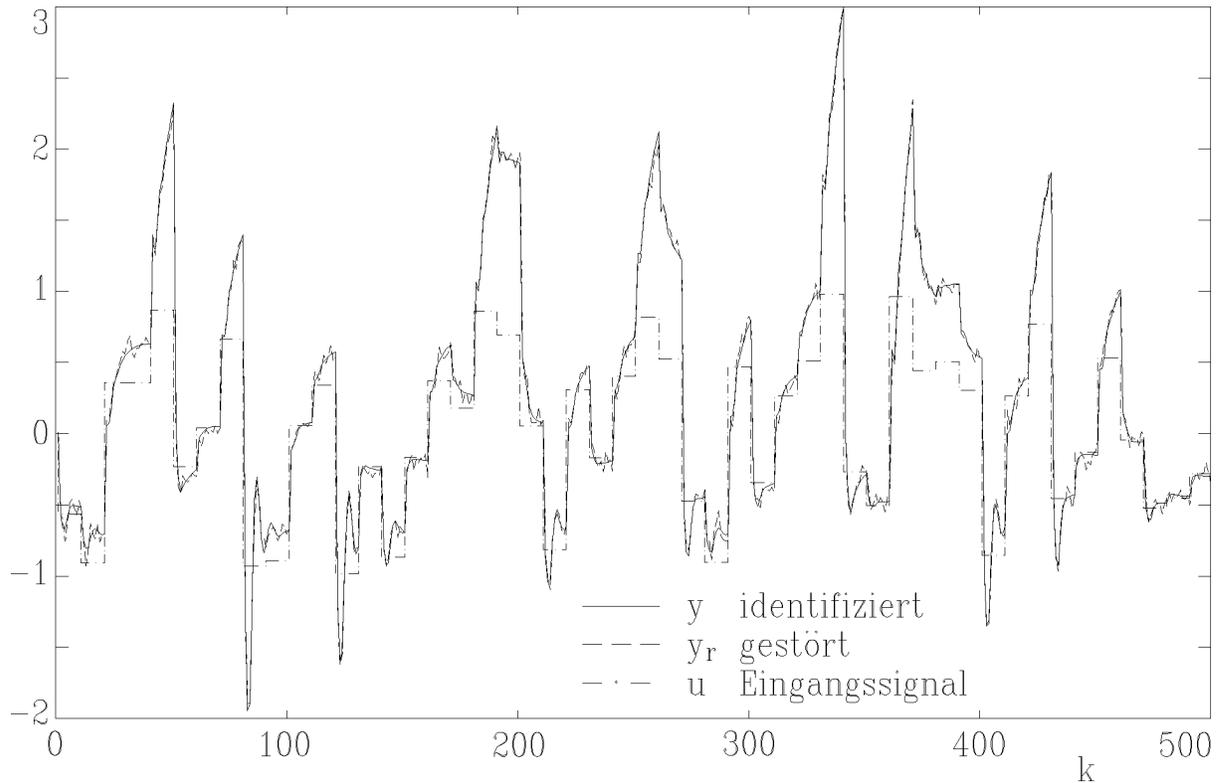


Bild 4.7: Ein- und Ausgangssignale (Beispiel 3)

$V = 0.002061617$ (Bild 4.6). Die zugehörigen Modellparameter lauten

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 0.0130 ; & n_1 = 0.1362 ; & c_1 = 0.0304 ; \\
 a_2 = -0.0557 ; & n_2 = -0.2436 ; & c_2 = -0.2329 ; \\
 a_3 = 0.2564 ; & n_3 = -0.0160 ; & c_3 = 0.8630 ; \\
 a_4 = -0.9120 ; & n_4 = 0.4020 ; & c_4 = -1.4551 ; \\
 a_5 = 1.5381 ; & n_5 = -0.1585 ; & c_5 = 1.0025 .
 \end{array} \tag{4.16}$$

Die Parameterbeulen im Iterationsverlauf nach ca. 30 Schritten (Bild 4.5) traten bei ähnlichen Startwerten aber unterschiedlichen Störsignalverläufen an dieser Stelle immer auf, waren aber in den meisten Fällen nicht so ausgeprägt.

Bild 4.7 zeigt für die ersten 500 der $N = 1000$ verwendeten Meßwerte das Eingangssignal u , das verrauschte Meßsignal y_r und das mit den Parametern (4.16) simulierte Ausgangssignal y .

Bei Testrechnungen mit unterschiedlichen Störsignalen gleicher Stärke hat sich herausgestellt, daß die Verlustfunktion und die Lage ihrer Minima stark vom jeweiligen Störanteil abhängen. Es ergaben sich für das hier verwendete Rauschverhältnis $\sigma(r)/\sigma(y_s) = 0.05$ für den Wert der Verlustfunktion zwar erst Unterschiede in der dritten oder vierten signifikanten Stelle. Die jeweils zu den verschiedenen Minima gehörenden Modellparameter

differierten jedoch deutlich, wie schon der Vergleich von (4.14) mit (4.15) zeigt.

Bei der Identifikation werden nicht die Modellparameter optimiert, sondern es erfolgt eine Minimierung der Verlustfunktion. Aus diesem Grund ist es kein Fehler, wenn das identifizierte Modell nicht dem vorgegebenen entspricht, solange die exakten Parameter nicht zum Verlustfunktionsminimum gehören. Dies verdeutlicht die nächste Rechnung.

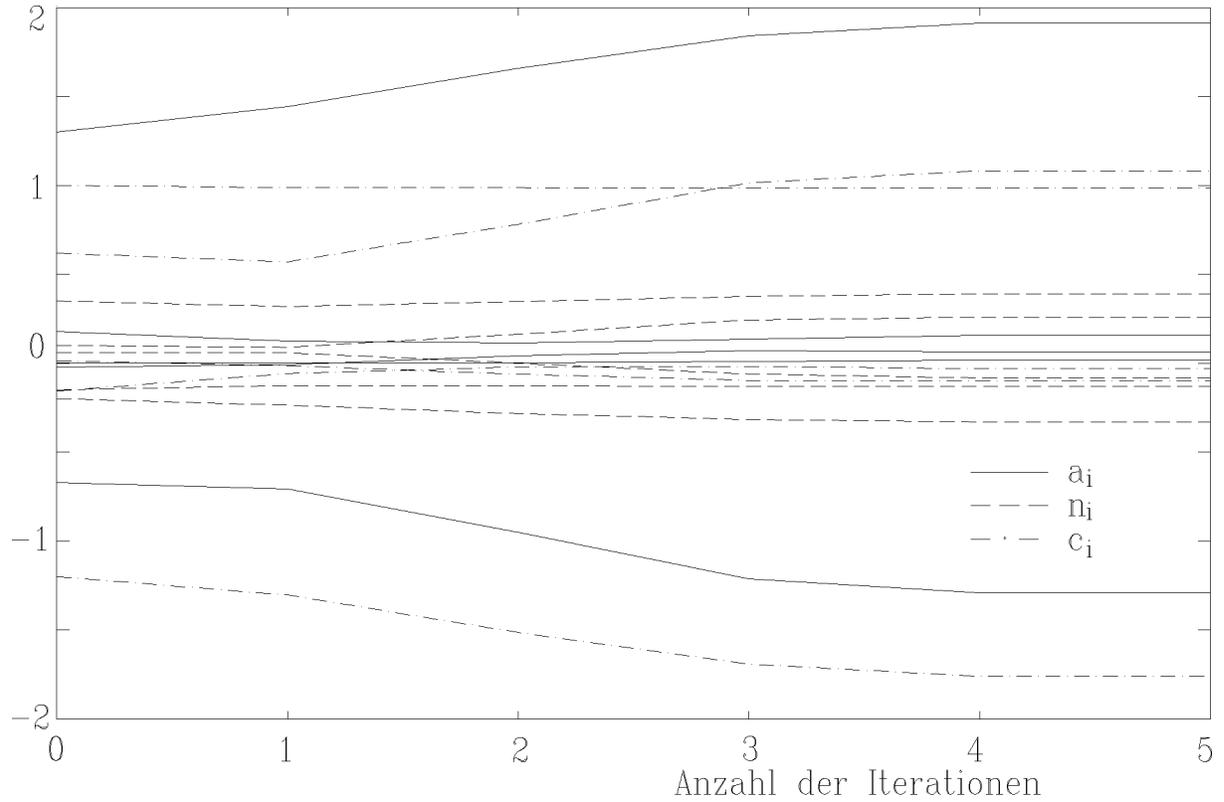


Bild 4.8: Iterationsverlauf bei exakten Startwerten ($\alpha = 1$, Beispiel 3b)

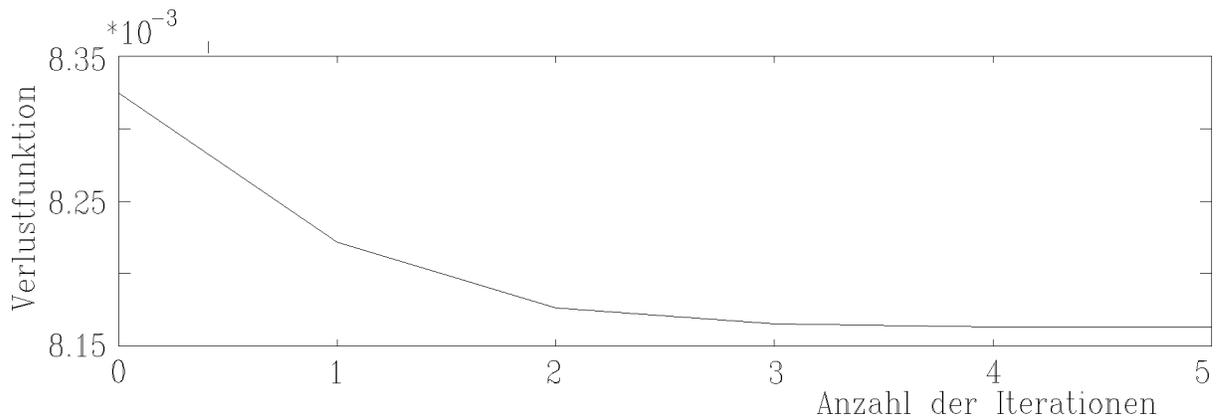


Bild 4.9: Verlustfunktionsverlauf bei exakten Startwerten ($\alpha = 1$, Beispiel 3b)

Beispiel 3b:

Bei einem Rauschanteil $\sigma(r)/\sigma(y_s) = 0.1$ wurden nun die exakten Werte (4.14) als Startwerte vorgegeben und mit variablem α das nächste Minimum gesucht, das nach 4 Iterationsschritten erreicht wird (Bild 4.8). Die dazugehörigen Verlustfunktionswerte sind in Bild 4.9 zu sehen.

In allen hier untersuchten Fällen waren die Differenzen zwischen dem ungestörten vorgegebenen Ausgangssignal y_s und dem identifizierten y sehr gering und um ca. eine Größenordnung kleiner als der Rauschanteil r .

5 Identifikation eines elektro-hydraulischen Translationsantriebes

Zur Identifikation wurde ein im Hydrauliklabor des Fachgebietes Meß-, Steuer- und Regelungstechnik der Universität -GH- Duisburg vorhandener hydraulischer Prüfstand – der sog. „lange“ Zylinderprüfstand (Bild 5.1) – herangezogen.

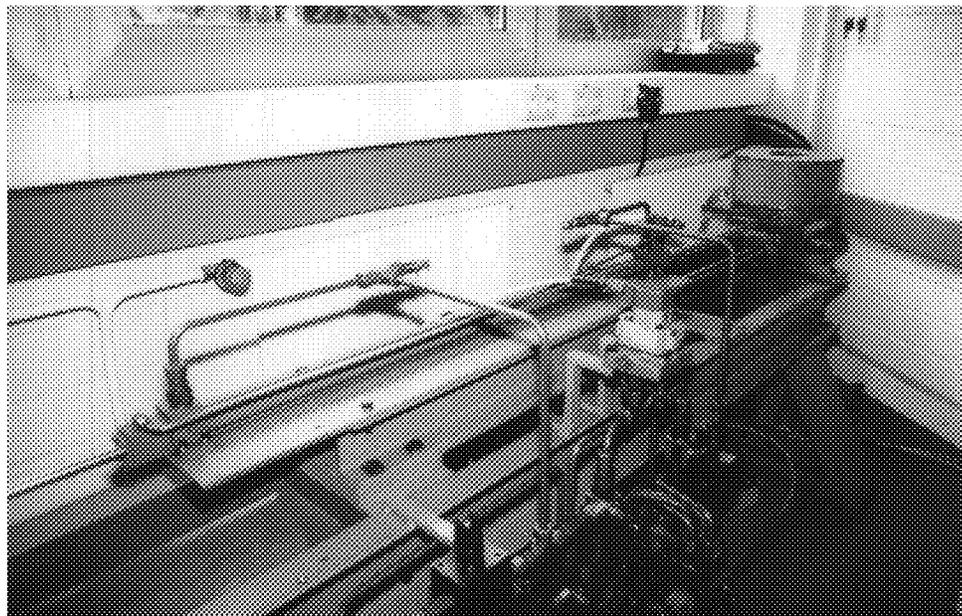


Bild 5.1: „Langer“ Zylinderprüfstand

Hierbei handelt es sich um einen elektro-hydraulischen Translationsantrieb mit ausgeprägten Nichtlinearitäten (Köckemann 1988, Dorßen 1990, Schwarz 1991). Dieser Antrieb besteht im wesentlichen aus einem Proportionalventil als Stellglied und einem hydraulischen Motor, dem Zylinder (Bild 5.2).

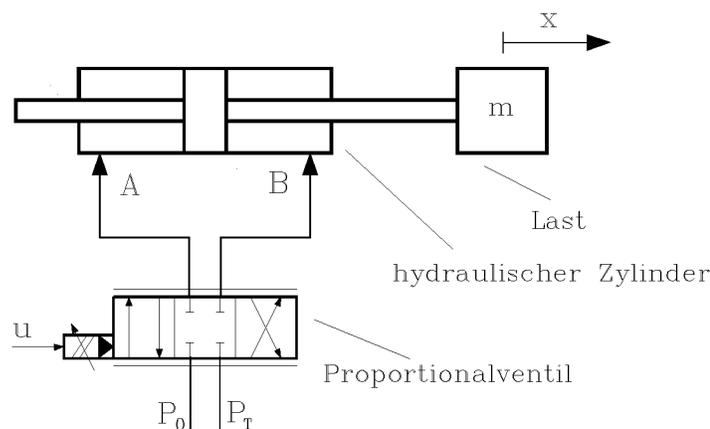


Bild 5.2: Elektro-hydraulischer Translationsantrieb

Das Proportionalventil steuert die Ölvolumenströme für die Anschlüsse A und B, in deren Abhängigkeit der Hydraulikzylinder die Masse m bewegt. Eingangsgröße u dieses technischen Systems ist die elektrische Steuerspannung des Ventils, Ausgangsgröße y die Lastposition. Daß sich solche Systeme mit einem zeitkontinuierlichen bilinearen Modell beschreiben lassen, zeigen Doríßen (1990), der ein allgemeines bilineares Zustandsraummodell mit voll besetzten Matrizen \mathbf{A} , \mathbf{N} , \mathbf{b} und \mathbf{c} identifizierte, sowie Yin (1992) mit einem bilinearen Modell in spezieller kanonischer Form.

Vor dem Starten der Messung wurde die Masse – die hierbei mit $m \approx 5$ kg relativ klein war – mittels eines Reglers in die Nullstellung gebracht. Dies ist u.a. auch deshalb notwendig, da bei diesem technischen System der elektrische und der hydraulische Nullpunkt nicht übereinstimmen. Für die Eingangsspannung $u = 0$ ergibt sich nämlich ein Geschwindigkeitsoffset bzw. eine Positionsdrift. Oder anders ausgedrückt: Um den Zylinder zum Stillstand zu bringen, ist ein geringer Spannungsoffset $u_N \neq 0$, die sogenannte Nullsteuerspannung, erforderlich.

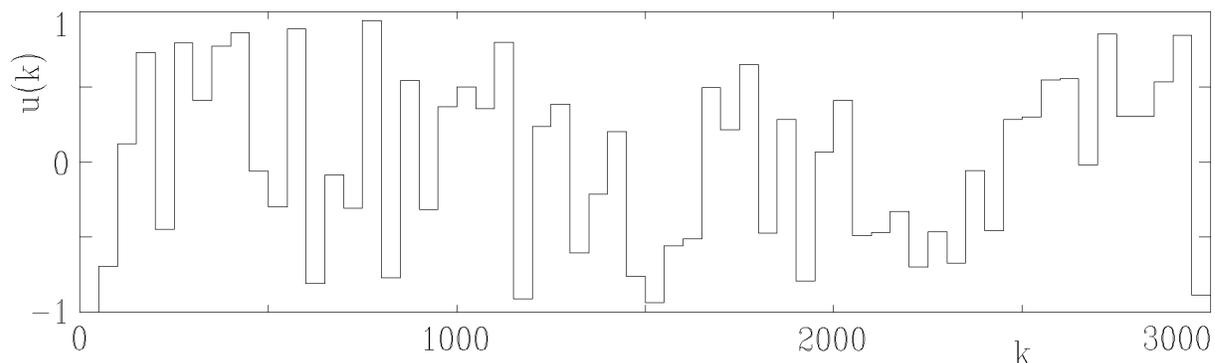


Bild 5.3: Verwendetes normiertes Eingangssignal

Als Eingangsspannung sind absolut Werte im Bereich $U [\text{V}] \in [-10, +10]$ V möglich. Das entspricht einer relativen Eingangsgröße $u = \frac{U [\text{V}]}{10 \text{ V}} \in [-1, +1]$. Als Eingangssignal wurde eine gleichverteilte weiße Rauschsignalfolge verwendet. Um die Dynamik des Systems gut erfassen zu können, muß hierbei einerseits die Tastzeit T_a möglichst klein gehalten werden. Andererseits muß das Eingangssignal aber so beschaffen sein, daß die Systemantwort auch große Ausgangssignale erreichen kann. Die Tastzeit lag hier bei $T_a = 1$ ms. Das Eingangssignal wurde für 50 Tastschritte konstant gehalten, so daß sich eine Taktzeit von $T_k = 50$ ms ergab. Wählt man die Taktzeit deutlich niedriger, so wird zum einen nur ein kleiner Bereich der möglichen Ausgangssignalwerte erreicht, da das System nicht so schnell reagieren kann. Zum anderen kommen für kleinere Eingangssignale ein signifikanter Haftreibungseinfluß und der damit verbundene Stick-Slip-Effekt (Köckemann 1988) deutlich zur Geltung.

Verwendet wurde hier das in Bild 5.3 dargestellte diskrete Eingangssignal. Da für diesen

Antrieb bei Verwendung des Positionssignals x zur Identifikation ein integrales Verhalten vorliegt, wurde wegen der geforderten Stabilität des Modells das durch Differenzenbildung aus dem Positionssignal x erzeugte Geschwindigkeitssignal

$$y(k) = \frac{x(k) - x(k-1)}{T_a} \quad (5.1)$$

herangezogen. Aus der theoretischen Modellbildung erscheint die Verwendung einer bilinearen Approximation 4. Ordnung sinnvoll (Köckemann 1988, Dorßen 1990, Yin 1992). Durch Betrachtung des Geschwindigkeitssignals kann man erkennen, daß das dynamische Verhalten annähernd Nullpunktsymmetrie besitzt. Bei Eingangssignalen gleicher Höhe aber mit unterschiedlichem Vorzeichen unterscheiden sich die Geschwindigkeitsverläufe auch nur im Vorzeichen. Deshalb wird hier ein bilineares Modell

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{N} \mathbf{x}(k) |u(k)| + \mathbf{b} u(k) \quad (5.2)$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) \quad (5.3)$$

verwendet, das diesem Umstand Rechnung trägt. Dafür muß natürlich in den in Abschnitt 3 hergeleiteten Gleichungen für die bilinearen Anteile und ihre Ableitungen $u(k)$ durch $|u(k)|$ ersetzt werden.

Modell in beobachtbarkeitskanonischer Form

Der erste Identifikationsschritt wurde mit einem einfachen Least-Squares-Verfahren durchgeführt und ergab die (biasbehafteten) Werte

$$\begin{array}{lll} a_1 = 0.1787 ; & n_1 = -0.1110 ; & b_1 = -0.0003 ; \\ a_2 = -0.5792 ; & n_2 = 0.1157 ; & b_2 = -0.0010 ; \\ a_3 = -0.2170 ; & n_3 = 0.0882 ; & b_3 = 0.0009 ; \\ a_4 = 1.5977 ; & n_4 = -0.0972 ; & b_4 = 0.0145 . \end{array} \quad (5.4)$$

Verwendet man für das Prädiktionsfehlerverfahren als Eingangsvektor $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4]^T$, so ergeben sich starke Konvergenzprobleme sowie teilweise numerische Probleme bei der Schätzung.

1. Modell

Deshalb wurde für ein erstes Modell

$$\mathbf{b} = [0 \ b_2 \ 0 \ b_4]^T \quad (5.5)$$

gewählt. Als Startwerte wurden (5.4) und (5.5) benutzt. Mit $\alpha = 0.02 = \text{konst.}$ für den Dämpfungsfaktor ergaben sich die in Bild 5.4 gezeigten Parameterverläufe bei der Iteration sowie die zugehörigen Verlustfunktionswerte in Bild 5.5. Man sieht deutlich, daß hierbei während 500 Iterationsschritten keine Konvergenz der Parameter auftritt. Das

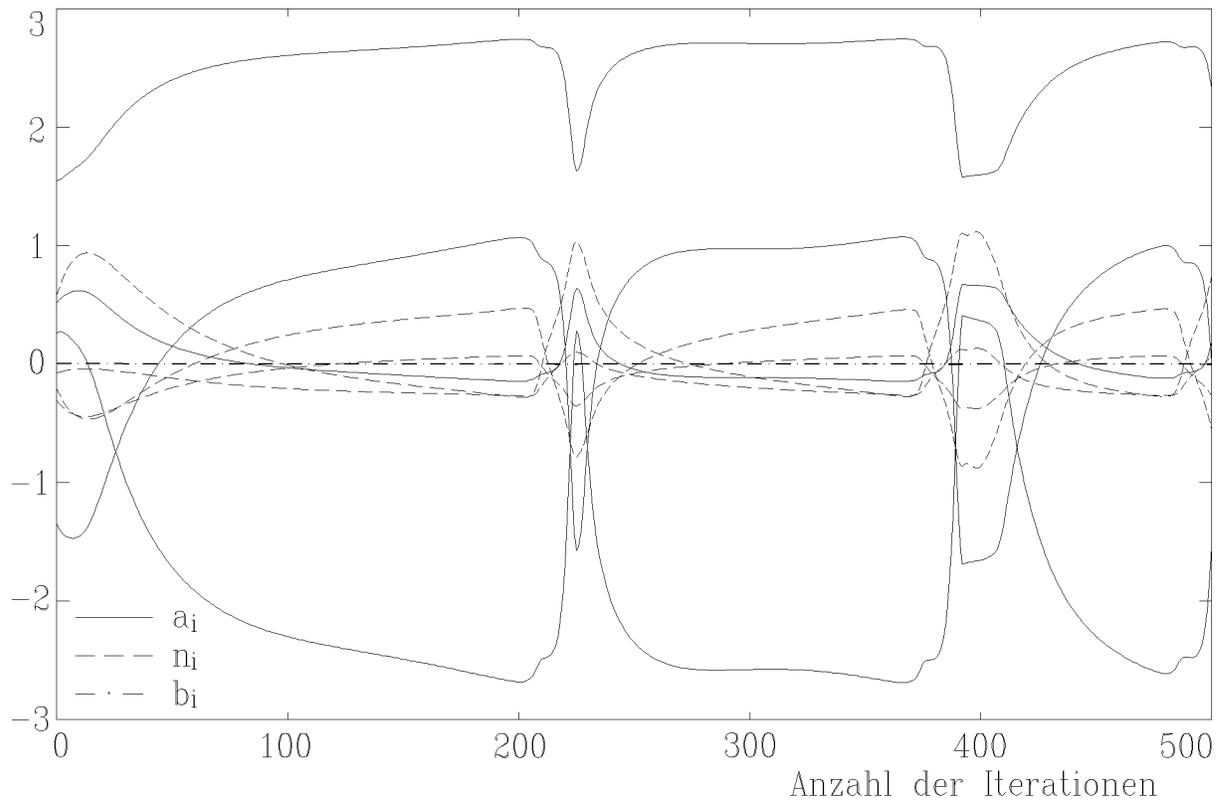


Bild 5.4: Iterationsverlauf ($\alpha = 0.02$, Modell 1 bei Iteration Nr. 128)

Modell mit dem kleinsten Verlustfunktionswert $V = 0.0007498$ nach der 128. Iteration besitzt die Parameter

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = -0.0689 ; & n_1 = 0.0110 ; & b_1 = 0 ; \\
 a_2 = 0.8263 ; & n_2 = -0.1139 ; & b_2 = 0.0079 ; \\
 a_3 = -2.4123 ; & n_3 = 0.3313 ; & b_3 = 0 ; \\
 a_4 = 2.6441 ; & n_4 = -0.2289 ; & b_4 = 0.0032 .
 \end{array} \tag{5.6}$$

Hier erbrachte auch der Versuch der Verlustfunktionsminimierung mit variablem α keine Modellverbesserung.

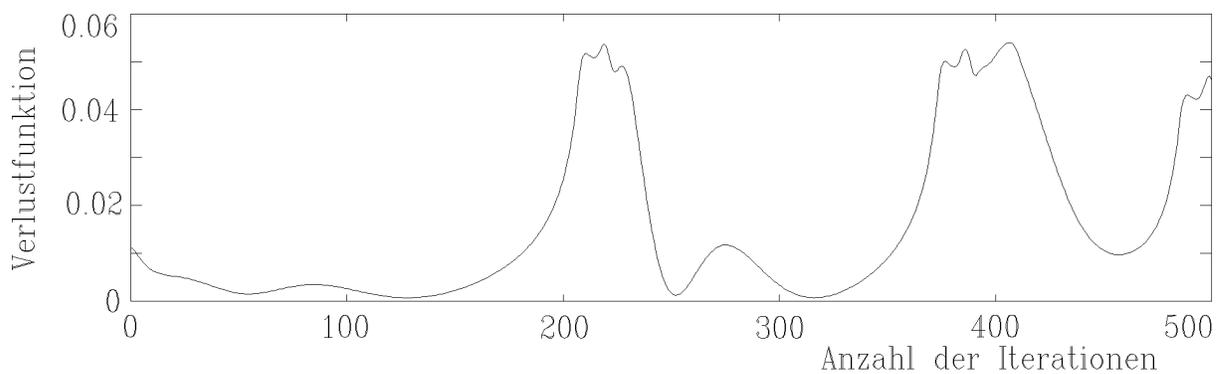


Bild 5.5: Verlustfunktionsverlauf ($\alpha = 0.02$, Modell 1 bei Iteration Nr. 128)

2. Modell

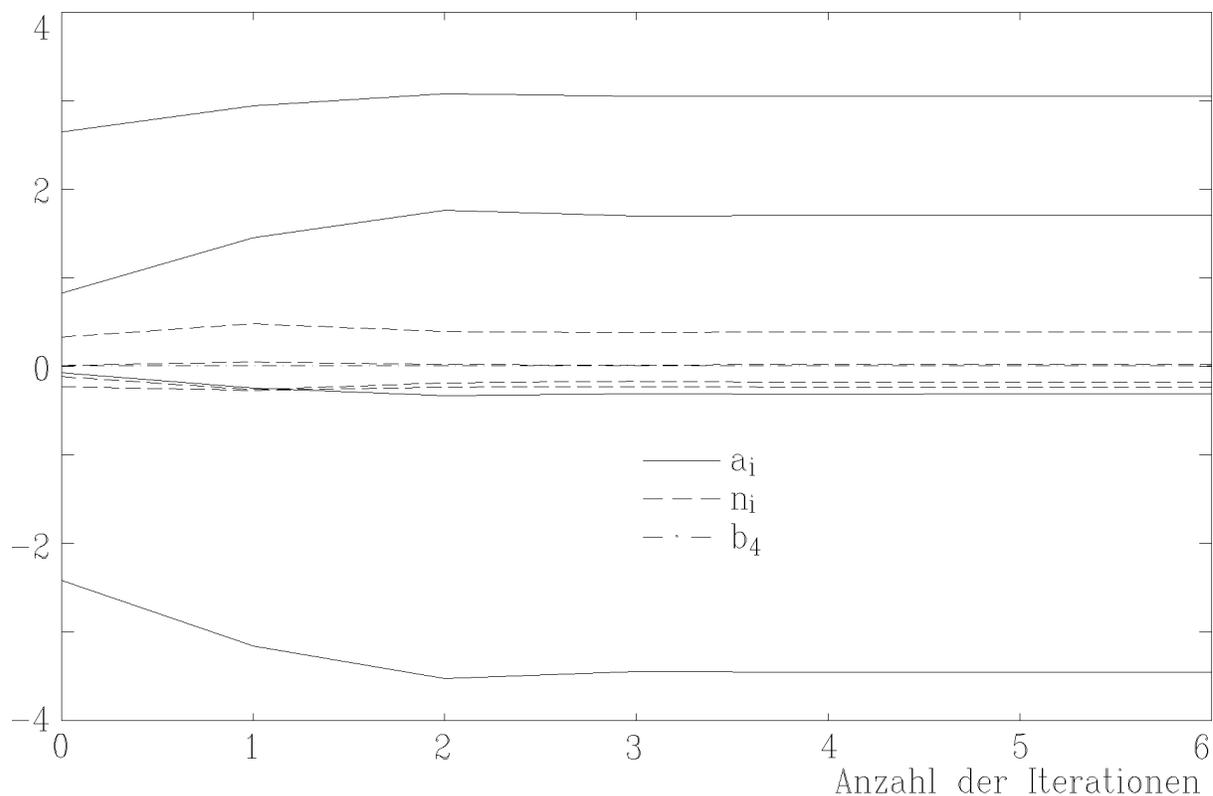


Bild 5.6: Iterationsverlauf für Modell 2 ($\alpha = 1$, konvergiert nach 5 Iterationsschritten)

Nun wurde für ein zweites Modell auch $b_2 = 0$ vorgegeben. Als Startwerte fungieren die a_i und n_i aus (5.6) sowie

$$\mathbf{b} = [0 \ 0 \ 0 \ 0.08]^T \quad . \quad (5.7)$$

Mit variablem Dämpfungsfaktor α fand der Algorithmus schon nach 5 Iterationsschritten (Bild 5.6) ein Verlustfunktionsminimum mit den Parametern

$$\begin{array}{lll} a_1 = -0.3116 ; & n_1 = 0.0204 ; & b_1 = 0 ; \\ a_2 = 1.7035 ; & n_2 = -0.1784 ; & b_2 = 0 ; \\ a_3 = -3.4509 ; & n_3 = 0.3897 ; & b_3 = 0 ; \\ a_4 = 3.0528 ; & n_4 = -0.2330 ; & b_4 = 0.0056 \end{array} \quad (5.8)$$

und dem Verlustfunktionswert $V = 0.0007253$. Bild 5.7 zeigt hierfür den gemessenen und den identifizierten Geschwindigkeitsverlauf sowie den zugehörigen Geschwindigkeitsfehler e .

Wollte man mit diesem Modell durch Umstellung von Gl. (5.1) die Position berechnen, so besäße diese eine stärkere Drift. Dies rührt hauptsächlich daher, daß der Geschwindigkeitsfehler e der Identifikation nicht mittelwertfrei ist. Auch die vorhandene Nullsteuer-

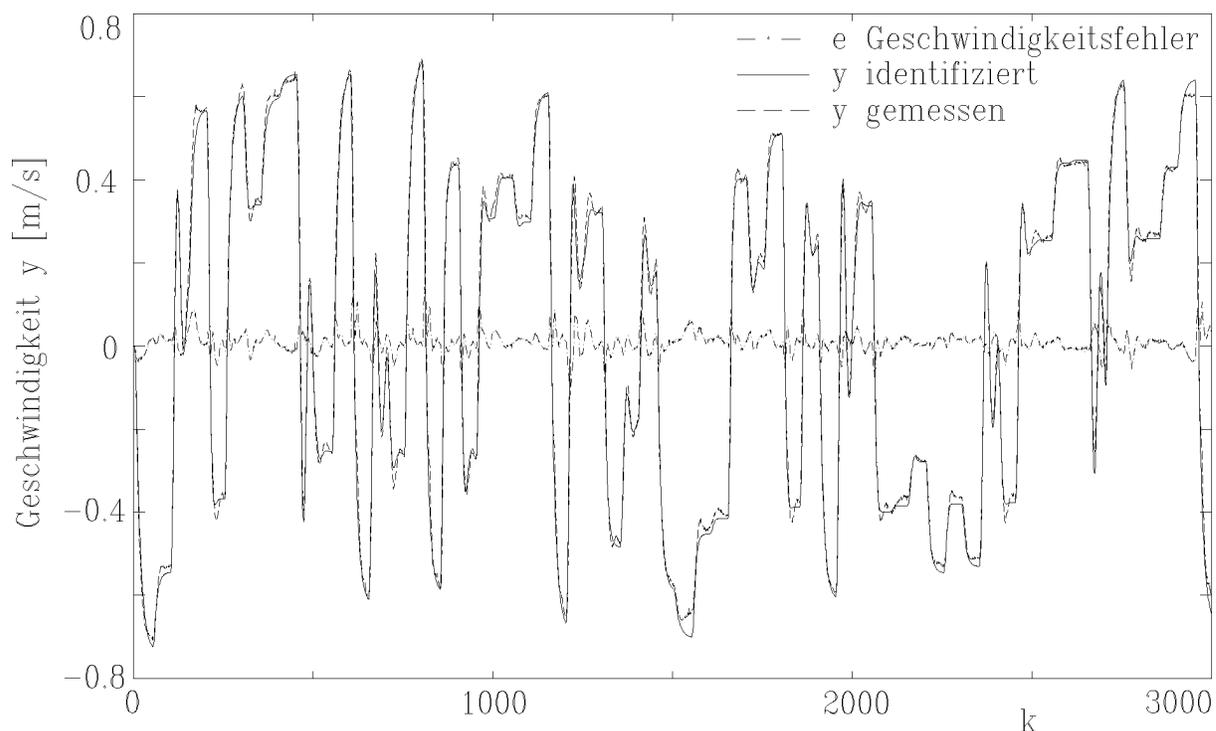


Bild 5.7: Geschwindigkeitsverläufe (Modell 2)

spannung trägt hierzu deutlich bei. Deshalb wurde eine Driftgeschwindigkeit so ermittelt, daß der Positionsfehler mittelwertfrei wird, so daß sich die berechnete Position zu

$$x(k) = x(k-1) + y(k) T_a + T_a k \Delta \epsilon \quad (5.9)$$

mit $\Delta \epsilon = 0.0107556$ ergibt. Berechneter und gemessener Positionsverlauf sowie Positionsfehler sind in Bild 5.8 gegenübergestellt.

3. Modell

Wählt man eine Tastzeit $T_a = 2$ ms mit dem in Bild 5.3 gezeigten Eingangssignal, so wird mit $\alpha = 0.02$ der in Bild 5.9 dargestellte Iterationsverlauf für die Parameter mit den Endwerten

$$\begin{aligned} a_1 &= -0.0607 ; & n_1 &= 0.0994 ; & b_1 &= 0 ; \\ a_2 &= -0.2401 ; & n_2 &= 0.1861 ; & b_2 &= 0 ; \\ a_3 &= -0.2707 ; & n_3 &= 0.6449 ; & b_3 &= 0 ; \\ a_4 &= 1.3981 ; & n_4 &= -0.9893 ; & b_4 &= 0.1620 \end{aligned} \quad (5.10)$$

berechnet. Der Verlustfunktionswert für dieses Modell beträgt $V = 0.0004714$. Mit dem Mittelwert $\Delta \epsilon = 0.007867$ des Geschwindigkeitsfehlers sowie Gl. (5.9) ergibt sich der in Bild 5.10 gezeigt Positionsverlauf.

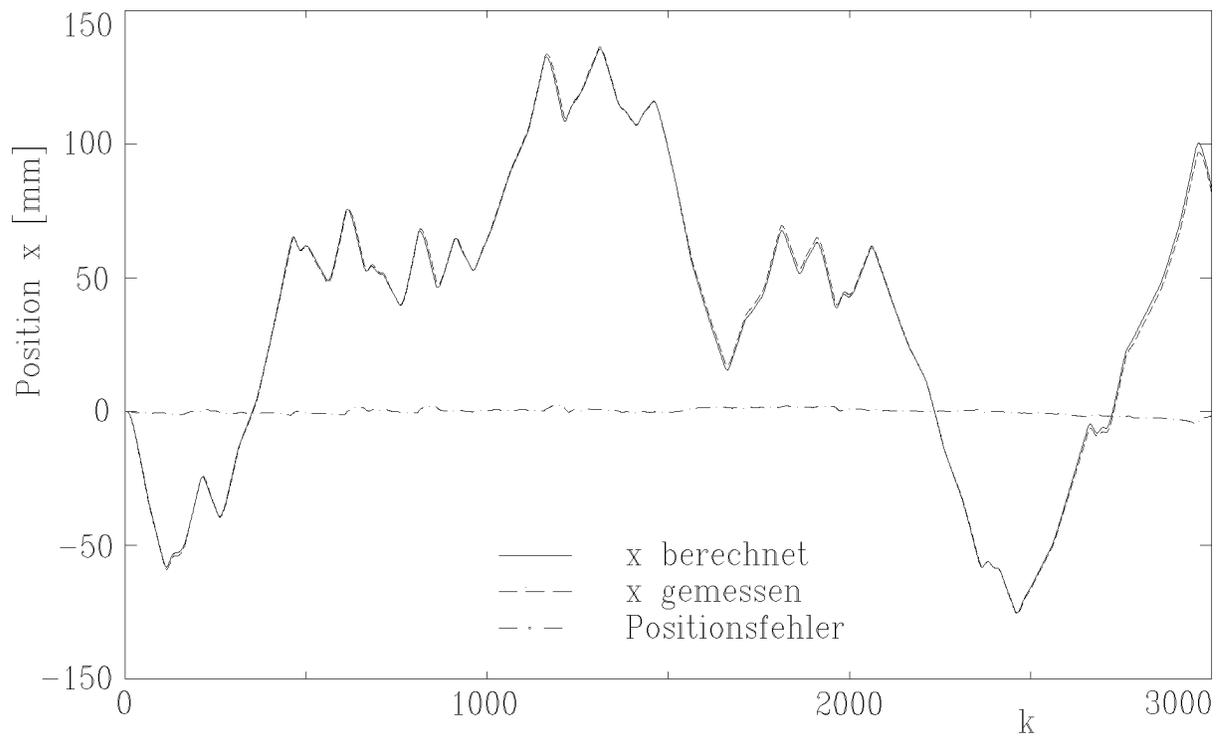
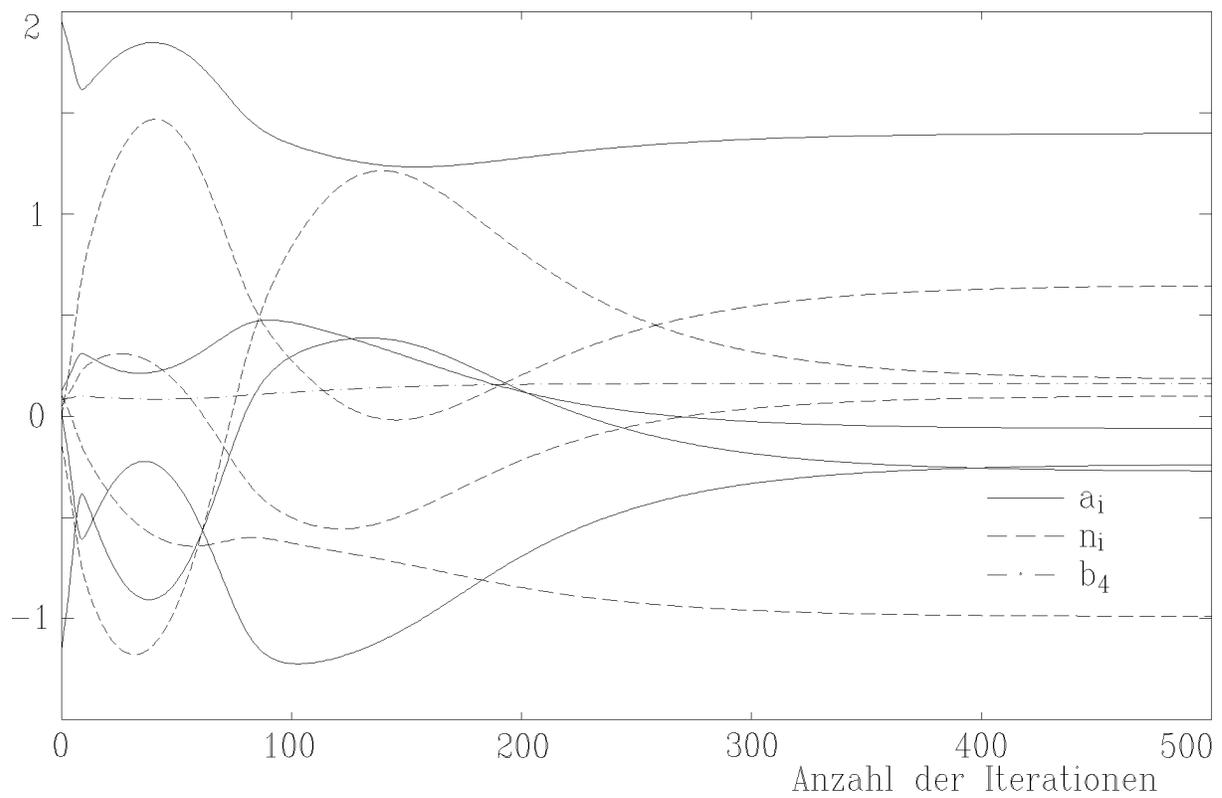


Bild 5.8: Positionsverläufe (Modell 2)

Bild 5.9: Iterationsverlauf für Modell 3 ($\alpha = 0.02$)

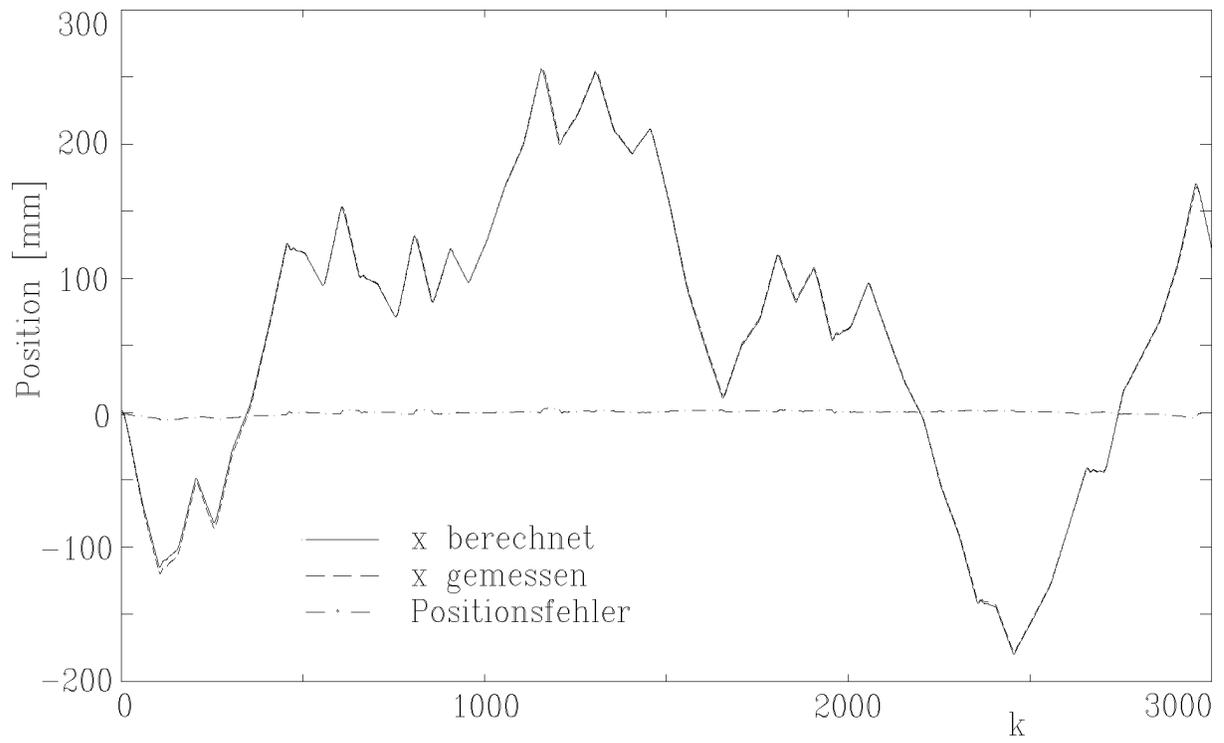


Bild 5.10: Positionsverläufe (Modell 3)

6 Zusammenfassung und Ausblick

Bei der Modellbildung dynamischer Systeme kann oft die theoretische Modellbildung nicht angewendet werden, da sie zu ungenau, zu langwierig, das System zu komplex ist oder nicht genügend Informationen über die inneren Systemvorgänge vorliegen. Für die Identifikation eines mathematischen Modells des Ein-/Ausgangsverhaltens werden sehr häufig lineare Modelle verwendet, die zwar einfach zu handhaben sind, welche aber auch das Systemverhalten nur lokal, d.h. um einen Arbeitspunkt herum, genauer wiedergeben. Zur Beschreibung des Systemverhaltens über einen großen Arbeitsbereich sind dann nichtlineare Modelle notwendig (Schwarz 1991).

Die einfachste Klasse dieser nichtlinearen Beschreibungen bilden die bilinearen Zustandsraummodelle. Im Gegensatz zu den Wiener- und Hammersteinmodellen können hiermit dynamische Nichtlinearitäten beschrieben werden, wie sie beispielsweise bei hydraulischen Antrieben vorkommen.

Bilineare kanonische Modelle bieten sich hierbei gerade dann an, wenn nicht genügend Informationen über die genaue Systemstruktur vorliegen. Deshalb wurden ausgehend von Zeitz (1989) vier zeitdiskrete bilineare kanonische Formen definiert.

Zur Identifikation solcher nichtlinearer Systemmodelle sind Methoden wie z.B. Least-Squares-Algorithmen ungeeignet. Vielmehr bieten sich die Prädiktionsfehlerverfahren an, die keine Linearität in den Parametern fordern. Für diese vier kanonischen Formen wurden allgemein (d.h. für beliebige Modellordnungen) die Prädiktorgradienten hergeleitet, die zur Anwendung der Prädiktionsfehlerverfahren notwendig sind. Auch zur Bestimmung der Hesse-Matrix, die beim nichtrekursiven Prädiktionsfehlerverfahren benötigt wird, erweist sich die Approximation mittels Prädiktorgradienten als ausreichend. Die Leistungsfähigkeit dieser Algorithmen wurde an mehreren Simulationsbeispielen, unter denen sich auch ein Vergleich mit einem Least-Squares-Algorithmus befindet, verdeutlicht.

Abschließend wurden erste bilineare Modelle eines elektro-hydraulischen Linearantriebes in kanonischer Form identifiziert. Dazu mußte jedoch wegen des nullpunktsymmetrischen Verhaltens der dynamischen Anteile eine abgeänderte bilineare Struktur verwendet werden, die diesem Umstand Rechnung trägt. Anhand der Ergebnisse läßt sich erkennen, daß die zeitdiskrete bilineare Approximation in beobachtbarkeitskanonischer Form eine relativ gute Beschreibung des Systemverhaltens darstellt.

Zwar kann ein solches zeitdiskretes Modell keine so gute Approximation liefern wie ein zeitkontinuierliches, da die zeitdiskrete Approximation eines zeitkontinuierlichen bilinearen Systems (ein zustandsaffines Modell) eine komplexere Modellbeschreibung darstellt als ein zeitdiskretes bilineares Modell in kanonischer Form.

Die Vorteile der zeitdiskreten Modelle liegen aber darin, daß bei einem zeitdiskreten Zustandsregler mit Beobachter deutlich höhere Abtastraten realisiert werden können als bei

einem zeitkontinuierlichen, da bei ihnen keine Integration durchzuführen ist.

Weiterführend sollen noch Identifikationen der anderen drei kanonischen Formen für diesen elektro-hydraulischen Translationsantrieb vorgenommen werden. Außerdem liegt noch Untersuchungsbedarf in der Anwendung von Verfahren zur Ordnungssuche (vgl. Reuter 1992b) und auch der Punkt der Bestimmung von günstigen Totzeitapproximationen wurde noch nicht bearbeitet.

7 Literatur

- Ackermann, J.** 1988. *Abtastregelung*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag.
- Dorißen, H.T.** 1990. *Zur Minimalrealisierung und Identifikation bilinearer Systeme*. Dissertation Universität -GH- Duisburg. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 221. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Dai, H. und N.K. Sinha.** 1989. Robust recursive least-squares method with modified weights for bilinear system identification. *IEE Proceedings 136, Part D*. 122-126.
- Fnaiech, F. und L. Ljung.** 1987. Recursive identification of bilinear systems. *International Journal of Control* 45. 453-470.
- Godfrey, K.R. and J.J. DiStefano III.** 1985. Identifiability of Model Parameters. *Proceedings of the 6th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York*. Oxford: Pergamon Press. 89-114.
- Isermann, J.** 1988. *Identifikation dynamischer Systeme, Band I und II*. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin u.a.: Springer.
- Köckemann, A.** 1988. *Zur adaptiven Regelung elektro-hydraulischer Antriebe*. Dissertation Universität -GH- Duisburg. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 174. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Ljung, L.** 1987. *System Identification*. Englewood Cliffs/New Jersey: Prentice Hall.
- Ljung, L. und T. Söderström.** 1987. *Theory and Practice of Recursive Identification*. First MIT Paperback edition. Cambridge/Mass.: The MIT Press.
- Mohler, R.R.** 1973. *Bilinear Control Processes*. New York: Academic Press.
- Reuter, H.** 1992a. *Zur Identifikation bilinearer Systemmodelle mit einem robusten rekursiven Least-Squares-Verfahren*. Forschungsbericht 09/92 MSRT. Universität -GH- Duisburg.
- Reuter, H.** 1992b. *Zur Wahl der Startparameter beim rekursiven Prädiktionsfehlerverfahren und zur Suche der Modellordnung nichtlinearer Systeme*. Forschungsbericht 11/92 MSRT. Universität -GH- Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H., H.T. Dorißen und L. Guo.** 1988. Bilinearization of Nonlinear Systems. *Proceedings of the 3rd International Symposium on Systems Analysis and Simulation*. A. Sydow, S.G. Tzafestas und R. Vichnevetsky (Hrsg.). Berlin: Akademie Verlag.

- Wernstedt, J.** 1989. *Experimentelle Systemanalyse*. Berlin: VEB Verlag Technik.
- Yin, X.** 1992. Bilinear Modeling and State-Feedback Control of an Electro-Hydraulic Drive. *Preprints of the IFAC/IMACS/IEEE/IUTAM Workshop on Motion Control for Intelligent Automation*. Oxford: Pergamon Press. 89-94.
- Zeitz, M.** 1985. Canonical Forms for Nonlinear Systems. *Geometric Theory of Nonlinear Control Systems*. ed. Jakubczy, K.B., W. Respondek und K. Tchon. Warschau: Scientific Papers of the Institute of Technical Cybernetics of the Technical University of Wroclaw. 255–278.
- Zeitz, M.** 1989. Canonical Forms for Nonlinear Systems. *Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design*. A. Isidori (Hrsg.). Oxford: Pergamon Press. 33-38.

A Transformation linearer Modelle in kanonische Formen

Die Überführung der Parameter der Übertragungsfunktion eines zeitdiskreten linearen Modells mit der diskreten Totzeit d und der Modellordnung n

$$\begin{aligned} y(k) &= F(q^{-1}) u(k) \\ &= \frac{g_n q^{-1} + g_{n-1} q^{-2} + \dots + g_2 q^{-n+1} + g_1 q^{-n}}{1 + h_n q^{-1} + h_{n-1} q^{-2} + \dots + h_2 q^{-n+1} + h_1 q^{-n}} q^{-d} u(k) \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

in die einer zeitdiskreten linearen Zustandsraumdarstellung

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A} \mathbf{x}(k) + \mathbf{b} u(k-d) \quad (\text{A.2})$$

$$y(k) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(k) \quad (\text{A.3})$$

mit kanonischer Form geschieht wie folgt:

Beobachterkanonische Form:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ & & & a_2 \\ & \mathbf{I} & & \vdots \\ & & & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &= -h_i \\ b_i &= g_{n+1-i} \end{aligned} \quad i = 1 \dots n \quad (\text{A.5})$$

Beobachtbarkeitskanonische Form:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I} & \\ 0 & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &= -h_i, & i &= 1 \dots n \\ b_1 &= g_n \\ b_i &= -\sum_{j=2}^i h_{n+1-j} b_{i-j+1} + g_{n+1-i}, & i &= 2 \dots n \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Reglerkanonische Form:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & & & \\ \vdots & & \mathbf{I} & \\ 0 & & & \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.8})$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &= -h_i & i &= 1 \dots n \\ c_i &= g_{n+1-i} \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Steuerbarkeitskanonische Form:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & a_1 \\ & & & a_2 \\ & \mathbf{I} & & \vdots \\ & & & a_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.10})$$

mit

$$\begin{aligned} a_i &= -h_i & , & i = 1 \dots n \\ c_1 &= g_n \\ c_i &= -\sum_{j=2}^i h_{n+1-j} c_{i-j+1} + g_{n+1-i} & , & i = 2 \dots n \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$