

# Quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)

H. Schwarz

Forschungsbericht 12/93

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** In diesem Bericht werden QLS als nichtlineare Zustandsmodelle zur Approximation nichtlinearer dynamischer Systeme mit konzentrierten Energiespeichern eingeführt. Die QLS sind nach den bilinearen Systemen (BLS) die nächst komplexere Unterklasse der analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS). Neben der Festlegung der Nomenklatur werden innerhalb der QLS Systemunterklassen eingeführt und erste Ergebnisse zur Beschreibung des dynamischen Verhaltens der QLS dargestellt.

Universität - GH - Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
2	Systemklassen der QLS	3
3	QLS mit linearer Eigendynamik	5
4	QLS mit quadratischer homogener Differentialgleichung	8
5	Zusammenfassung und Ausblick	12
6	Literaturverzeichnis	13

# 1 Einführung

In den letzten 10 Jahren wurde ausgehend von der Systemtheorie linearer Systeme auch für spezielle Klassen nichtlinearer dynamischer Systeme eine recht allgemeine Systemtheorie entwickelt. Hierbei ist von der allgemeinen Form gewöhnlicher Vektor-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), u(t)) \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t), u(t))\end{aligned}\tag{1.1}$$

ausgehend, zunächst die Klasse der analytischen Systeme mit linearer Steuerung zu nennen (Isidori 1989, Schwarz 1991). Ich beschränke mich hier und im folgenden auf analytische Systeme mit linearer Steuerung (ALS) dieser Form:

$$\sum_{\text{ALS}} \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad , \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad ,\end{aligned}\tag{1.2}$$

also den zeitinvarianten Eingrößen-ALS mit linearer Meßgleichung ohne direkten Durchgriff der Steuerung  $u(t)$  auf die Meßgröße  $y(t)$ . Dies stellt für die praktische Anwendung keinerlei Beschränkung der Allgemeinheit dar, denn bei technischen Systemen existiert allein schon aus energetischen Gründen keine direkte Verbindung zwischen Stellsignal und Ausgangsgröße. Auch die Linearität der Meßgleichung in (1.2) ist durch Erhöhung der Systemordnung von  $n$  auf  $n + 1$  immer erreichbar (Schwarz 1991).

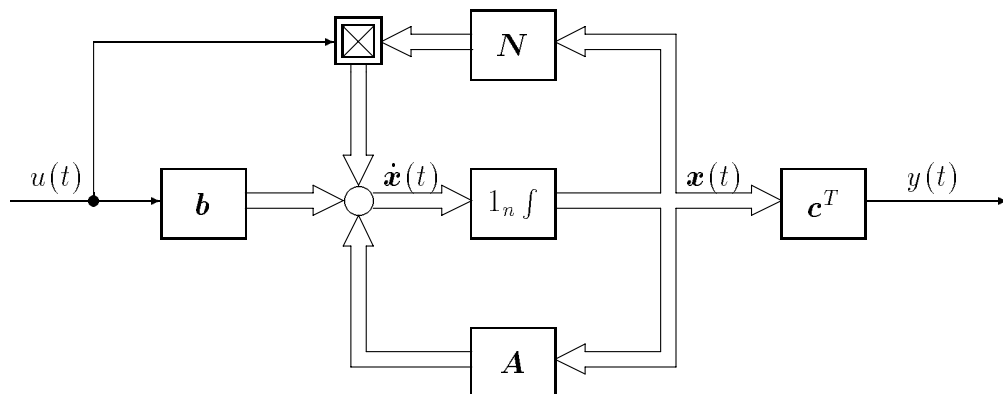
Systemtheoretische Fragen, wie Erreichbarkeit, lokale und globale Beobachtbarkeit, Stabilisierbarkeit und vieles mehr, sind für die Klasse der ALS in sehr allgemeingültiger Form gelöst worden, und zu ihrer Untersuchung bei vorgegebenen technischen Systemen in der Anwendung wurden spezielle Untersuchungsverfahren und Rechnerprogramme entwickelt (z. B. Birk 1992). Dabei zeigt es sich aber, daß es für die praktische Anwendung bei regelungstechnischen Aufgaben zweckmäßig ist, auf einfacher strukturierte Unterklassen der ALS zurückzugreifen, für die wesentlich explizitere Ergebnisse verfügbar sind.

So wurde in der Gruppe des Autors die einfachste der Unterklasse der ALS, die bilinearen Systeme (BLS):

$$\sum_{\text{BLS}} \begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{N}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}]u(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

genauer untersucht. Ausgehend von der Arbeit von Beater (1987) wurden dann in einer Reihe von Untersuchungen, die in Schwarz (1991) zusammenfassend beschrieben sind, gezeigt, daß bei nichtlinearen Systemen aus dem Bereich der fluidischen Antriebe wesentlich bessere regelungstechnische Ergebnisse zu erzielen sind, wenn BLS-Modelle anstelle von linearen Systemen als Approximation der tatsächlichen, stärker nichtlinearen dynamischen Systeme verwendet werden.

Bei den BLS in (1.3) ist die "Eigendynamik" —durch die homogene Differentialgleichung repräsentiert— linear, während das nichtlineare Verhalten der BLS von der multiplikativen Verknüpfung der Steuerung  $u(t)$  mit dem Zustandsvektor  $\mathbf{x}(t)$ , also von der Störfunktion  $\mathbf{f}(t) = [\mathbf{N} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}] u(t)$  des inhomogenen Teils der Differentialgleichungen in (1.2) bzw. (1.1) herührt (Bild 1.1).



**Bild 1.1:** Blockschaltbildarstellung der BLS aus Gl. (1.3)

Geht man von der allgemeineren nichtlinearen Systembeschreibung der ALS nach Gl. (1.2) aus, dann stellen die Terme  $\mathbf{A} \mathbf{x}(t)$  und  $\mathbf{N} \mathbf{x}(t)$  in (1.3) die linearen Glieder von Taylorreihenentwicklungen von  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$  bzw.  $\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$  in (1.2) dar. Es ist deshalb naheliegend, die Systemklasse der Polynomsysteme mit linearer Steuerung (PLS)

$$\begin{aligned} \sum_{\text{PLS}} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \mathbf{x}^{(i)}(t) + \left[ \sum_{j=0}^s \mathbf{B}_j \mathbf{x}^{(j)}(t) \right] u(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (1.4)$$

zur Approximation des nichtlinearen Systemverhaltens technischer Systeme heranzuziehen. In (1.4) wurde zur übersichtlichen Darstellung die Kronecker Potenz- bzw. Produkt-Notation verwendet:

$$\mathbf{x}^{(i)}(t) = \underbrace{\mathbf{x}(t) \otimes \dots \otimes \mathbf{x}(t)}_{i\text{-mal}} \quad . \quad (1.5)$$

Mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  ist z. B.:

$$\mathbf{x}^{(2)} = [x_1^2, x_1 x_2, x_1 x_3, \dots, x_1 x_n, x_2 x_1, x_2^2, \dots, x_n^2]^T \in \mathbb{R}^{n^2} \quad . \quad (1.6)$$

So bestehend die allgemeine Form der PLS (1.4) zunächst erscheint, so blähen sich die Terme schon ab  $n \geq 2$  gewaltig auf. Schon  $\mathbf{A}_2$  und  $\mathbf{B}_2$  sind in (1.4) rechteckige  $n \times m$  Matrizen mit  $m = n^2$ .

Innerhalb der Klasse der PLS sind nun neben den linearen Systemen und den BLS die Systeme mit quadratischen Gliedern und linearer Steuerung (QLS) die nächst komplexere Systemklasse, die von Autor und Mitarbeiter betrachtet und deren Brauchbarkeit

zur weitergehenden Approximation nichtlinearer Systeme untersucht werden soll. In diesem Bericht werden zunächst Unterklassen der QLS definiert für die dann im folgenden explizite Systemeigenschaften bereits anzugeben sind.

## 2 Systemklassen der QLS

Ausgehend von den Polynomsystemen (PLS) in Gl. (1.4) werden nun die quadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS) definiert.

$$\sum_{\text{QLS}} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad . \end{aligned} \quad (2.1)$$

Zur Vereinfachung, insbesondere bei der Bezeichnung der Matritzelemente, wurde die Notation gegenüber Gl. (1.4) leicht modifiziert und es soll im einzelnen gelten:

$$\mathbf{A}_1 =: \mathbf{A} = [a_{ij}] \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{A}_2 = [{}_2a_{ij}] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n^2 \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{B}_0 =: \mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T \quad (2.2c)$$

$$\mathbf{B}_1 =: \mathbf{B} = [b_{ij}] \quad (\text{entspricht } \mathbf{N} \text{ in } (1.3)) \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2.2d)$$

$$\mathbf{B}_2 = [{}_2b_{ij}] \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad j = 1, 2, \dots, n^2 \quad . \quad (2.2e)$$

In Bild 2.1 ist das System nach Gl. (2.1) als Blockschaltbild dargestellt, wobei ein neu eingeführtes Symbol für die Kroneckermultiplikation verwendet wurde.

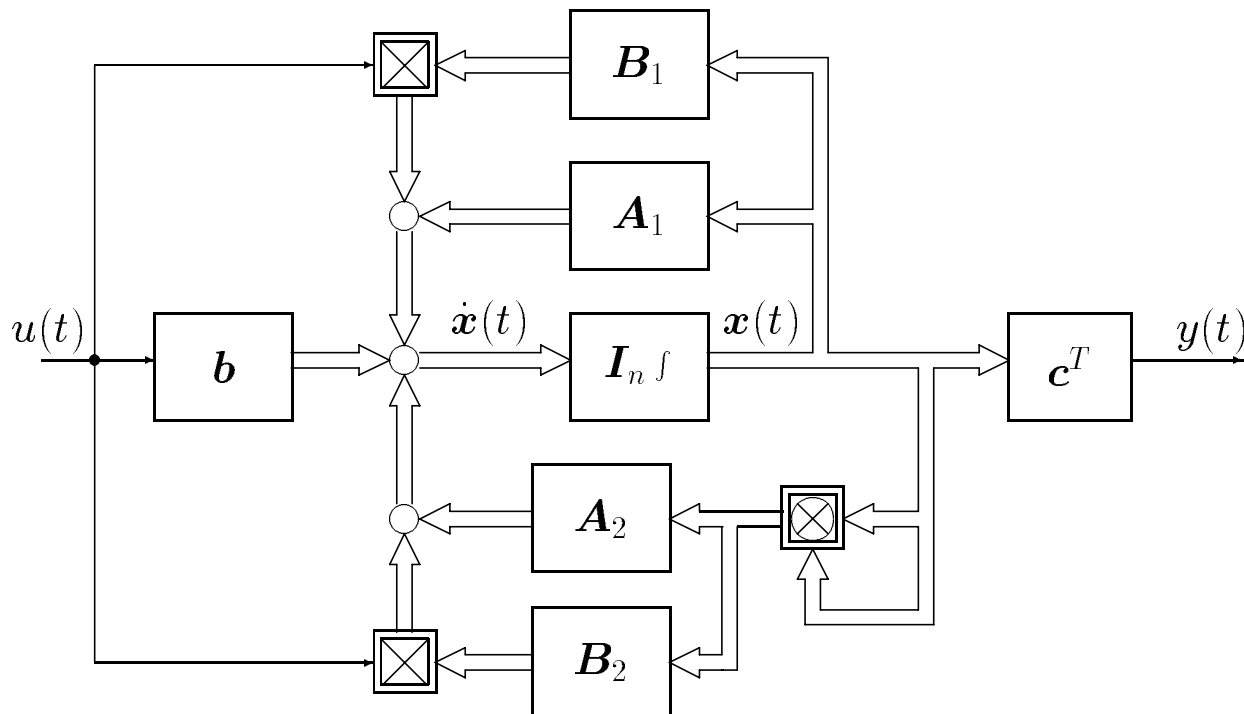
Abweichend von der allgemeinen Beschreibung mittels Kroneckerprodukten in (1.4) und (2.1) können QLS auch mittels konventioneller Matrizennotation dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_1\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_2\mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_n\mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_1\mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_2\mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t)\mathbf{R}_n\mathbf{x}(t) \end{bmatrix}]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad , \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei in den skalaren quadratischen Formen die  $\mathbf{Q}_i$  und  $\mathbf{R}_i$  quadratische  $n, n$ -Matrizen sind.

Wird in (2.1)  $\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$  gesetzt, erhält man das BLS aus Gl. (1.3). Innerhalb der QLS lassen sich nun u. a. zwei wesentliche Klassen unterscheiden:

$$\sum_{\text{QLS}_1} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{b} + \mathbf{B}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T\mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \end{aligned} \quad (2.4)$$



**Bild 2.1:** Blockschaltbild der QLS nach Gl. (2.1)

sowie

$$\sum_{\text{QLS}_2} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad . \end{aligned} \quad (2.5)$$

Das System  $\text{QLS}_1$  hat wie die BLS eine "lineare Eigendynamik", was zur Folge hat, daß sich die Systemantworten relativ einfach mittels auch einfach berechenbarer Volterrakerne bestimmen lassen. Das System  $\text{QLS}_2$  ist für  $n = 1$  in der mathematischen Literatur (Knobloch/Kappel 1974; Kamke 1977) als Riccatische Differentialgleichung bekannt und wird hier und im folgenden als Vektor-Riccati System bezeichnet. Während die skalare Riccati-Gleichung lange bekannt ist und ihre Lösungen weitgehend z. B. in Kamke (1977) untersucht sind, ist mir bisher keine allgemeine analytische Lösung der "Vektor-Riccatigleichung" in (2.5) bekannt geworden. Dies ist auch deshalb bemerkenswert, da andererseits die Matrix-Riccatigleichung vom Typ:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{A}^T \mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t) \mathbf{A} + \mathbf{P}(t) \mathbf{Q} \mathbf{P}(t) + \mathbf{S}(t) \quad ; \\ \mathbf{P}_0 &= \mathbf{P}(t_0) \quad \mathbf{P} = [\mathbf{p}_{ij}] \quad ; \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned} \quad (2.6)$$

gut erforscht ist (Reid 1972) und sowohl bei der Optimalen-Regelung linearer Systeme mit quadratischem Güteindex (Linear-Regulator) und dem Kalmanfilter eine wesentliche Rolle bei der Problemlösung spielt (Schwarz 1991).

### 3 QLS mit linearer Eigendynamik

Die vorstehend mit  $QLS_1$  bezeichneten Systeme der Form (2.4) sind gegenüber den BLS zwar etwas komplexer aber systemtheoretisch bezüglich Beobachtbarkeit und Beobachterentwurf noch gut handhabbar (Jelali 1993a). Das Übertragungsverhalten eines nichtlinearen Systems kann mittels Volterra'schen Reihen beschrieben werden (Schwarz 1991):

$$y(t) = g_0(t) + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{\nu-1}} g_{\nu}(t, \tau_1, \dots, \tau_{\nu}) u(\tau_1) \dots u(\tau_{\nu}) d\tau_{\nu} \dots d\tau_1 \quad . \quad (3.1)$$

Die Kerne  $g_i$  in (3.1) —die als verallgemeinerte Gewichtsfunktion deutbar sind— lassen sich unter gewissen Voraussetzungen explizit analytisch bestimmen:<sup>1</sup>

**Satz 3.1** : (Isidori 1989)

Unter der Voraussetzung, daß

- i)  $\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$  und  $\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$  in Gl. (1.2) analytische Vektorfelder sind und
- ii)  $\max |u(\tau)| < 1$  ;  $0 \leq \tau \leq T$  mit  $T$  hinreichend klein,

hat das ALS nach Gl. (1.2) eine Volterra-Reihendarstellung nach Gl. (3.1) mit den Volterra-Kernen

$$\left. \begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \ , \\ g_1(t, \tau_1) &= L_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= L_{\mathbf{P}_{\tau_2}} L_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\ &\vdots \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= L_{\mathbf{P}_{\tau_i}} \dots L_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \quad ; \quad L_{\mathbf{P}_{\tau_i}}(\cdot) = \left[ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \right]^T \mathbf{P}_{\tau_i}(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

mit

$$\mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = \left( \Phi_{-t}^a \right)_* \mathbf{g} \circ \Phi_t^a(\mathbf{x}) = \left( \Phi_{-t}^a \right)_* \mathbf{g}(\Phi_t^a(\mathbf{x})) \quad ; \quad (\cdot)_* = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} \quad .$$

□

Hierbei gilt folgende Definition:

**Definition 3.1** : (Isidori 1989, Schwarz 1991)

- a) Mit dem Fluß  $\Phi_t^a(\mathbf{x})$  eines Vektorfeldes  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  wird die glatte Funktion von  $t$  und  $\mathbf{x}$  bezeichnet, welche die Eigenschaft hat, die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \quad (3.3)$$

zu erfüllen. Mit anderen Worten ist  $\Phi_t^a(\mathbf{x})$  eine glatte Funktion, für die gilt:

$$\frac{d}{dt} \Phi_t^a(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\Phi_t^a(\mathbf{x})) \quad ; \quad \Phi_0^a(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad . \quad (3.4)$$

---

<sup>1</sup>Zeitargumente werden zur besseren Übersichtlichkeit häufig nicht angegeben

b) Für hinreichend kleine Zeiten  $t_1, t_2$  gelten die zu der Fundamentalmatrix eines linearen Zustandsmodells analogen Eigenschaften:

$$\text{i) } \left[ \Phi_{t_1}^a(\mathbf{x}) \right]^{-1} = \Phi_{-t_1}^a(\mathbf{x})$$

$$\text{ii) } \Phi_{t_1+t_2}^a(\mathbf{x}) = \Phi_{t_1}^a(\mathbf{x})\Phi_{t_2}^a(\mathbf{x}) \quad \square$$

Im Falle der BLS und der QLS —also den Systemen mit "linearer Eigendynamik"— ist  $\Phi$  die bekannte Fundamentalmatrix linearer Systeme, so daß die Auswertung der Beziehung in (3.2) und (3.3) mit

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{b} \quad (3.5)$$

für das lineare System liefert:

$$\left. \begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathcal{L}_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{b} \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= \mathcal{L}_{\mathbf{P}_{\tau_i}} \dots \mathcal{L}_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = 0 \quad ; \quad i \geq 2 \quad . \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Für die BLS erhält man das bekannte Ergebnis (Schwarz 1991) über

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{N}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \quad (3.7)$$

zu:

$$g_0(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 \quad (3.8a)$$

$$g_1(t, \tau_1) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_1}\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{b} \quad (3.8b)$$

$$g_2(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_2}\mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{b} \quad (3.8c)$$

⋮

$$\begin{aligned} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{N} \dots \mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_i}\mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)}\mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)}\mathbf{N} \dots \mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_{i-1}-\tau_i)}\mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[ \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_j-\tau_{j+1})} \right] \mathbf{N}e^{\mathbf{A}\tau_i}\mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[ \prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N}e^{\mathbf{A}(\tau_j-\tau_{j+1})} \right] \mathbf{b} \quad . \end{aligned} \quad (3.8d)$$

Auch für die QLS<sub>1</sub> in (2.4) läßt sich Gl. 3.1 noch auswerten (Jelali 1993a). Mit

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}t} \otimes e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{B}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \quad . \quad (3.9)$$

und

$$(e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}) \otimes (e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t} \otimes e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \quad (3.10)$$



erhält man die ersten Kerne des Systems QLS<sub>1</sub> in (2.4) zu:

$$g_0(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \quad (3.11a)$$

$$g_1(t, \tau_1) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \right] \quad (3.11b)$$

$$g_2(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^1 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_1} \right] \times \\ \times e^{-\mathbf{A}\tau_2} \left[ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \right] \quad (3.11c)$$

$$g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left\{ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \otimes \left[ e^{-\mathbf{A}} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^0 |_{\mathbf{x}_0} \right] + \right. \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^1 |_{\mathbf{x}_0} e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^1 |_{\mathbf{x}_0} + \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \mathbf{I}_n \otimes \left[ e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0 \right] + \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^1 |_{\mathbf{x}_0} e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} + \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \mathbf{I}_n \otimes \left[ e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{b} \right] + \\ \left. + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_1)} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^1 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \right\} \times \\ \times e^{-\mathbf{A}\tau_2} \left[ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^0 |_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b} \right] \quad (3.11d)$$

⋮

$$g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g_{i-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}) \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{P}_{\tau_i}^f \quad (3.12)$$

mit den Abkürzungen:

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{K}_{\otimes}^0 &= \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n^2} \\ \mathcal{K}_{\otimes}^1 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{K}_{\otimes}^0 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n} \\ \mathcal{K}_{\otimes}^2 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{K}_{\otimes}^1 = \text{konstante Matrix} \quad \forall \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n ; \quad \mathcal{K}_{\otimes}^2 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

Für die Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ , die durch geeignete Koordinatenfestlegung immer erreichbar ist, vereinfacht sich die Beziehung (3.11a) bis (3.11d) erheblich zu:

$$\left. \begin{aligned} w_0(t) &= 0 \\ w_1(t, \tau_1) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{b} \\ w_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{b} \\ w_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}\tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \mathbf{I}_n \otimes \left[ e^{-\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{b} \right] e^{-\mathbf{A}\tau_3} \mathbf{b} + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{B} e^{\mathbf{A}(\tau_2-\tau_3)} \mathbf{b} \\ &\quad \vdots \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Die Berechnung der Volterra-Kerne höherer Ordnung kann schematisch anhand der Gleichung (2.5) beliebig fortgesetzt werden. Die Ausdrücke werden allerdings immer länger und unübersichtlicher. Da, wie im nächsten Abschnitt dargestellt, für diese Systeme QLS<sub>2</sub> (2.5) mit "quadratischer Eigendynamik" der Fluß des Systems nicht allgemein dargestellt werden kann, können für diese Systeme die Voltterrakerne nicht allgemeingültig angegeben werden.

## 4 QLS mit quadratischer homogener Differentialgleichung

Zu diesem Abschnitt werden einige (wenige) Ergebnisse zur Berechnung der Dynamik der Unterklasse

$$\sum_{\text{QLS}_2} \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (4.1)$$

diskutiert. Wie oben bereits ausgeführt konnte ich allgemeine Lösungsansätze zu dem Dynamikteil in (4.1) —also den Vektor–Riccati Differentialgleichungen— in der mir bekannten mathematischen Literatur nicht finden. Es werden daher zunächst die skalaren Riccati–Differentialgleichungen dieser Form besprochen:

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_2 x^2(t) + f(t) \quad ; \quad x(t) \in \mathbb{R} \quad ; \quad x_0 = x(0) \quad . \quad (4.2)$$

Dazu werden einige Fallunterscheidungen vorgenommen:

a)  $a = f(t) = 0$

Die quadratische Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = a_2 x^2(t) \quad ; \quad x_0 = x(0) \quad (4.3)$$

hat den Fluß:

$$\phi_t^a(x) = \frac{-1}{a_2 t} \quad ; \quad t > 0 \quad , \quad (4.4)$$

was durch Einsetzen von (4.4) in (4.3) leicht geprüft werden kann:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{-1}{a_2 t} \right) &= a_2 \left( \frac{-1}{a_2 t} \right)^2 \\ \frac{1}{a_2 t^2} &= \frac{1}{a_2 t^2} \quad . \end{aligned}$$

b)  $f(t) = 0$

Diese homogene Riccati–Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = ax(t) + a_2 x^2(t) \quad (4.5)$$

wird mit dem Ansatz

$$x(t) = -\frac{1}{a_2} \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} \quad , \quad \eta(t) \neq 0 \quad (4.6)$$

in eine (homogene) lineare Differentialgleichung überführt:

$$\dot{x}(t) = -\frac{1}{a_2} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} \right\} = -\frac{1}{a_2} \left\{ \frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} - \frac{\dot{\eta}^2(t)}{\eta^2(t)} \right\} ,$$

also

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a_2} \left\{ \frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} - \frac{\dot{\eta}^2(t)}{\eta^2(t)} \right\} &= -\frac{a}{a_2} \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} + a_2 \left\{ \frac{1}{a_2^2} \frac{\dot{\eta}^2(t)}{\eta^2(t)} \right\} \\ -\frac{1}{a_2} \frac{\ddot{\eta}(t)}{\eta(t)} &= -\frac{a}{a_2} \frac{\dot{\eta}(t)}{\eta(t)} \end{aligned}$$

und dann:

$$\ddot{\eta}(t) - a\dot{\eta}(t) = 0 \tag{4.7}$$

Die Lösung dieser homogenen linearen Differentialgleichung lautet mit  $(\lambda^2 - a\lambda)e^{\lambda t} = 0$  und  $\lambda_1 = 0$ ;  $\lambda_2 = a$ :

$$\eta(t) = \alpha_1 + \alpha_2 e^{at} . \tag{4.8}$$

Daraus läßt sich nun die Lösung von (4.5) durch Einsetzen von (4.8) in (4.6) bestimmen:

$$x(t) = -\frac{1}{a_2} \frac{\alpha_2 a e^{at}}{(\alpha_1 + \alpha_2 e^{at})} . \tag{4.9}$$

Diese Lösung ist der Fluß  $\phi_t^q(x)$  der Gleichung (4.5) was durch Einsetzen von (4.9) in (4.5) nachzuweisen ist.

Der Ansatz (4.6) überführt die allgemeine skalare Riccati-Differentialgleichung (4.2) in

$$\ddot{\eta}(t) = a\dot{\eta}(t) - a_2 \eta(t)f(t) . \tag{4.10}$$

Für diese Differentialgleichung 2. Ordnung läßt sich mit den Zustandsvariablen

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= \eta(t) \\ x_2(t) &= \dot{\eta}(t) = \dot{x}_1(t) \\ f(t) &= b u(t) \end{aligned} \right\} \tag{4.11}$$

diese Zustandsgleichung angeben:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_2 b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} u(t) . \tag{4.12}$$

Das bedeutet, daß die allgemeine skalare Riccati–Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten in eine bilineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b} \mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \quad (4.13)$$

mit dem Fluß

$$\phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}$$

überführt werden kann.

Wir betrachten nun noch das System QLS<sub>2</sub> in (4.1) für  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + a_2x^2(t) + bu(t) \\ y(t) &= cx(t) \quad ; \quad c \in \mathbb{R} \quad . \end{aligned} \quad (4.14)$$

Mit den Ansätzen (4.6) und (4.11) erhalten wir hierzu das äquivalente Systemmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -a_2b & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t) \\ y(t) &= c \left( \frac{-1}{a_2} \frac{x_2(t)}{x_1(t)} \right) = \hat{c}(\mathbf{x}(t)) \quad . \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dies ist ein System mit bilinearer Dynamik und nichtlinearer Meßgleichung:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t) \\ y(t) &= c(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^2 \quad . \end{aligned} \quad (4.16)$$

Wandelt man das System nun in eines mit linearer Meßgleichung (Schwarz 1991) mit :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{mit } y(t) = c(x) \Rightarrow \dot{\mathbf{y}}(t) &= \hat{c}_x(\mathbf{x})\dot{\mathbf{x}}(t) = \hat{c}_x[\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t)] \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left\{ \frac{c}{a_2} \frac{x_2}{x_1} \right\} [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t)] \\ &= \frac{c}{a_2} \left\{ \frac{x_2}{x_1^2} \frac{1}{x_1} \right\} [\mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{N}\mathbf{x}(t)\mathbf{u}(t)] \end{aligned}$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{A} & 0 \\ \hat{c}_x(\mathbf{x})\mathbf{A} & 0 \end{array} \right] \mathbf{z}(t) + \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{N} & 0 \\ \hat{c}_x(\mathbf{x})\mathbf{N} & 0 \end{array} \right] \mathbf{u}(t) \\ y^T &= [0 \ 0 \ 1] \mathbf{z}(t) \quad . \end{aligned} \quad (4.17)$$

Dies ist ein ALS vom allgemeinen Typ der Gl. (1.2).

Für Vektor–Riccatidifferentialgleichungen mit  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^i$ ,  $i > 1$  sind bisher keine allgemeinen Lösungen angebar. Doch läßt sich diese spezielle Klasse definieren, bei der der homogene Teil entkoppelt ist und die Verkopplung nur über die Steuerung erfolgt:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 2a_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 2a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad .$$

Hier kann der Fluß  $\phi_t^a(\mathbf{x})$  mit (4.9) angegeben werden zu

$$\phi_t^a(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\mathbf{x}) & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \phi_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix} ; \quad (4.19)$$

$$\phi_i^a(\mathbf{x}) = \frac{1}{2a_{ii}} \frac{\alpha_{2ii} a_{ii} e^{a_{ii}t}}{\alpha_{1ii} \alpha_{2ii} e^{a_{ii}t}} \quad (4.20)$$

Für diese spezielle Systeme der Klasse QLS<sub>2</sub> lassen sich dann die Volterra–Kerne mittels Gl. (3.1) bestimmen.

## 5 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht wurde die Klasse der QLS, eine Unterklasse der ALS, sowie zwei wesentliche Teilklassen definiert. Einige Ansätze zur analytischen Berechnung der Systemdynamik wurden beschrieben.

Darauf aufbauend sind diese Teilprobleme zu untersuchen:

- Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit der QLS und der Unterklassen  $QLS_1$  und  $QLS_2$
- Wodurch unterscheiden sich Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit eines skalaren Riccati Systems und der zugehörige BLS mit  $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^2$  ?
- Stabilitätsuntersuchungen der QLS und dabei besonders der BLS mit linearer Zustandsrückführung (dies führt auf ein System  $QLS_2$ )
- QLS mit linearer und nichtlinearer Zustandsrückführung

## 6 Literaturverzeichnis

- Beater, P.** 1987. *Zur Regelung nichtlinearer Systeme mit Hilfe bilinearer Modelle*. Diss. Universität - GH - Duisburg, VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 143. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Birk, J.** 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. Diss. Universität Stuttgart. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 294. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems: An Introduction*. Second Edition. Berlin u.a.: Springer.
- Jelali, M.** 1993a. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung*. Dipl.-Arbeit. MSRT, Universität - GH - Duisburg.
- Jelali, M.** 1993b. *Zur Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung*. Forschungsbericht 11/93, MSRT, Universität - GH - Duisburg.
- Kamke, E.** 1977. *Differentialgleichungen-Lösungsmethoden und Lösungen*. Stuttgart: Teubner.
- Knobloch, H. W. und F. Kappel** 1974. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Stuttgart: Teubner.
- Reid, W. T.** 1972. *Riccati Differential Equations*. New York/London: Academic Press.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme-Systemtheoretische Grundlagen*. München/Wien: Oldenburg.