Zur Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS)

M. Jelali

Forschungsbericht Nr. 11/93

Übersicht: Dieser Forschungsbericht gibt einen Überblick zur Analyse der Beobachtbarkeit zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS). Es werden verschiedene Formen der Beobachtbarkeit mit den zugehörigen Überprüfungskriterien vorgestellt.

Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Abkürzungen

ABKNF	Allgemeine Beobachtbarkeits-Normalform
ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
BLS	Bilineares System
LS	Lineares System
NLS	Nichtlineares System
QLS	Zustandsquadratisches System mit linearer Steuerung

Formelzeichen

$a(x(t))$	Drift-Term eines ALS
A	Systemmatrix
b, B	Eingangsvektor, -matrix
$b(x(t))$	Eingangsvektor eines ALS
c^T	Ausgangsvektor
$c(x(x))$	analytische Ausgangsfunktion
d	Differenzengrad
e_i	Einheitsvektor in der i-ten Koordinatenrichtung
$f(x(t), u(t))$	analytische Systemfunktion
$h_i(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$	kanonische Nichtlinearität
i, j, k	Laufindizes
I_n	Einheitsmatrix
n	Systemordnung
$q(x(t), \bar{u}(t))$	Beobachtbarkeits-Abbildung
$Q_B(x(t), \bar{u}(t))$	Beobachtbarkeits-Matrix
$Q_U(x(t))$	Unterscheidbarkeits-Matrix
t	kontinuierliche Zeit
$u(t)$	kontinuierliche Eingangsgröße
$x(t)$	Zustandsvektor eines kontinuierlichen Systems
$\bar{x}(t)$	transformierter Zustandsvektor ($\bar{x}(t) = z(x(t))$)
x_0	Anfangszustandsvektor
$y(t)$	kontinuierliche Ausgangsgröße
$z(x(t))$	Transformation zur ABKNF
$\gamma(x(t))$	Vektorfunktion

Operatoren und sonstige Zeichen

$\times$	Multiplikation
$\otimes$	Kronecker-Produkt
$\lvert . \rvert$	Betragsbildung
$\lvert\lvert . \rvert\rvert$	Normbildung
$(.)^{-1}$	Inversion
$(.)^T$	Transponieren eines Vektors bzw. einer Matrix
$\bar{(.)}$	transformierte Größe
$\dot{(.)}$	Differentiation nach der Zeit
$(.)\rvert_k$	Wert an der Stelle k
$\frac{\partial}{\partial(.)}$	partielle Differentiation
$\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_x$	Definitionsbereich von u, x
M_f, $\widetilde{M}_f$, N_f	lineare Differentialoperatoren
R^n	reeller Vektorraum der Dimension n
dim (.)	Dimension eines Vektors bzw. einer Matrix
Rang (.)	Rang einer Matrix

1 Einleitende Übersicht

Bei vielen Regelungskonzepten, wie z. B. bei Zustandsregelungen, ist es erforderlich, alle Zustände des betrachteten Systems zu kennen. Sind aus technischen oder ökonomischen Gründen manche Zustände nicht meßbar, dann besteht eine Teilaufgabe der Regelungstechnik darin, geeignete Algorithmen zur Rekonstruktion oder Schätzung dieser Zustandgrößen aus verfügbaren Ein-/Ausgangssignalen zu finden. Sind Störgrößen und Meßgeräusche so gering, daß sie beim Entwurf keine wesentliche Rolle spielen, dann spricht man von einer Beobachtungsaufgabe, deren eindeutige Lösung eine Voraussetzung für den Entwurf von Zustandsbeobachtern ist.

Zustandsbeobachter bestehen aus einer Nachbildung des mathematischen Modells der Regelstrecke und einem Korrekturterm zur Sicherstellung des Abklingens des Schätzfehlers. Für nichtlineare Systeme (NLS) werden üblicherweise lineare Approximations-Modelle als Näherung 1. Ordnung angenommen, die nur in der Umgebung des Arbeitspunktes gelten. So kann die Zustandsschätzung mit dem Luenberger-Identitätsbeobachter gelöst werden (Schwarz 1971 und 1990). Für Bilineare Modelle als Näherung 2. Ordnung wurden ebenfalls geeignete Beobachter ausgelegt und praktisch erprobt werden (Beater 1987, Guo 1991, Dorißen 1991 und Ingenbleek 1991).

Obwohl diese Bemühungen erfolgreich waren, kann bei weitergehend nichtlinearen Systemen eine Bilinearisierung durchaus nicht ausreichen. Deshalb müssen nichtlineare Approximationen mit komplexeren Strukturen aus der Klasse der analytisch linearen Systeme (ALS) untersucht werden. Eine Unterklasse der ALS stellen die zustandsquadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS) dar, die folgende Zustandsdarstellung besitzen:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) &=& A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t) + [b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)] u(t) \\ y(t) &=& c^T x(t) \qquad ; \quad x_0 = x(t_0) \end{array}\right\} . \tag{1.1}$$

Der vorliegende Forschungsbericht gibt einen Überblick zur Beobachtbarkeits-Analyse der QLS als ersten Schritt zur Auslegung von Zustandsbeobachtern für diese Systeme. Basis der Untersuchungen bilden die Arbeiten von Isidori (1989), Schwarz (1991) und Birk (1992). Im folgenden Abschnitt wird die Zustandsdarstellung der QLS angegeben. Im Abschnitt 3 erfolgt zunächst eine Formulierung der Beobachtungsaufgabe für die QLS. Dann werden verschiedene Formen der Beobachtbarkeit vorgestellt. Anschließend werden die Beobachtbarkeitskriterien zur Überprüfung der jeweiligen Beobachtbarkeitsform diskutiert. Abschnitt 4 enthält eine Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit sowie einen Ausblick auf weiterführende Untersuchungen der hier behandelten Thematik.

2 Zustandsdarstellung der QLS

Die zustandsquadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS) stellen eine nichtlineare Unterklasse der analytisch linearen Systeme (ALS) dar. Sie besitzen Zustandsmodelle der allgemeinen Form (Eingrößensysteme) gemäß Gl. (1.1) mit dem Zustandsgrößenvektor $x(t) \in R^n$, der Ausgangsgröße $y(t)$, der Eingangsgröße $u(t)$ und den konstanten Matrizen A_1, A_2, b_0, B_1, B_2, c^T angepaßter Dimension (Tabelle 2.1). Die Struktur solcher Systeme zeigt Bild 2.1.

Systemmatrix	Dimension
A_1, B_1	$n \times n$
A_2, B_2	$n \times n^2$
b_0	$n \times 1$
c^T	$1 \times n$

Tabelle 2.1: Dimensionen der Systemmatrizen

qls0mm3mmBlockschaltbild eines QLS

Zur Vereinfachung der Notation wird das *Kronecker-Produkt* „$\otimes$“ (Rugh 1981) verwendet, das erklärt ist zu: [1]

$$\begin{aligned} x \otimes x &= \left[x_1 x^T, x_2 x^T, \ldots, x_n x^T\right]^T \in R^{n^2} \\ &= \left[x_1^2, x_1 x_2, \ldots, x_1 x_n; x_2 x_1, x_2^2, \ldots, x_2 x_n; \ldots; x_n x_1, x_n x_2, \ldots, x_n^2\right]^T \quad . \end{aligned}$$

Für den Spezialfall $A_2 = \mathbf{0}$ und $B_2 = \mathbf{0}$ geht das QLS nach Gl. (1.1) in ein bilineares System (BLS) über. Ist zusätzlich $B_1 = \mathbf{0}$, dann erhält man ein lineares System (LS).

In der mathematischen Literatur (Frayman 1975, Bose; Cover und Reneke 1991) werden die QLS auch folgendermaßen dargestellt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_1 x(t) + \begin{bmatrix} x^T(t) Q_1 x(t) \\ x^T(t) Q_2 x(t) \\ \vdots \\ x^T(t) Q_n x(t) \end{bmatrix} + [b_0 + B_1 x(t) + \begin{bmatrix} x^T(t) R_1 x(t) \\ x^T(t) R_2 x(t) \\ \vdots \\ x^T(t) R_n x(t) \end{bmatrix}] u(t) \\ &= A_1 x(t) + \sum_{i=1}^{n} e_i x^T(t) Q_i x(t) + [b_0 + B_1 x(t) + \sum_{i=1}^{n} e_i x^T(t) R_i x(t)] u(t) \quad , \end{aligned}$$

wobei e_i der Einheitsvektor in der i-ten Koordinatenrichtung ist und Q_i bzw. R_i die Dimension $n \times n$ haben. Diese Darstellung ist grundsätzlich mit der von Gl. (1.1) identisch. Es werden nur die Zeilen $a_{2,i}$ bzw. $b_{2,i}$; $\quad i = 1, \ldots, n$ der Matrizen A_2 bzw. B_2

$$\begin{aligned} a_{2,i} &= \begin{bmatrix} a_{2,i1} & a_{2,i2} & \ldots & a_{2,in^2} \end{bmatrix} \quad , \\ b_{2,i} &= \begin{bmatrix} b_{2,i1} & b_{2,i2} & \ldots & b_{2,in^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

in die quadratischen Matrizen Q_i bzw. R_i

$$\begin{aligned} Q_i &= \begin{bmatrix} a_{2,i1} & a_{2,i2} & \ldots & a_{2,in} \\ a_{2,i[n+1]} & a_{2,i[n+2]} & \ldots & a_{2,i[2n]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2,i[(n-1)n+1]} & a_{2,i[(n-1)n+2]} & \ldots & a_{2,in^2} \end{bmatrix} \quad , \\ R_i &= \begin{bmatrix} b_{2,i1} & b_{2,i2} & \ldots & b_{2,in} \\ b_{2,i[n+1]} & b_{2,i[n+2]} & \ldots & b_{2,i[2n]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2,i[(n-1)n+1]} & b_{2,i[(n-1)n+2]} & \ldots & b_{2,in^2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

umgeschrieben.

- **Beispiel 2.1** : Für $n = 2$ werden aus

$$A_2 = \begin{bmatrix} a_{2,11} & a_{2,12} & a_{2,13} & a_{2,14} \\ a_{2,21} & a_{2,22} & a_{2,23} & a_{2,24} \end{bmatrix}$$

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren das Zeitargument nicht ständig explizit angegeben.

die Matrizen

$$Q_1 = \begin{bmatrix} a_{2,11} & a_{2,12} \\ a_{2,13} & a_{2,14} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad Q_2 = \begin{bmatrix} a_{2,21} & a_{2,22} \\ a_{2,23} & a_{2,24} \end{bmatrix} \quad .$$

□

Anmerkungen:

- Wie in der Praxis meist üblich ist, wird die Ausgangsgleichung linear angesetzt. Dies stellt keine Einschränkung der Allgemeinheit dar. Man kann zeigen, daß jedes QLS der Ordnung n mit nichtlinearer Meßgleichung $y(t) = c(x)$ in ein ALS der Ordnung $n+1$ überführbar ist, das dann eine lineare Ausgangsgleichung hat (vgl. Anhang A). Dies gilt allgemein auch für ALS (Schwarz 1990).
- Eine direkte Abhängigkeit der Ausgangsgröße $y(t)$ von der Steuerung $u(t)$ wird hier nicht berücksichtigt, da sie bei realen technischen Systemen nicht vorkommt.
- Aus Gründen einer übersichlichen Notation beschränkt sich diese Arbeit auf Eingrößensysteme. Die Erweiterung auf Mehrgrößensysteme ist prinzipiell möglich.

3 Beobachtbarkeits-Analyse der QLS

3.1 Formulierung der Beobachtungsaufgabe

Durch

$$
\begin{aligned}
\dot{x}(t) &= A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t) + [b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)]u(t) \\
y(t) &= c^T x(t) \qquad ; \quad x_0 = x(t_0)
\end{aligned}
$$

wird eine nichtlineare Beobachtungsaufgabe für die QLS definiert, deren Lösung darin besteht, aus den verfügbaren Ausgangsmessungen und der Kenntnis des Eingangssignals den aus physikalischen oder wirtschaftlichen Gründen nicht zu messenden Zustand zu ermitteln. Dazu müssen Zustandsbeobachter ausgelegt werden.

Der Entwurf eines nichtlinearen Beobachters kann analog zum linearen Luenberger-Beobachter in folgenden Schritten vorgenommen werden:

1. Durchführung einer Beobachtbarkeits-Analyse zu Überprüfung der Existenz einer eindeutigen Lösung der Beobachtungsaufgabe.
2. Festlegung der Struktur des Beobachters.
3. Dimensionierung des Beobachters.
4. Analyse der Beobachter-Eigenschaften.

Im Folgenden wird der erste Schritt ausführlich beschrieben. Es wird angenommen, daß die Regelstrecke ungestört und vor allem das Ausgangssignal ohne zusätzliche Störsignale verfügbar ist (Schwarz 1981).

3.2 Formen der Beobachtbarkeit

Im Gegensatz zur linearen Systemtheorie gibt es bei nichtlinearen – und hier auch speziell zustandsquadratischen – Systemen eine Vielzahl von Beobachtbarkeitsdefinitionen (u.a. Hermann und Krener 1977, Isidori 1989, Schwarz 1991, Birk 1992). Die wichtigsten sind:

- globale Beobachtbarkeit,
- lokale Beobachtbarkeit,
- lokale Unterscheidbarkeit und
- Arbeitspunkt-Beobachtbarkeit.

Sie werden in dieser Reihenfolge durch folgende Definitionen erklärt:

Definition 3.1 : (Birk 1992)

Ein QLS nach Gl. (1.1) heißt *global beobachtbar*, wenn jeder Anfangszustand x_0 aus der Kenntnis des Ausgangssignals $y(t)$ und des Eingangssignals $u(t)$ im gesamten Definitionsbereich $\forall x_0 \in \mathcal{D}_x \; ; \; \forall u \in \mathcal{D}_u$ eindeutig bestimmt werden kann.

□

Definition 3.2 : (Birk 1992)

i) Ein QLS nach Gl. (1.1) heißt *lokal beobachtbar in einem Punkt* x_p, wenn jeder Anfangszustand x_0 in einer Umgebung $||x_0 - x_p|| < \rho$ von x_p aus der Kenntnis des Ausgangssignals $y(t)$ und des Eingangssignals $u(t)$ eindeutig rekonstruiert werden kann.

ii) Das QLS heißt *lokal beobachtbar*, wenn die Eigenschaft i) im gesamten Definitionsbereich $\forall x_p \in \mathcal{D}_x \; ; \; \forall u \in \mathcal{D}_u$ erfüllt ist.

□

Definition 3.3 : (Hermann und Krener 1977, Schwarz 1990)

i) Zwei verschiedene Anfangszustände $x_a(0)$ und $x_b(0)$ des QLS nach Gl. (1.1) heißen nicht unterscheidbar, wenn für jedes Eingangssignal $u(t) \in \mathcal{U}$ gilt: $y_a(t) = y_b(t) \quad \forall t \in [0, T]$. Hierbei sind $y_a(t)$ und $y_b(t)$ die Systemantworten für $u(t)$ und $x_a(0)$ bzw. $u(t)$ und $x_b(0)$. T sei eine beliebige, aber feste reelle Zahl.

ii) Das QLS heißt *lokal unterscheidbar* (weich beobachtbar), wenn der Anfangszustand x_0 von allen Nachbarzuständen einer Umgebung $\mathcal{U}_0$ unterscheidbar ist für alle $x_0 \in \mathcal{U}_0$.

□

Definition 3.4 : (Birk 1992)

Ein QLS nach Gl. (1.1) heißt *arbeitspunkt-beobachtbar* (beobachtbar in einem Arbeitspunkt x_s), wenn jeder Anfangszustand x_0 in einer Umgebung $(||x_0 - x_s|| < \varepsilon_x, \; ||u - u_s|| < \varepsilon_u)$ des stationären Arbeitspunktes (x_s, u_s) mit $f(x_s, u_s) = 0$ aus der Kenntnis des Ausgangssignals $y(t)$ und des Eingangssignals $u(t)$ eindeutig ermittelt werden kann.

□

Die Eigenschaft der lokalen Unterscheidbarkeit wird in einigen Literaturstellen (Hermann und Krener 1977, Isidori 1989, Nijmeijer und Van der Schaft 1990, Schwarz 1991) auch als lokale Beobachtbarkeit bzw. schwach/weich lokale Beobachtbarkeit bezeichnet. Letztere ist zwar einfacher zu überprüfen als die lokale Beobachtbarkeit nach Definition 3.2, da sie eine schwächere Systemeigenschaft darstellt. Sie ist aber – wie unten noch gezeigt wird – keineswegs für die Lösung der Beobachtungsaufgabe ausreichend.

3.3 Beobachtbarkeitskriterien

Gegenstand dieses Abschnittes ist die Einführung einiger für eine Beobachtbarkeits-Analyse sehr wichtigen Begriffe der *Beobachtbarkeits-Abbildung*, der *Beobachtbarkeits-Matrix*, der *Unterscheidbarkeits-Matrix* und der *Arbeitspunkt-Beobachtbarkeitsmatrix* eingeführt. Basierend darauf werden algebraische Kriterien zur Überprüfung der im vorigen Abschnitt angegebenen Beobachtbarkeitsformen behandelt. Zur Vereinfachung der Notation werden an entsprechenden Stellen folgende Abkürzungen verwendet:

$$\begin{aligned} a(x) &= A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t) \\ b(x) &= b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t) \\ f(x,u) &= a(x) + b(x) u(t) \end{aligned}$$

und (Jelali 1993)

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\otimes^0 &= x(t) \otimes x(t) \;\; \in R^{n^2} \\ \mathcal{K}_\otimes^1 &= \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{K}_\otimes^0 \;\; \in R^{n^2 \times n} \\ \mathcal{K}_\otimes^2 &= \frac{\partial}{\partial x} \mathcal{K}_\otimes^1 = \text{const.} \quad \forall\, x \in R^n \;\; ; \;\; \mathcal{K}_\otimes^2 \in R^{n^2 \times n^2} \quad . \end{aligned}$$

3.3.1 Globale Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeits-Abbildung

Zur Untersuchung der globalen Beobachtbarkeit wird die Beobachtbarkeits-Abbildung benötigt, die den Systemzustand und das Eingangssignal auf das Ausgangssignal abbildet. Diese erhält man, indem z. B. [2] das Ausgangssignal $y(t)$ unter Einbeziehung der Gl. (1.1) $(n-1)$-mal abgeleitet wird und die Ableitungen zu einem Vektor zusammengefaßt werden (Kou, Elliot und Tarn 1973):

$$q(x,\bar{u}) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c^T x(t) \\ c^T \dot{x}(t) \\ \vdots \\ c^T x^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$$

[2] Verschiedene Methoden zur Konstruktion der Beobachtbarkeits-Abbildung findet man in Brandin, Kostyukovskii und Razorenov (1976).

$$\bar{u}(t) = [u(t), \dot{u}(t), \ldots, u^{(n-2)}(t)]^T \quad . \tag{3.1}$$

Führt man den linearen Differentialoperator M_f

$$\begin{aligned} M_f \gamma(x) &= \frac{\partial \gamma(x)}{\partial x} f(x,u) + \frac{\partial \gamma(x)}{\partial \bar{u}} \dot{\bar{u}}(t) \quad , \\ M_f^k \gamma(x) &= M_f(M_f^{k-1} \gamma(x)) \qquad \text{mit} \qquad M_f^0 \gamma(x) = \gamma(x) \end{aligned}$$

ein, dann kann die Beobachtbarkeits-Abbildung in kompakter Form geschrieben werden:

$$q(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} M_f^0 \\ M_f \\ \vdots \\ M_f^{n-1} \end{bmatrix} c^T x(t) \quad . \tag{3.2}$$

Die Beobachtbarkeits-Abbildung liefert eine Aussage darüber, inwieweit der Zustandsvektor aus dem Eingangssignal $u(t)$, dem Ausgangssignal $y(t)$ und deren zeitlichen Ableitungen rekonstruiert werden kann. Dies macht die Überprüfung der eindeutigen Invertierbarkeit des nichtlinearen Gleichungssystems (3.2) erforderlich (Birk 1992).

Satz 3.1 : (Birk und Zeitz 1990, Birk 1992)

> Ein QLS nach Gl. (1.1) ist *global beobachtbar*, wenn die Beobachtbarkeits-Abbildung $q(x, \bar{u})$ nach Gl. (3.2) im gesamten Definitionsbereich $\forall x \in \mathcal{D}_x$; $\forall \bar{u} \in \mathcal{D}_u^n$ eindeutig nach x aufgelöst werden kann.

□

Für die QLS nach Gl. (1.1) gilt:

$$\begin{aligned} y(t) &= c^T x(t) \\ \dot{y}(t) &= c^T [A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t)] + c^T [b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)] u(t) \\ \ddot{y}(t) &= c^T [A_1 + B_1 u(t)] \times \\ & \times [A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t) + (b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)) u(t)] + \\ & + c^T [A_2 + B_2 u(t)] \times \\ & \times [(A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t) + (b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)) u(t)) \otimes x(t) + \\ & + x(t) \otimes (A_1 x(t) + A_2 x(t) \otimes x(t) + (b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)) u(t))] + \\ & + c^T [b_0 + B_1 x(t) + B_2 x(t) \otimes x(t)] \dot{u}(t) \quad . \end{aligned}$$

Es werden zur besseren Übersicht nur die ersten 3 Komponenten der Beobachtbarkeits-Abbildung betrachtet. Die Hinzunahme weiterer Komponenten liefert unübersichtliche Ausdrücke.

Während bei LS und BLS die Beobachtbarkeits-Abbildung linear bezüglich des Zustandes ist, treten bei QLS bereits ab der zweiten Zeile nichtlineare (mindestens quadratische) Terme in $x(t)$ auf. Dazu kommt die Abhängigkeit vom Eingangssignal und dessen Zeitableitungen, deren Anzahl vom sog. Differenzengrad bestimmt wird (vgl. Abschnitt 3.3.2).

– **Beispiel 3.1** : Betrachtet wird die bekannte Räuber-Beute-Beziehung (Keller 1986), die ein QLS nach Gl. (1.1) darstellt. Die Systemmatrizen lauten:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \; ; \; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \\ B_2 &= \mathbf{0} \; ; \; b_0 = \mathbf{0} \; ; \; c^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{B3.1-1}$$

Die Konstanten a, b, c, d und e seien alle von Null verschieden. Der Definitionsbereich sei durch $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $u \geq 0$ festgelegt. Die Beobachtbarkeits-Abbildung ergibt sich zu:

$$q(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ -dx_2(t) + cx_1(t)x_2(t) - ex_2(t)u(t) \end{bmatrix} \tag{B.3.1-2}$$

Gl. (B3.1-2) läßt sich eindeutig invertieren:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{c}\left[\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} + d + eu(t)\right] \\ y(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{B 3.1-3}$$

Damit ist das betrachtete QLS für $y(t) \neq 0$ im gesamten Definitionsbereich global beobachtbar.

□

Da die mathemathischen Verfahren zur Überprüfung der Invertierbarkeit des Gleichungssystems (3.2) aufwendig und nur in Spezialfällen bekannt sind (Birk und Zeitz 1990), ist es sinnvoll, vor Anwendung solcher Verfahren zu versuchen, das zu untersuchende System in eine Normalform (NF) zu überführen, bei der die globale Beobachtbarkeit direkt gegeben ist. Eine solche NF ist die allgemeine Beobachtbarkeits-Normalform (ABKNF) nach Gauthier und Bornard (1981).

Allgemeine Beobachtbarkeits-Normalform

Von Gauthier und Bornard (1981) wird eine ABKNF angegeben, bei der die globale Beobachtbarkeit direkt erkennbar ist. Die ABKNF besitzt die Zustandsdarstellung

$$\left.\begin{array}{rcl}\dot{\bar{x}}(t) & = & \bar{f}(\bar{x}) + \bar{g}(\bar{x})u(t) \\ & = & \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \\ \bar{F}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{g}_1(\bar{x}_1) \\ \bar{g}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2) \\ \vdots \\ \bar{g}_{n-1}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-1}) \\ \bar{g}_n(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-1},\bar{x}_n) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) & = & \bar{x}_1(t) \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

Für Systeme, die direkt in dieser Normalform vorliegen oder in diese überführbar sind, läßt sich die Beobachtbarkeits-Abbildung angeben zu

$$\bar{q}(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) + \bar{h}_1(\bar{x}_1,u) \\ \bar{x}_3(t) + \bar{h}_2(\bar{x}_1,\bar{x}_2,u,\dot{u}) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) + \bar{h}_{n-1}(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_{n-1},u,\ldots,u^{(n-2)}) \end{bmatrix} \quad . \tag{3.5}$$

Gl. (3.5) kann unabhängig vom Eingangssignal und von den Nichtlinearitäten $\bar{h}_i$ nach x (sukzessive von oben nach unten) aufgelöst werden. Dies liegt an der Dreiecksabhängigkeit der Beobachtbarkeits-Abbildung von den Zuständen x_i. Damit ist die globale Beobachtbarkeit direkt gegeben.

Satz 3.2 :

QLS, die in der ABKNF nach Gl. (3.4) vorliegen oder sich in diese überführen lassen, sind *direkt* global beobachtbar.

□

Die Überführung des Systems in die ABKNF kann anhand der Transformation

$$\bar{x}(t) = z(x) = \begin{bmatrix} \widetilde{M}_a^0 \\ \widetilde{M}_a \\ \vdots \\ \widetilde{M}_a^{n-1} \end{bmatrix} c^T x(t) \tag{3.6}$$

mit

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{M}_a\gamma(x) & = & \dfrac{\partial\gamma(x)}{\partial x}a(x) \quad , \\ \widetilde{M}_a^k\gamma(x) & = & \widetilde{M}_a(\widetilde{M}_a^{k-1}\gamma(x)) \qquad \text{mit} \quad \widetilde{M}_a^0\gamma(x) = \gamma(x) \end{array}$$

durchgeführt werden. Dadurch ist die Dreiecksstruktur des Vektors $\bar{g}(\bar{x})$ jedoch nicht garantiert.

Differenzengrad $d = n$

Definition 3.5 : (Schwarz 1991)
Der Differenzengrad d eines QLS ist gleich der Anzahl der zeitlichen Ableitungen $y^{(d)} = d^d y(t)/dt^d$, bei der die Steuergröße u(t) erstmalig explizit auftaucht.
□

Ein spezieller, aber sehr wichtiger Sonderfall ist der Differenzengrad $d = n$. Er ist nämlich bei vielen technischen Systemen der Normalfall und zwar immer dann, wenn Speicher in Kaskaden angeordnet sind, die Stellgröße nur auf den ersten Speicher wirkt und keine Signalverbindungen zum Ausgang hin gerichtet sind. Beispiele dazu sind Gleichstrom-Motoren und elektrohydraulische Antriebe (Schwarz 1992).

Für QLS mit $d = n$ führt die Transformation nach Gl. (3.6) auf die Isidori-Normalform

$$\left.\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \vdots \\ \bar{x}_n(t) \\ \bar{F}(\bar{x}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{G}(\bar{x}) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \bar{x}_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

mit

$$\bar{F}(\bar{x}) = \widetilde{M}_a^d c^T z^{-1}(\bar{x}) \tag{3.8}$$
$$\bar{G}(\bar{x}) = \widetilde{M}_b \widetilde{M}_a^{d-1} c^T z^{-1}(\bar{x}) \quad . \tag{3.9}$$

In diesem Fall ist die Dreiecksstruktur des Vektors $\bar{g}(\bar{x})$ und damit auch die globale Beobachtbarkeit immer gewährleistet. Für QLS mit linearem Drift-Term ($A_2 = \mathbf{0}$) wird

$$\bar{F}(\bar{x}) = c^T A_1^d z^{-1}(\bar{x}) \tag{3.10}$$
$$\bar{G}(\bar{x}) = c^T A_1^{d-1}[B_2 z^{-1}(\bar{x}) \otimes z^{-1}(\bar{x}) + B_1 z^{-1}(\bar{x}) + b_0] \tag{3.11}$$

aus den Gln. (3.8) und (3.9).

* **Beispiel 3.2** : Das QLS aus Beispiel 3.1 hat wegen

$$\begin{aligned} y(t) &= x_2(t) \\ \dot{y}(t) &= -dx_2(t) + cx_1(t)x_2(t) - ex_2(t)u(t) \end{aligned}$$

den Differenzengrad $d = 1$. Die hierfür notwendige Transformation zur ABKNF lautet

$$\bar{x}(t) = z(x) = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ cx_1(t)x_2(t) - dx_2(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{B 3.2-1}$$

Das transformierte QLS ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \bar{x}_2(t) \\ \frac{\bar{x}_2^2(t)}{\bar{x}_1(t)} + [a - b\bar{x}_1(t)][\bar{x}_2(t) + d\bar{x}_1(t)] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e\bar{x}_1(t) \\ -e\bar{x}_2(t) \end{bmatrix} & \text{(B 3.2-2)} \\ y(t) &= \bar{x}_1(t) \quad . & \text{(B 3.2-3)} \end{aligned}$$

Die Beobachtbarkeits-Abbildung lautet in den transformierten Koordinaten

$$\bar{q}(\bar{x}, \bar{u}) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) - e\bar{x}_1(t)u(t) \end{bmatrix} \tag{B 3.2-4}$$

und läßt sich eindeutig invertieren:

$$\begin{bmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) + ey(t)u(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{B 3.2-5}$$

Damit ist das betrachtete QLS im gesamten Definitionsbereich global beobachtbar.

□

3.3.2 Lokale Beobachtbarkeit

Beobachtbarkeits-Matrix

Die Beobachtbarkeitsmatrix $Q_B(x, \bar{u})$ ist definiert als Jakobimatrix der Beobachtbarkeitsabbildung $q(x, \bar{u})$ nach Gl. (3.2) (Brandin, Kostyukovskii und Razorenov 1976):

$$Q_B(x, \bar{u}) = \frac{\partial q(x, \bar{u})}{\partial x} \quad . \tag{3.6}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix kann ebenfalls anhand des Differentialoperators (Birk und Zeitz 1988)

$$\begin{aligned} N_f \gamma(x) &= \gamma(x) \frac{\partial f(x, u)}{\partial x} + f^T(x, u) \frac{\partial \gamma^T(x)}{\partial x} + \dot{\bar{u}}^T(t) \left[\frac{\partial \gamma^T(x)}{\partial \bar{u}} \right]^T \quad , \\ N_f^k \gamma(x) &= N_f(N_f^{k-1} \gamma(x)) \qquad \text{mit} \quad N_f^0 \gamma(x) = \gamma(x) \end{aligned}$$

in der Form

$$Q_B(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} N_f^0 \\ N_f \\ \vdots \\ N_f^{n-1} \end{bmatrix} c^T \quad . \tag{3.7}$$

dargestellt werden.

Satz 3.3 : (Birk 1992)

Ein QLS nach Gl. (1.1) ist *lokal beobachtbar*, wenn die Beobachtbarkeits-Matrix $Q_B(x, \bar{u})$ nach Gl. (3.7) im gesamten Definitionsbereich $\forall x \in \mathcal{D}_x$; $\forall \bar{u} \in \mathcal{D}_u^n$ den vollen Rang

$$\text{Rang } Q_B(x, \bar{u}) = n \quad ; \ \forall x \in \mathcal{D}_x \ ; \ \forall \bar{u} \in \mathcal{D}_u^n \tag{3.8}$$

hat.

□

Aus Satz 3.3 geht lediglich hervor, daß die Rangbedingung gemäß Gl. (3.6) eine *hinreichende* Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit eines QLS darstellt. Ist diese Bedingung in einem Gebiet des Zustandsraumes bzw. des Definitionsbereiches nicht erfüllt, kann durch Hinzunahme von höheren Ableitungen von $y(t)$ bzw. höheren Potenzen N_f die lokale Beobachtbarkeit im gesamten Zustandsraum nachgewiesen werden. Denn bei quadratischen Systemen kann der Satz von Cayley-Hamilton nicht angewendet werden und damit können höhere Zeitableitungen $y^{(k)}(t)$ mit $k \geq n$ evtl. zusätzliche Informationen darüber geben, ob das Gebiet der lokalen Beobachtbarkeit größer ist (vgl. Beispiel 3.4).

Die Beobachtbarkeitsmatrix $Q_B(x, \bar{u}) = [q_0(x, \bar{u}), q_1(x, \bar{u}), \ldots, q_{n-1}(x, \bar{u})]^T$ läßt sich für die QLS zeilenweise angeben zu:

$$
\begin{aligned}
q_0(x, \bar{u}) &= c^T \\
q_1(x, \bar{u}) &= c^T[A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1] + c^T[B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1]u(t) \\
q_2(x, \bar{u}) &= c^T[A_1 + B_1 u(t)][A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1 + (B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1)u(t)] + \\
&\quad + c^T[A_2 + B_2 u(t)][(A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1 + (B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1)u(t)) \otimes x(t) + \\
&\quad + (A_1 x(t) + A_2\mathcal{K}_\otimes^0 + (b_0 + B_1 x(t) + B_2\mathcal{K}_\otimes^0)u(t)) \otimes I_n + \\
&\quad + I_n \otimes (A_1 x(t) + A_2\mathcal{K}_\otimes^0 + (b_0 + B_1 x(t) + B_2\mathcal{K}_\otimes^0)u(t)) + \\
&\quad + x(t) \otimes (A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1 + (B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1)u(t))] + \\
&\quad + c^T[B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1]\dot{u}(t) \quad .
\end{aligned}
$$

Bereits an der 2. Zeile von $Q_B(x, \bar{u})$ ist zu erkennen, daß die Eigenschaft lokale Beobachtbarkeit für QLS von Eingangssignal *und* Zustandsvektor abhängt. Diese Abhängigkeit wird ab der 3. Zeile sehr kompliziert, so daß keine allgemeinen Aussagen über den Rang von $Q_B(x, \bar{u})$ gemacht werden können. Mögliche Vereinfachungen ergeben sich durch Betrachtung des Differenzengrades d.

Sonderfall $A_2 = \mathbf{0}$, $d = n$:

Für QLS mit linearem Drift-Term ($A_2 = \mathbf{0}$) und $d = n$ vereinfacht sich die Untersuchung der lokalen Beobachtbarkeit erheblich. Dies folgt daraus, daß die Beobachtbarkeitsabbildung nur die ersten $n - 1$ Ableitungen der Ausgangsgröße $y(t)$ enthält. Daher entfällt die Abhängigkeit der lokalen Beobachtbarkeitsmatrix von Eingangssignal und Zustandsvektor, so daß sich $Q_B(x, \bar{u})$ auf die Beobachtbarkeitsmatrix Q_L des linearen Teilsystems reduziert:

$$Q_B(x,\bar{u}) = Q_L \quad = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A_1 \\ \vdots \\ c^T A_1^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{für} \quad d = n \quad . \tag{3.9}$$

- **Beispiel 3.3** : Für das QLS nach Gl. (B3.1-1) errechnet sich die Beobachtbarkeits-Matrix zu

$$Q_B(x,\bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ cx_2(t) & cx_1(t) - d - eu(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{B 3.3-1}$$

Damit gilt:

$$\text{Rang } Q_B(x,\bar{u}) = 2 = n \qquad \text{für} \qquad x_2 \neq 0 \quad . \tag{B 3.3-2}$$

Das System ist im gesamten Definitionsbereich lokal beobachtbar.

□

- **Beispiel 3.4** : Gegeben sei das QLS

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2^2(t) - u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2^2(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}\right\} \tag{B 3.4-1}$$

Wegen

$$\begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2^2(t) - u(t) \end{bmatrix} \quad , \tag{B 3.4-2}$$

ist der Zustand $x_2(t)$

$$x_2(t) = \pm\sqrt{\dot{y}(t) + u(t)}$$

nicht eindeutig aus $\dot{y}(t)$ und $u(t)$ bestimmbar. Nimmt man jedoch die zweite Ableitung von $y(t)$

$$\ddot{y}(t) = 2x_2^3(t) - u(t)$$

hinzu, dann läßt sich der Zustandsvektor aus $y(t)$, $\ddot{y}(t)$ und $u(t)$ im gesamten Zustandsraum ermitteln. Das QLS ist damit global beobachtbar.

□

Auch bei der Untersuchung der lokalen Beobachtbarkeit ist die durch Gl. (3.4) definierte ABKNF von besonderem Interesse. Für ein QLS dieser Form gilt nämlich wegen Gl. (3.5)

$$\bar{Q}_B(\bar{x},\bar{u}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \frac{\partial \bar{h}_1}{\partial \bar{x}_1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{x}_1} & \frac{\partial \bar{h}_2}{\partial \bar{x}_2} & 1 & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 0 \\ \frac{\partial \bar{h}_{n-1}}{\partial \bar{x}_1} & \dots & & \frac{\partial \bar{h}_{n-1}}{\partial \bar{x}_{n-1}} & 1 \end{bmatrix} . \tag{3.3}$$

Die Beobachtbarkeitsmatrix nach Gl. (3.3) hat unabhängig vom Eingangssignal und von den Nichtlinearitäten $\bar{h}_i$ den vollen Rang. Damit ist auch die lokale Beobachtbarkeit direkt gegeben und Satz 3.2 kann so erweitert werden:

Satz 3.4 :

QLS, die in der ABKNF nach Gl. (3.4) vorliegen oder sich in diese überführen lassen, sind *direkt* global und lokal beobachtbar.

□

Das Konzept der ABKNF hat den Vorteil, daß es im Gegensatz zu Satz 3.3 eine notwendige *und* hinreichende Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit des Systems liefert, da gilt:

Satz 3.5 : (Gauthier und Bornard 1981)

Ein QLS ist genau dann im gesamten Definitionsbereich lokal beobachtbar, wenn dort eine eindeutig umkehrbare Transformation existiert, die das System in die ABKNF nach Gl. (3.4) überführt.

□

Anmerkungen:

- Wenn die Transformation zur ABKNF nur in einem bestimmten Gebiet des Zustandsraumes existiert, dann ist das QLS in diesem Gebiet direkt global und lokal beobachtbar.
- Die lokale Beobachtbarkeit im gesamten Definitionsbereich stellt bei QLS keine hinreichende Bedingung für die globale Beobachtbarkeit dar; es gibt also QLS, die in einem bestimmten Gebiet des Zustandsraumes zwar lokal, dort aber nicht global beobachtbar sind (vgl. Beispiel 3.5).
- Bei zustandsaffinen Systemen, zu denen die LS und BLS gehören, sind die Kriterien für die globale und lokale Beobachtbarkeit wegen der Linearität der Beobachtbarkeits-Abbildung bezüglich $x(t)$ identisch (Birk 1992, Ingenbleek 1993).

Beispiel 3.5 : Für das QLS

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t)x_2(t) - x_2^2(t)u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_2(t) + x_1^2(t) + u(t) \\ y(t) &= x_2(t) \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 3.5-1)}$$

lautet die Beoabachtbarkeits-Abbildung

$$q(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_2(t) + x_1^2(t) + u(t) \end{bmatrix} \quad , \qquad \text{(B 3.5-2)}$$

woraus

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\dot{y}(t) - y(t) - u(t)} \\ y(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(B 3.5-3)}$$

folgt. Die Beoabachtbarkeits-Abbildung ist nicht eindeutig invertierbar und das System damit nicht global beobachtbar. Die Beobachtbarkeits-Matrix ergibt sich zu

$$Q_B(x, \bar{u}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2x_1(t) & 1 \end{bmatrix} \quad . \qquad \text{(B 3.5-4)}$$

Das System ist für $x_1 \neq 0$ überall lokal beobachtbar.

□

3.3.3 Lokale Unterscheidbarkeit

Unterscheidbarkeits-Matrix

Die Unterscheidbarkeits-Matrix $Q_U(x)$ kann mit Hilfe der Vorschrift (Isidori 1989)

$$Q_U(x) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} Q_0(x) \\ Q_1(x) \\ \vdots \\ Q_{n-1}(x) \end{bmatrix} \qquad (3.5)$$

mit

$$\begin{aligned} Q_0(x) &= c^T x(t) \\ Q_i(x) &= \begin{bmatrix} M_a \\ M_b \end{bmatrix} Q_{i-1}(x) \quad ; \quad i = 1, \ldots, n-1 \end{aligned}$$

gebildet werden.

Satz 3.6 : (Schwarz 1991)

Ein QLS nach Gl. (1.1) ist *lokal unterscheidbar*, wenn die Unterscheidbarkeits-Matrix $Q_U(x)$ nach Gl. (3.5) im gesamten Definitionsbereich $\forall x \in \mathcal{D}_x$ den Rang n

$$\text{Rang } Q_U(x) = n \quad ; \forall x \in \mathcal{D}_x \qquad (3.6)$$

besitzt.

□

Für QLS 3. Ordnung ergibt sich die Unterscheidbarkeits-Matrix zu

$$Q_U(x) \;=\; c^T \begin{bmatrix} I_n \\ A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1 \\ B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1 \\ A_2\mathcal{K}_\otimes^2\left[A_1x(t) + A_2\mathcal{K}_\otimes^0\right] + \left[A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1\right]^2 \\ B_2\mathcal{K}_\otimes^2\left[A_1x(t) + A_2\mathcal{K}_\otimes^0\right] + \left[B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1\right]\left[A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1\right] \\ A_2\mathcal{K}_\otimes^2\left[b_0 + B_1x(t) + B_2\mathcal{K}_\otimes^0\right] + \left[A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1\right]\left[B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1\right] \\ B_2\mathcal{K}_\otimes^2\left[b_0 + B_1x(t) + B_2\mathcal{K}_\otimes^0\right] + \left[B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1\right]^2 \end{bmatrix}$$

$Q_U(x)$ besitzt die Dimension $(2^n - 1) \times n$ und hängt nicht vom Eingangssignal ab. Dies hat den Nachteil, daß dadurch Beobachtbarkeits-Lücken, die durch bestimmte Eingangssignale hervorgerufen werden, nicht erkannt werden können (vgl. Beispiel 3.6). Daher ist die Untersuchung der lokalen Beobachtbarkeit unumgänglich. Die Eigenschaft der lokalen Unterscheidbarkeit eignet sich somit nicht für die Lösung der Beobachtungsaufgabe. Dennoch ist sie für Aufgabenstellungen der Minimalrealisierung und Systemidentifikation von großer Bedeutung (Dorißen 1990, Schwarz 1991).

Beispiel 3.6 : Für das QLS

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ B_2 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;;\; b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \;;\; c^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad \text{(B 3.6-1)}$$

läßt sich die Unterscheidbarkeits-Matrix zu

$$Q_U \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(B 3.6-2)}$$

berechnen. Da

$$\text{Rang } Q_U \;=\; 2 = n \qquad \text{(B 3.6-3)}$$

gilt, ist das betrachtete QLS im gesamten Zustandsraum lokal unterscheidbar. Dagegen kann man der Beobachtbarkeits-Matrix

$$Q_B(x, \bar{u}) \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & u - 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(B 3.6-4)}$$

entnehmen, daß das System für das Eingangssignal $u = 1$ nicht lokal beobachtbar ist.

□

Anmerkung:
Die Unterscheidbarkeit ist eine notwendige Bedingung für die lokale Beobachtbarkeit (Birk 1992, Ingenbleek 1993). Ist also ein QLS nicht lokal unterscheidbar, dann erübrigt sich die Untersuchung der lokalen Beobachtbarkeit.

3.3.4 Arbeitspunkt-Beobachtbarkeit

Arbeitspunkt-Beobachtbarkeitsmatrix

Zur Bildung der Arbeitspunkt-Beobachtbarkeitsmatrix Q_{Bs} wird Gl. (1.1) um den stationären Arbeitspunkt (x_s, u_s) linearisiert:

$$A = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial x}\right|_{x_s,u_s} = \left[A_1 + A_2\mathcal{K}_\otimes^1 + (B_1 + B_2\mathcal{K}_\otimes^1)u(t)\right]\Big|_{x_s,u_s} \quad (3.5)$$

$$b = \left.\frac{\partial f(x,u)}{\partial u}\right|_{x_s,u_s} = \left[b_0 + B_1 x(t) + B_2\mathcal{K}_\otimes^0\right]\Big|_{x_s,u_s} \quad . \quad (3.6)$$

Das linearisierte System lautet dann

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + bu(t) \\ y(t) &= c^T x(t) \qquad ; \quad x_0 = x(t_0) \end{aligned}\right\} . \quad (3.7)$$

Hierzu gehört die Arbeitspunkt-Beobachtbarkeitsmatrix

$$Q_{Bs} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \\ \vdots \\ c^T A^{n-1} \end{bmatrix} \quad . \quad (3.8)$$

Satz 3.7 : (Birk 1992)
Ein QLS nach Gl. (1.1) ist *arbeitspunkt-beobachtbar* in (x_s, u_s), wenn die Beobachtbarkeits-Matrix Q_{Bs} in diesem Punkt den vollen Rang

$$\text{Rang } Q_{Bs} = n \quad (3.9)$$

besitzt.

□

Wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $Q_B(x, \bar{u})$ zuvor berechnet wurde, kann Q_{Bs} aus

$$Q_{Bs} = Q_B(x, \bar{u})|_{x_s,u_s} \quad (3.10)$$

bestimmt werden. Dies bedeutet, daß für ein im gesamten Definitionsbereich lokal beobachtbares QLS auch die Arbeitspunkt-Beobachtbarkeit gegeben ist.

Beispiel 3.7 : Für das QLS nach Gl. (B3.1-1) folgt aus $f(x_s, u_s) = \mathbf{0}$ und $u_s = 0$ der stationäre Punkt $x_s = \begin{bmatrix} \frac{d}{c} & \frac{a}{b} \end{bmatrix}^T$, wofür das zugehörige linearisierte System die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{(B 3.7-1)}$$

besitzt. Die Arbeitspunkt-Beobachtbarkeits-Matrix lautet:

$$Q_{Bs} = \begin{bmatrix} c^T \\ c^T A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad . \qquad \text{(B 3.7-2)}$$

Das System ist also in x_s arbeitspunkt-beobachtbar.

□

4 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit [3] beschäftigt sich mit der Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung, die eine nichtlineare Unterklasse der analytisch linearen Systeme darstellen. Diese Analyse stellt den ersten Schritt beim Entwurf von Zustandsbeobachtern dar.

Zur Lösung der Beobachtungsaufgabe werden aus der Vielzahl der in der Literatur angegebenen Beobachtbarkeitsformen für nichtlineare Systeme die wichtigsten vier ausgewählt und auf die QLS spezialisiert. Diese sind die globale Beobachtbarkeit, die lokale Beobachtbarkeit, die lokale Unterscheidbarkeit und die Arbeitspunkt-Beobachtbarkeit. Grundlage der Überprüfung dieser Beobachtbarkeitsformen bildet das Konzept der Beobachtbarkeits-Abbildung, wobei diese für die QLS in komplizierter Weise vom Eingangssignal und dem Systemzustand abhängt. Eine mögliche Vereinfachung kann sich in Abhängigkeit des Differenzengrades ergeben. Einen wichtigen Sonderfall stellen die QLS mit vollem Differenzengrad $d = n$ dar.

Zum Nachweis der globalen Beobachtbarkeit muß die Beobachtbarkeits-Abbildung invertiert werden. Für die Überprüfung der übrigen Beobachtbarkeitsformen ist eine Ranguntersuchung der jeweiligen charakteristischen Matrix erforderlich.

Es hat sich gezeigt, daß es sehr günstig ist, die QLS in eine allgemeine Beobachtbarkeits-Normalform zu überführen, bei der sowohl die globale als auch die lokale Beobachtbarkeit direkt gegeben ist. Dadurch wird die Anwendung komplizierter und strenger mathematischer Überprüfungsverfahren vermieden.

Zukünftige Arbeiten werden sich mit der rechnergestützten Beobachtbarkeits-Analyse mit Hilfe der symbolverarbeitenden Programmiersprache MACSYMA beschäftigen. Auf der Basis dieser Beobachtbarkeits-Analyse kann dann die Beobachtersynthese erfolgen. Ein weiterer interessanter Aufgabenpunkt besteht darin, Parameterschätzverfahren zur Identifikation zustandsquadratischer Approximationsmodelle vor allem in kanonischen Formen (Allgemeine Beobachtbarkeits-Normalform, Nichtlineare Beobachter-Normalform) zu entwickeln.

[3] Die Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes „Zustands- und Parameterschätzung bei analytischen Systemen mit linearer Steuerung“.

5 Literaturverzeichnis

Beater, P. 1987. *Zur Regelung nichtlinearer Systeme mit Hilfe bilinearer Modelle.* Diss. Universität -GH- Duisburg, VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 143. Düsseldorf: VDI-Verlag.

Birk, J. und M. Zeitz. 1988. Extended Luenberger observer for nonlinear multivariable systems. *International Journal of Control* 47. 1823-1836.

Birk, J. und M. Zeitz. 1990. Anwendung eines symbolverarbeitenden Programmsystems zur Analyse und Synthese von Beoabchtern für nichtlineare Systeme. *messen-steuern-regeln* 12. 536-543.

Birk, J. 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben.* Diss. Universität Stuttgart. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 294. Düsseldorf: VDI-Verlag.

Bose, A. K., A. S. Cover und J. A. Reneke 1991. On point - dissipative systems of differential equations with quadratic nonlinearity. *International Journal of Mathematics & Mathematical Sciences* 14. 99-110.

Brandin, V. N., Y. M. L. Kostyukovskii und G. N. Razorenov 1976. Global observability conditions for nonlinear dynamic systems. *Automation and Remote Control* 36. 1585-1591.

Dorißen, H. T. 1990. *Zur Minimalrealisierung und Identifikation bilinearer Systeme durch Markovparameter.* Diss. Universität -GH-Duisburg. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 221. Düsseldorf: VDI-Verlag.

Dorißen, H. T. 1991. *Statistische Ausgangssignalanalyse bilinearer Systeme und Anwendungen.* Forschungsbericht 7/91 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Frayman, M. 1975. On the relationship between bilinear and quadratic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-20. 567-568.

Gauthier, J. P. und G. Bornard. 1981. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-26. 922-926.

Guo, L. 1991. *Zur Regelung bilinearer Systeme am Beispiel hydraulischer Antriebe.* Diss. Universität -GH- Duisburg, VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 245. Düsseldorf: VDI-Verlag.

Hermann, R. und A. J. Krener. 1977. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-22. 728-740.

Ingenbleek, R. 1991. *Zustandsbeobachter und Schätzfilter für eine Klasse analytisch linearer Systeme.* Forschungsbericht 14/91 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Ingenbleek, R. 1993. *Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf für zeitdiskrete nichtlineare Systeme.* Forschungsbericht 3/93 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems: An Introduction.* Second Edition. Berlin u.a.: Springer.

Jelali, M. 1993. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Diplomarbeit MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Keller, H. 1986. Entwurf nichtlinearer, zeitinvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. *Automatisierungstechnik* 34. 271-274 und 326-331.

Kou, S. R., D. L. Elliot und T. J. Tarn. 1973. Observability of nonlinear systems. *Information and Control* 22. 89-99.

Nijmeijer, H. und A. J. van der Schaft. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* Berlin u.a.: Springer.

Rugh, W. J. 1981. *Nonlinear System Theory: The Volterra/Wiener Approach.* Baltimore, London: The Johns Hopkins University Press.

Schwarz, H. 1971. *Mehrfachregelungen II.* Berlin: Springer.

Schwarz, H. 1981. *Optimale Regelung und Filterung.* Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg.

Schwarz, H. 1990. *ALS-Beobachter und Filter.* Forschungsbericht 7/90 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme.* München, Wien: R. Oldenbourg.

A QLS mit nichtlinearer Ausgangsgleichung

Ein QLS mit nichtlinearer Ausgangsgleichung weist die Zustandsdarstellung

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & A_1x(t) + A_2x(t)\otimes x(t) + [b_0 + B_1x(t) + B_2x(t)\otimes x(t)]u(t) \\ y(t) & = & c(x(t)) \qquad ; \quad x_0 = x(t_0) \end{array}\right\} \quad \text{(A.1)}$$

auf. Erweitert man den Zustandsvektor $x(t)$ um die skalare Größe $y(t)$, dann entsteht der neue Zustandsvektor

$$z(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \in R^{n+1} \quad . \qquad \text{(A.2)}$$

Aus Gl. (A.2) folgt:

$$x(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ \vdots & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{n\times n+1} z(t) = I_{n,n+1}z(t) \qquad \text{(A.3)}$$

$$y(t) = [\ \underbrace{0\ \dots\ 0}_{n-\text{mal}}\ 1\ ]\ z(t) = \tilde{c}^T z(t) \quad . \qquad \text{(A.4)}$$

Mit Gl. (A.1) und

$$\dot{y}(t) = \frac{\partial c(x)}{\partial x}\dot{x}(t) = c_x(x)\dot{x}(t) \qquad \text{(A.5)}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \dot{z}(t) &= \begin{bmatrix} A_1x(t) + A_2x(t)\otimes x(t) \\ c_x(x)[A_1x(t) + A_2x(t)\otimes x(t)] \end{bmatrix} + \\ &\quad + \begin{bmatrix} b_0 + B_1x(t) + B_2x(t)\otimes x(t) \\ c_x(x)[b_0 + B_1x(t) + B_2x(t)\otimes x(t)] \end{bmatrix} u(t) && \text{(A.6)} \\ &= \tilde{a}(x) + \tilde{b}(x)u(t) \quad . && \text{(A.7)} \end{aligned}$$

Setzt man Gl. (A.3) in Gl. (A.6) ein, dann ergibt sich

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{z}(t) & = & \tilde{a}(z) + \tilde{b}(z)u(t) \\ y(t) & = & \tilde{c}^T z(t) \qquad ; \quad z_0 = z(t_0) = \begin{bmatrix} x_0 \\ y(0) \end{bmatrix} \end{array}\right\} \quad \text{(A.8)}$$

was ein ALS mit linearer Ausgangsgleichung darstellt.