Zur Steuer- und Beoabachtbarkeits-Analyse der QLS

M. Jelali

Forschungsbericht Nr. 1/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Nachdem in Jelali (1993b) einige Beobachtbarkeits-Formen mit den zugehörigen Überprüfungskriterien für die QLS vorgestellt und diskutiert wurden, gibt der vorliegende Forschungsbericht im ersten Teil einen Überblick über explizite mathematische Verfahren zur Überprüfung der jeweiligen Kriterien. Im Vordergrund stehen solche Verfahren, die sich rechnergestützt realisieren lassen. Außerdem wird das Problem der Beobachtbarkeit aus rein algebraischer Sicht behandelt. Der zweite Teil des Berichts befaßt sich dann mit dem dualen Problemkreis der Steuerbarkeit. Er stellt verschiedene Formen der Steuerbarkeit vor und gibt deren zugehörigen Überprüfungskriterien an. Schließlich werden zwei symbolverarbeitende Programmsysteme zur Analyse der Steuer- und Beobachtbarkeit vorgestellt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Abkürzungen

ASKNF	Allgemeine Steuerbarkeits-Normalform
ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
GB	Gröbner Basis
QLS	Zustandsquadratisches System mit linearer Steuerung
SKNF	Steuerbarkeits-Normalform

Formelzeichen

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t))$	Drift-Term eines QLS
$\boldsymbol{A}$	Systemmatrix
$\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{B}$	Eingangsvektor, -matrix
$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}(t))$	Eingangsvektor eines QLS
$\boldsymbol{c}^T$	Ausgangsvektor
i, j, k	Laufindizes
$\boldsymbol{I}_n$	Einheitsmatrix
$k[\boldsymbol{x}]$	Menge aller Polynome in $x_1, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in k
$\boldsymbol{M}$	konstante Matrix
n	Systemordnung
$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}(t), \bar{\boldsymbol{u}}(t))$	Beobachtbarkeits-Matrix
$\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}(t))$	Steuerbarkeits-Matrix
t	kontinuierliche Zeit
$u(t)$	kontinuierliche Eingangsgröße
$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}(t))$	Transformation zur ABKNF
$\boldsymbol{x}(t)$	Zustandsvektor eines kontinuierlichen Systems
$\boldsymbol{x}^*(t)$, $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$	transformierter Zustandsvektor in die SKNF bzw. ASKNF
$\boldsymbol{x}_0$	Zustandsvektor zum Zeitpunkt t_0
$y(t)$	kontinuierliche Ausgangsgröße
$\gamma(\boldsymbol{x}(t))$	Vektorfunktion

Operatoren und sonstige Zeichen

$\times$	Multiplikation
$\otimes$	Kronecker-Produkt
$\|\|.\|\|$	Normbildung
$\prec$	Operator zur Kennzeichnung einer Variablen-Rangfolge
$(.)^{-1}$	Inversion
$(.)^T$	Transponieren eines Vektors bzw. einer Matrix
$\frac{\partial}{\partial(.)}$	partielle Differentiation

$\tilde{(.)}$, $(.)^*$	transformierte Größen
$\dot{(.)}$	Differentiation nach der Zeit
$(.)\vert_k$	Wert an der Stelle k
$\mathcal{D}_u$, $\mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}$	Definitionsbereich von u, $\boldsymbol{x}$
Δ_i	i-te Hauptabschnitts-Determinante einer Matrix
(P)	generierende Menge eines Ideals P
$M_{\boldsymbol{f}}$	linearer Differentialoperator
$[.,.]$	Lie-Klammer zweier Vektorfelder, $[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})] = \mathrm{ad}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$
$\mathbb{R}^n$	reeller Vektorraum der Dimension n
$\det(.)$	Determinante einer Matrix
$\det_{gen}(.)$	generische Determinante einer Matrix
Rang $(.)$	Rang einer Matrix
$\mathrm{Rang}_{gen}(.)$	generischer Rang einer Matrix

1 Einleitende Übersicht

Wie in der linearen Systemtheorie ist auch bei der Behandlung nichtlinearer – und insbesondere hier zustandsquadratischer – Systeme die Strukturanalyse der Ursprung grundlegender Erkenntnisse zum Verständnis der Zusammenhänge zwischen Zustands- und Ein-/Ausgangsmodellen. Die Basis dazu bilden die Eigenschaften *Steuerbarkeit* und *Beobachtbarkeit* einer Zustandsdarstellung. Eng verbunden mit diesen Eigenschaften sind nach Schwarz (1991) u. a.

- Realisierungsaufgaben,
- Identifikationsaufgaben,
- Beobachter- und Filtersynthese sowie
- die Reglersynthese.

Zwischen den Problemkreisen Steuerbarkeit und Beobachtbarkeit eines Systems besteht eine gewisse Dualität. Während bei der Beobachtbarkeit die Zustände des Systems in Bezug auf den Ausgang interessieren, werden bei der Steuerbarkeit die Zustände vom Eingang aus beeinflußt.

Nachdem in Jelali (1993b) die Beobachtbarkeits-Analyse der zustandsquadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS) als Unterklasse der analytisch linearen Systeme (ALS) durchgeführt wurde, befaßt sich der vorliegende Forschungsbericht zunächst in Abschnitt 7 mit der Angabe expliziter mathematischer Verfahren zur Überprüfung der jeweiligen Beobachtbarkeits-Kriterien. Im Vordergrund stehen solche Verfahren, die sich rechnergestützt realisieren lassen. Anschließend wird das Problem der algebraischen Beobachtbarkeit betrachtet. Abschnitt 8 behandelt das duale Problem der Steuerbarkeit. Nach Formulierung der Steuerungsaufgabe werden die Definitionen der betrachteten Steuerbarkeits-Formen angegeben. Auf der Basis dieser Definitionen erfolgt dann die Ableitung und Diskussion der zugehörigen Überprüfungskriterien. In Abschnitt 9 werden zwei symbolverarbeitende Programmsysteme zur Analyse der Steuer- und Beobachtbarkeit vorgestellt. Abschnitt 10 enthält eine Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit sowie einen Ausblick auf weiterführende Untersuchungen im Bereich der hier behandelten Thematik.

2 Beobachtbarkeits-Analyse

2.1 Verfahren zum Nachweis der Beobachtbarkeit

Betrachtet werden die zustandsquadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS), die eine Unterklasse der analytisch linearen Systeme (ALS) bilden und folgende Zustandsdarstellung besitzen:

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}}(t) & = & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t)\otimes\boldsymbol{x}(t) + [\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{x}(t)\otimes\boldsymbol{x}(t)]u(t) \\ y(t) & = & \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \qquad\qquad ; \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \end{array}\right\}. \tag{2.1}$$

An entsprechenden Stellen bedeuten die Abkürzungen[1]

$$\begin{array}{rcl} \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) & := & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t)\otimes\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) & := & \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{x}(t)\otimes\boldsymbol{x}(t) \\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u) & := & \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})u(t) \end{array}$$

sowie

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{K}_\otimes^0 & = & \boldsymbol{x}(t)\otimes\boldsymbol{x}(t) \ \in \mathbb{R}^{n^2} \\ \mathcal{K}_\otimes^1 & = & \dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\mathcal{K}_\otimes^0 \ \in \mathbb{R}^{n^2\times n} \\ \mathcal{K}_\otimes^2 & = & \dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{x}}\mathcal{K}_\otimes^1 = \text{const.} \quad \forall\, \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n \ ; \ \mathcal{K}_\otimes^2 \in \mathbb{R}^{n^2\times n^2} \quad . \end{array}$$

Über die Approximation nichtlinearer Systeme durch QLS wird in Jelali (1993a) und Schwarz (1993) berichtet.

Zum Nachweis der globalen Beobachtbarkeit muß die Beobachtbarkeits-Abbildung invertiert werden. Die Überprüfung der übrigen in Jelali (1993b) betrachteten Beobachtbarkeits-Formen erfordert eineRanguntersuchung der jeweiligen charakteristischen Matrix. Dieser Abschnitt stellt einige explizite mathematische Kriterien zur Überprüfung der eindeutigen Umkehrbarkeit der Beobachtbarkeits-Abbildung vor. Auf die Ranguntersuchung wird in Abschnitt 9 eingegangen.

Es gelten zunächst die beiden folgenden Sätze:

Satz 2.1 : (Kou, Elliott und Tarn 1973)

Eine Abbildung ist bijektiv ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$), wenn für alle $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$ eine positive Zahl $\varepsilon > 0$ existiert, so daß die Jacobi-Matrix dieser Abbildung die Quotienten-Bedingung

$$|\Delta_1| \geq \varepsilon,\ \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} \geq \varepsilon,\ \ldots,\ \frac{|\Delta_n|}{|\Delta_{n-1}|} \geq \varepsilon \tag{2.2}$$

[1] Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird im weiteren das Zeitargument nicht ständig explizit angegeben.

erfüllt. Dabei bezeichnen $\Delta_i,\ i = 1, \ldots, n$, die Hauptabschnitts-Determinanten der Jacobi-Matrix.

□

Satz 2.2 : (Kou, Elliott und Tarn 1973)

Ein QLS nach Gl. (7.1) ist global beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeits-Abbildung $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ eine bijektive Abbildung darstellt, d. h. wenn die Beobachbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ die Quotienten-Bedingung nach Gl. (7.2) befriedigt.

□

Zur Definition von $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ und $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ sei hier auf Jelali (1993a,b) verwiesen.

Beispiel 2.1 :

Betrachtet wird das QLS

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & \frac{1}{2}x_1^2(t) + x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1^2(t) + x_1(t)x_2(t)u(t) - u(t) \\ y(t) & = & x_1(t) \end{array}\right\} \quad \text{(B 2.1-1)}$$

Die Beobachtbarkeits-Matrix ergibt sich als Jacobi-Matrix der Beobachtbarkeits-Abbildung

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \frac{1}{2}x_1^2(t) + x_2(t) \end{bmatrix} \quad \text{(B 2.1-2)}$$

zu

$$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ x_1(t) & 1 \end{bmatrix} . \quad \text{(B 2.1-3)}$$

Da

$$|\Delta_1| = 1 \geq 1, \qquad \frac{|\Delta_2|}{|\Delta_1|} = 1 \geq 1 \quad \forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \text{(B 2.1-4)}$$

gilt, ist die zugehörige Beobachtbarkeits-Abbildung bijektiv ($\varepsilon = 1$) und damit das QLS global beobachtbar.

□

Bei der Anwendung kommt es oft vor, daß sowohl der Definitionsbereich von $\boldsymbol{x}(t)$ als auch der Wertebereich der betrachteten Abbildung nur ein Teilbereich des Zustandsraumes $\mathbb{R}^n$ umfaßt. wird in der Literatur (z. B. Kou, Elliott und Tarn 1973 sowie Brandin, Kostyukovskii und Razorenov 1976) zwischen rechteckigen und konvexen Definitionsbereichen unterschieden. Für einen rechteckigen Definitionsbereich gelten Definition 7.1 und Satz 7.3 und für einen konvexen Satz 7.4.

Definition 2.1 : (Brandin, Kostyukovskii und Razorenov 1976)

Die Matrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ heißt P-Matrix (bzw. N-Matrix), wenn ihre Hauptabschnitts-Determinanten Δ_i im gesamten Definitionsbereich alle positiv (bzw. negativ) sind. Sie heißt P-N-Matrix (bzw. N-P-Matrix), falls die Δ_i für ungerades i positiv (bzw. negativ) und für gerades i negativ (bzw. positiv) sind, d. h. $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}$; $\forall \bar{\boldsymbol{u}} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{u}}$

$$\begin{array}{rcllll} \text{P} & : & \Delta_i > 0 & i = 1(1)n, & & \\ \text{N} & : & \Delta_i < 0 & i = 1(1)n, & & \\ \text{P-N} & : & \Delta_i > 0 & i = 1(2)n & \text{und} \quad \Delta_i < 0 & i = 2(2)n, \\ \text{N-P} & : & \Delta_i < 0 & i = 1(2)n & \text{und} \quad \Delta_i > 0 & i = 2(2)n \quad . \end{array}$$

□

Satz 2.3 : (Brandin, Kostyukovskii und Razorenov 1976)

Ein QLS nach Gl. (7.1) ist global beobachtbar, wenn die zugehörige Beobachtbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ entweder eine P-, N-P-, N- oder P-N-Matrix gemäß Definition 7.1 ist.

□

Beispiel 2.2 :

Die Beobachtbarkeits-Matrix nach Gl. (B7.1-3) des QLS nach Gl. (B7.1-1) besitzt die Hauptabschnitts-Determinanten

$$\Delta_1 = 1 > 0 \, , \tag{B 2.2-1}$$

$$\Delta_2 = 1 > 0 \quad . \tag{B 2.2-2}$$

Damit ist die betrachtete Beobachtbarkeits-Matrix eine P-Matrix, was die globale Beobachtbarkeit des QLS beweist.

□

Satz 2.4 : (Kou, Elliott und Tarn 1973)

Existiert eine konstante Matrix $\boldsymbol{M}$ derart, daß für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$

1. det $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) > 0$ gilt und
2. $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) + [\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})]^T$ nichtnegative Hauptabschnitts-Determinanten besitzt,

dann ist die Beobachtbarkeits-Abbildung bijektiv und damit das QLS nach Gl. (7.1) global beobachtbar.

□

Beispiel 2.3 :

Für das QLS aus Beispiel 7.1 gilt für $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{I}_2$

1. det $\boldsymbol{M}\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 1 > 0$ und

2. $\boldsymbol{MQ}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) + [\boldsymbol{MQ}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})]^T = \begin{bmatrix} 2 & x_1(t) \\ x_1(t) & 2 \end{bmatrix}$
$\Rightarrow \Delta_1 = 2 > 0 \;\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^2,\; \Delta_2 = 4 - x_1^2(t) > 0$ für $-2 < x_1(t) < 2$,

so daß in diesem Bereich des Zustandsraumes die globale Beobachtbarkeit gegeben ist.

□

Die beiden Hypothesen in Satz 7.4 werden als „strenge positive Semidefinitheits-Bedingungen“ bezeichnet. Zwischen der strengen positiven Semidefinitheit und der Quotienten-Bedingung von Satz 7.1 besteht keinerlei Zusammenhang. Beide stellen lediglich hinreichende Bedingungen für die globale Beobachtbarkeit eines QLS dar und müssen ggf. sukzessiv überprüft werden. Sie liefern durchaus verschiedene Aussagen über das Gebiet der globalen Beobachtbarkeit (vgl. Beispiel 7.3 mit 7.1).

Ähnliche mathematische Kriterien zum Nachweis der eindeutigen Invertierbarkeit der Beobachtbarkeits-Abbildung und damit der globalen Beobachtbarkeit findet man u. a. bei Brandin, Kostyukovskii und Razorenov (1975) sowie Birk (1992). Die meisten Verfahren beinhalten jedoch nur hinreichende und oft strenge Bedingungen für die eindeutige Invertierbarkeit von $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$. Deshalb schlägt Birk (1992) eine heuristische Vorgehensweise zum Nachweis der eindeutigen Auflösbarkeit des betrachteten nichtlinearen Gleichungssystems vor.

Diese Vorgehensweise besteht darin, zunächst möglichst viele Gleichungen nach den Zuständen $x_i(t)$ aufzulösen und dann den verbleibenden Rest der Abbildung mit den oben erwähnten sowie anderen Kriterien auf eindeutige Invertierbarkeit zu überprüfen. Diese praktische Methode wird in Birk (1992) ausführlich beschrieben. Der zugehörige Algorithmus wurde in dem symbolverarbeitenden Programmsystem MACNON (MACsyma program for NONlinear systems)[2] implementiert. Auch mit diesem Verfahren ist die globale Inversion der Beobachtbarkeits-Abbildung nur selten möglich (Rothfuß, Schaffner und Zeitz 1993). Deshalb wird hier eine wesentlich effizientere Methode besprochen.

Das Inversionsproblem kann auch durch die Beziehung

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{y}}) = \bar{\boldsymbol{y}}(t) - \boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 0 \;; \qquad \bar{\boldsymbol{y}}(t) := [y(t), \dot{y}(t), \ldots, u^{(n-1)}(t)]^T \tag{2.1}$$

bzw.

$$\begin{aligned} p_1(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{y}}) &= y(t) - M_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) = 0 \\ p_2(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{y}}) &= \dot{y}(t) - M_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) = 0 \\ &\vdots \\ p_n(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}, \bar{\boldsymbol{y}}) &= y^{(n-1)}(t) - M_{\boldsymbol{f}}^{n-1} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) = 0 \end{aligned}$$

[2]Das Programmsystem wird am Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik der Universität Stuttgart entwickelt.

beschrieben werden. Der Differentialoperator $M_{\boldsymbol{f}}$ ist erklärt durch:[3]

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{f}}\gamma(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial\gamma(\boldsymbol{x})}{\partial\boldsymbol{x}}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u) + \frac{\partial\gamma(\boldsymbol{x})}{\partial\bar{\boldsymbol{u}}}\dot{\bar{\boldsymbol{u}}}(t) \quad , \\ M_{\boldsymbol{f}}^k\gamma(\boldsymbol{x}) &= M_{\boldsymbol{f}}(M_{\boldsymbol{f}}^{k-1}\gamma(\boldsymbol{x})) \qquad \text{mit} \qquad M_{\boldsymbol{f}}^0\gamma(\boldsymbol{x}) = \gamma(\boldsymbol{x}) \quad . \end{aligned}$$

Es geht dann darum, alle Zustände $x_i(t)$, $i \neq j$ zu eliminieren und die entstehende Beziehung nach $x_j(t)$ aufzulösen, was eine typische Aufgabe der Eliminations-Theorie darstellt. Schließlich muß die Eindeutigkeit der Inversion überprüft werden.

Beispiel 2.4 :

Es sei

$$\begin{aligned} p_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{y}}) &= y(t) - x_1(t) - x_2(t) = 0 && \text{(B 2.4-1)} \\ p_2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{y}}) &= \dot{y}(t) - x_1(t)x_2(t) - x_2^2(t) - u(t) = 0 && \text{(B 2.4-2)} \end{aligned}$$

nach $x_1(t)$ und $x_2(t)$ separat aufzulösen. Aus

$$p_2(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{y}}) - x_2(t)p_1(\boldsymbol{x},\bar{\boldsymbol{u}},\bar{\boldsymbol{y}}) = 0 \qquad \text{(B 2.4-3)}$$

folgt der Zusammenhang für $x_2(t)$

$$\dot{y}(t) - x_2(t)y(t) - u(t) = 0, \qquad \text{(B 2.4-4)}$$

womit gilt

$$x_2(t) = \frac{\dot{y}(t) - u(t)}{y(t)} \quad . \qquad \text{(B 2.4-5)}$$

Setzt man Gl. (B7.4-5) in Gl. (B7.4-1) ein, dann ergibt sich zunächst die Beziehung für $x_1(t)$

$$y^2(t) - x_1(t)y(t) - \dot{y}(t) + u(t) = 0 \qquad \text{(B 2.4-6)}$$

und damit

$$x_1(t) = \frac{y^2(t) + u(t) - \dot{y}(t)}{y(t)} \quad . \qquad \text{(B 2.4-7)}$$

[3] $\gamma(\boldsymbol{x})$ steht i. allg. für eine beliebige Vektorfunktion, speziell hier gilt: $\gamma(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t)$.

Für $y(t) \neq 0$ ist die Inversion eindeutig, was die globale Beobachtbarkeit des zugehörigen QLS, z. B.

$$\left.\begin{array}{rcl} \dot{x}_1(t) & = & x_2^2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) & = & x_1(t)x_2(t) \\ y(t) & = & x_1(t) + x_2(t) \end{array}\right\} \qquad \text{(B 2.4-8)}$$

impliziert.

□

Die im Beispiel 7.4 aufgezeigte Vorgehensweise erscheint zunächst heuristisch. Trotzdem gibt es ein mathematisches Werkzeug der *kommutativen Algebra*, das dies systematisch durchführen kann. Gemeint sind hier die sog. *Gröbner Basen* (GB)[4]. Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit dem Einsatz der GB zur Lösung der Beobachtungsaufgabe.

2.2 Gröbner Basen und algebraische Beobachtbarkeit

Einsatz der Gröbner Basen

Die kommutative Algebra umfaßt die mathematischen Bereiche der algebraischen Geometrie (Lösung von Polynom-Gleichungssystemen) und der algebraischen Zahlentheorie. Eines ihrer wichtigsten Hilfsmittel stellen die GB dar, mit denen sich die Mathematiker etwa seit Mitte der 70er Jahre beschäftigt haben. Bald entstand ein GB-Algorithmus von Bruno Buchberger, der dann in vielen symbolverarbeitenden Programmiersprachen, wie z. B. MACSYMA, MAPLE und REDUCE implementiert wurde. Zum Verständnis der Funktionsweise dieses Algorithmus sind vertiefte Kenntnisse der kommutativen Algebra erforderlich, die nicht Inhalt dieser Arbeit ist. Eine umfassende Einführung in die kommutative Algebra sowie die genaue Definition der GB findet sich in der einschlägigen Literatur (z. B. Forsman 1991 und 1992b). Hier werden in Anlehnung an diese Arbeiten lediglich einige Basisdefinitionen gegeben.

Definition 2.2 :

Die Menge aller Polynome in den Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit Koeffizienten in k wird mit $k[x_1, \ldots, x_n] = k[\boldsymbol{x}]$ bezeichnet, z. B. $\mathbb{Q}[\boldsymbol{x}]$, $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$, $\mathbb{C}[\boldsymbol{x}]$.

□

Definition 2.3 :

Gegeben sei $P = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, eine Menge von Polynomen in $\mathbb{R}[\boldsymbol{x}]$. Das von P generierte *Ideal* ist die Menge aller Polynome der Form

$$f = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i p_i \quad ; \quad \alpha_i \in \mathbb{R}[\boldsymbol{x}] \quad . \qquad (2.9)$$

[4] Sie wurden eingeführt von Bruno Buchberger (Forsman 1991), einem Studenten des Algebraikers Wolfgang Gröbner (1899-1980).

P wird eine *generierende Menge* des Ideals genannt und (P) notiert.

□

Definition 2.4 :

Eine *Rangfolge* der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist eine Permutation dieser Symbole. Zur Kennzeichnung dieser Rangfolge eignet sich der Operator $\prec$ mit den Eigenschaften:

$x_i \prec x_j$: x_j hat eine höhere Rangordnung als x_i,
$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$: alle Komponenten des Vektors $\boldsymbol{y}$ besitzen eine höhere Rangordnung als die von $\boldsymbol{x}$.

□

Definition 2.5 :

Die Polynome $f_1, f_1, \ldots, f_m$ heißen *algebraisch abhängig* über k, wenn ein Polynom $P \in k[\boldsymbol{x}]$ derart existiert, daß $P(f_1, \ldots, f_m) = 0$ gilt. Andernfalls heißen die f_i algebraisch unabhängig.

□

Die GB stellen eine systematische Methode zur Eliminierung von Variablen in Polynom-Gleichungssystemen bereit. Dazu bildet man das Ideal (vgl. Gl. (7.1))

$$\mathcal{O}_{n-1} = (y(t) - M_{\boldsymbol{f}}^0 \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t), \dot{y}(t) - M_{\boldsymbol{f}} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t), \ldots, y^{(n-1)}(t) - M_{\boldsymbol{f}}^{n-1} \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t)) \qquad (2.10)$$

und berechnet dafür die GB, jeweils unter Beachtung einer bestimmten Rangfolge gemäß Definition 7.4, die angibt, in welcher Reihenfolge die Variablen x_i eliminiert werden sollen. Ein GB ist nichts anderes als eine generierende Menge des Ideals $\mathcal{O}_{n-1}$ gemäß Definition 7.3. Dabei wählt der Algorithmus die α_i so geschickt, daß alle bis auf die gewünschte Variable eliminiert werden. Dies kann in MAPLE wahlweise anhand der Funktionen *finduni* und *gbasis* geschehen (Char u.a. 1991). Beispiel 7.5 verdeutlicht die Vorgehensweise.

Beispiel 2.5 :

Die Beobachtbarkeitsabbildung für das QLS

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + u(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t) - 2x_2(t)u(t) \\ y(t) &= x_1(t) \end{aligned}\right\} \text{(B 2.5-1)}$$

lautet komponentenweise

$$\left.\begin{aligned} y(t) &= x_1(t) \\ \dot{y}(t) &= x_1^2(t) - x_1(t)x_2(t) + u(t) \quad . \end{aligned}\right\} \text{(B 2.5-2)}$$

Die Inversion kann durch die MAPLE-Programmierbefehle[5]

[5] Für x_1, x_2 werden die Symbole $x1, x2$ verwendet. $u0, u1$ und $y0, y1$ bezeichnen $u, \dot{u}$ und $y, \dot{y}$.

```
> with(grobner):
> p1:=y0-x1:
> p2:=y1-x1^2-x1*x2-u0:
> x1bez:=finduni(x1, [p1, p2], x1, x2);
```

$$x1bez := x1 - y0$$

```
> x2bez:=finduni(x2, [p1, p2], x1, x2);
```

$$x2bez := y0\,x2 + y1 - u0 - y0^2$$

```
> x1:=solve(x1bez=0, x1);
```

$$x1 := y0$$

```
> x2:=solve(x2bez=0, x2);
```

$$x2 := -\frac{y1 - u0 - y0^2}{y0}$$

oder

```
> gb1:=gbasis([p1, p2], [x2, x1], plex);
```

$$gb1 := [y1 - u0 - y0^2 + y0\,x2, -y0 + x1]$$

```
> gb2:=gbasis([p1, p2], [x1, x2], plex);
```

$$gb2 := [-y0 + x1, y1 - u0 - y0^2 + y0\,x2]$$

```
> x1:=solve(gb1[2]=0, x1);
```

$$x1 := y0$$

```
> x2:=solve(gb2[2]=0, x2);
```

$$x2 := -\frac{y1 - u0 - y0^2}{y0}$$

veranlaßt werden.

□

Zusammenfassen läßt sich die Vorgehensweise zur Überprüfung der globalen Beobachtbarkeit anhand der GB in folgenden Schritten:

1. Berechnung der Beobachtbarkeits-Abbildung.
2. Bestimmung der GB mit Hilfe der Funktionen *finduni* oder *gbasis* (Elimination).
3. Auflösung der gefundenen Beziehungen nach den einzelnen Variablen x_i.

4. Überprüfung der Eindeutigkeit der Auflösbarkeit.

Im MAPLE-Programmsystem POLYCON (Forsman 1992a, 1993) ist eine Routine (*obsvc*) implementiert, welche die Beziehungen zwischen $x_i(t)$ und $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$ bzw. $\bar{\boldsymbol{y}}(t)$ direkt liefert, wenn die einzelnen Zustände beobachtbar sind. In van der Schaft (1989) wird ein sukzessiver Algorithmus (differentialgeometrisch) hergeleitet, der allerdings nur lokal um einen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_A, \bar{\boldsymbol{u}}_A, \bar{\boldsymbol{y}}_A)$ und unter gewissen Rangbedingungen Gültigkeit hat. Der gleiche Algorithmus findet sich in Nijmeijer und van der Schaft (1990). Diop (1991) schlägt einen differentialalgebraischen Eliminations-Algorithmus vor, der zusätzlich ein System von Ungleichungen bezüglich $\bar{\boldsymbol{y}}(t)$ und $\bar{\boldsymbol{u}}(t)$ liefert, unter dessen Erfüllung die Elimination möglich ist.

Algebraische Beobachtbarkeit

Bisher wurde die Eigenschaft der Beobachtbarkeit ausschließlich aus differentialgeometrischer Sicht behandelt. Im folgenden soll diese Eigenschaft auch rein algebraisch betrachtet werden. Die Einführung des Begriffs *algebraische Beobachtbarkeit* geht auf Diop und Fliess (1991) zurück . Von Forsman (1991 und 1992c) erfolgte die Analyse der Beobachtbarkeit aus algebra-geometrischem Standpunkt. Es gilt zunächst der folgende Satz:

Satz 2.5 : (Forsman 1991)

> Ein QLS nach Gl. (7.1) ist *algebraisch beobachtbar* dann und nur dann, wenn die zugehörige Beobachtbarkeits-Abbildung dominant ist, d. h. wenn alle Komponenten dieser Abbildung algebraisch unabhängig sind.

□

Es existiert auch hier ein explizites Kriterium zur Überprüfung der algebraischen Beobachtbarkeit.

Satz 2.6 : (Forsman 1991)

> Ein QLS nach Gl. (7.1) ist *algebraisch beobachtbar* dann und nur dann, wenn die Determinante der Beobachtbarkeits-Matrix als Jacobi-Matrix der Beobachtbarkeits-Abbildung *generisch* ungleich Null bzw. dessen *generischer Rang* identisch n ist, also

$$\det_{gen} \boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) \neq 0 \quad \textit{bzw.} \quad \mathrm{Rang}_{gen}\, \boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = n \quad . \tag{2.3}$$

□

Generisch bedeutet hier strukturell (fast überall), d. h. unabhängig von den Funktionen bzw. Werten, welche die Matrizenelemente annehmen können. Der generische Rang hat den Vorteil, daß er für eine ganze Klasse von strukturell identischen Systemen gilt und keine numerischen Probleme bei seiner Bestimmung auftreten können (Wey 1993).

Aus Satz 7.6 gehen zwei wesentliche Unterschiede zwischen dem oben vorgestellten Konzept der algebraischen Beobachtbarkeit und dem der lokalen Beobachtbarkeit in Jelali (1993b:12) hervor. Zum einen ist die Erfüllung der Rangbedingung für die algebraische Beobachtbarkeit notwendig *und* hinreichend, für die lokale Beobachbarkeit aber nur hinreichend. Zum anderen muß die Rangbedingung bei der letzteren Eigenschaft generell (überall) gelten, während sie bei der anderen nur strukturell (fast überall) erfüllt sein muß (vgl. Beispiel 7.6). Die algebraische Beobachtbarkeit ist daher einfacher zu testen als die lokale.

Beispiel 2.6 :

Das QLS aus Beispiel 7.5 besitzt die Beobachtbarkeits-Abbildung

$$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2x_1(t) - x_2(t) & -x_1(t) \end{bmatrix} \quad . \tag{B 2.6-1}$$

Das QLS ist algebraisch beobachtbar wegen

$$\mathrm{Rang}_{gen}\, \boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = 2 = n \quad . \tag{B 2.6-2}$$

Die lokale Beobachtbarkeit ist für $x_1(t) = 0$ nicht gegeben, da diese Stelle eine Singularität für $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ darstellt.

□

3 Steuerbarkeits-Analyse

Die Steuerbarkeitsaufgabe besteht darin, die Frage zu klären, ob sich der Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0)$ eines QLS durch einen geeignet gewählten Verlauf der Steuerung $u(t)$ in einen beliebigen Zustand $\boldsymbol{x}(t_1)$ überführen läßt. Dies ermöglicht eine gezielte Einflußnahme auf den Verlauf der Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems. Die Eigenschaft der Steuerbarkeit eines QLS stellt somit eine wichtige Voraussetzung für dessen Regelung dar, die einen gewünschten zeitlichen Verlauf des Zustandes bzw. des Ausganges zum Ziel hat.

3.1 Formen der Steuerbarkeit

Wegen der Komplexität der nichtlinearen – und hier auch speziell zustandsquadratischen – Systeme wird von verschiedenen Autoren (u. a. Hermann und Krener 1977, Zeitz 1983, Aeyels 1984, Casti 1985, Isidori 1989, Zeitz 1989, Nijmeijer und van der Schaft 1990 sowie Schwarz 1991) eine Vielzahl von Steuerbarkeits-Begriffen eingeführt, z. B. Steuerbarkeit, lokale Steuerbarkeit, lokale weiche/schwache Steuerbarkeit, Erreichbarkeit, lokale Erreichbarkeit, lokale weiche/schwache Erreichbarkeit. Daher werden auch verschiedene Wege zur Analyse und Lösung der Steuerungsaufgabe eingeschlagen.

In dieser Arbeit werden die Steuerbarkeits-Formen

- globale Steuerbarkeit,
- lokale Steuerbarkeit und
- Arbeitspunkt-Steuerbarkeit

behandelt und soweit wie möglich auf die QLS spezialisiert.

Es werden folgende Definitionen der jeweiligen Steuerbarkeits-Form zugrundegelegt:

Definition 3.1 : (Hermann und Krener 1977, Schwarz 1991 u. a.)

Ein Zustand $\boldsymbol{x}_e \in \mathbb{R}^n$ heißt *erreichbar von* $\boldsymbol{x}_0$ zur Zeit t_1, wenn eine beschränkte meßbare Steuerung $u(t)$ so existiert, daß die Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems die Bedingungen

$$\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}_0 \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}_e = \boldsymbol{x}(t_1)$$

erfüllt.

□

Definition 3.2 : (Zeitz 1983, Aeyels 1984)

Ein QLS nach Gl. (7.1) heißt *global steuerbar*, wenn für jeden Anfangspunkt $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(0)$ und jeden Endpunkt $\boldsymbol{x}(t_e)$ eine meßbare Steuerung $u(t)$ existiert, die beide Punkte entlang der Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems verbindet.

□

Definition 3.3 : (Aeyels 1984)

i) Ein QLS nach Gl. (7.1) heißt *lokal steuerbar in* $\boldsymbol{x}_0$, wenn für alle $T > 0$ eine Umgebung $\mathcal{U}_0$ von $\boldsymbol{x}_0$ existiert, die entlang der Trajektorie $\boldsymbol{x}(t)$ des Systems innerhalb von T erreicht werden kann.

ii) Das QLS heißt *lokal steuerbar*, wenn die Eigenschaft i) für alle $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ erfüllt ist.

□

Definition 3.4 : (Birk 1992)

Ein QLS nach Gl. (7.1) heißt *arbeitspunkt-steuerbar* (steuerbar in einem Arbeitspunkt $\boldsymbol{x}_s$), wenn jeder Anfangszustand $\boldsymbol{x}_0$ in einer Umgebung ($||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_s|| < \varepsilon_{\boldsymbol{x}}$, $||u - u_s|| < \varepsilon_u$) des stationären Arbeitspunktes $(\boldsymbol{x}_s, u_s)$ mit $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_s, u_s) = 0$ erreicht werden kann.

□

3.2 Steuerbarkeitskriterien

Dieser Abschnitt beinhaltet die Einführung einiger für eine Steuerbarkeits-Analyse sehr wichtigen Begriffe der *Steuerbarkeits-Normalform*, der *Steuerbarkeits-Matrix* und der *Arbeitspunkt-Steuerbarkeits-Matrix*. Basierend darauf werden algebraische Kriterien zur Überprüfung der im vorigen Abschnitt angegebenen Steuerbarkeitsformen behandelt.

3.2.1 Globale Steuerbarkeit

Steuerbarkeits-Normalform

In Analogie zur linearen Steuerbarkeits-Normalform[6]

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \begin{bmatrix} -a_1 x_n^*(t) \\ x_1^*(t) - a_2 x_n^*(t) \\ x_2^*(t) - a_3 x_n^*(t) \\ \vdots \\ x_{n-1}^*(t) - a_n x_n^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.1}$$

[6] Die Ausgangsgleichung wird im folgenden bewußt nicht aufgeschrieben, da sie bei der Untersuchung der Steuerbarkeit nicht von Interesse ist.

wird für die QLS eine nichtlineare Steuerbarkeits-Normalform (Zeitz 1983 und 1989, Schwarz 1991) durch

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \begin{bmatrix} -a_1(x_n^*) \\ x_1^*(t) - a_2(x_n^*) \\ x_2^*(t) - a_3(x_n^*) \\ \vdots \\ x_{n-1}^*(t) - a_n(x_n^*) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.2}$$

$$:= \boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}^*) + \boldsymbol{b}^* u(t) \tag{3.3}$$

definiert. Im Zusammenhang mit dieser Steuerbarkeits-Normalform (SKNF) gilt:

Satz 3.1 : (Zeitz 1983)

Ein QLS, das in der SKNF vorliegt oder in diese transformiert werden kann, ist direkt global steuerbar. Da die Existenz der Steuerung $u(t)$ (vgl. Definition 8.2) nicht von den Nichlinearitäten

$$\boldsymbol{a}(x_n^*) = [a_1(x_n^*), a_2(x_n^*), \ldots, a_n(x_n^*)]^T \tag{3.4}$$

abhängt, ist das QLS dann sogar streng strukturell steuerbar.

□

Transformation der QLS in die SKNF

Aus Satz 8.1 geht hervor, daß die Existenz einer eindeutig umkehrbaren Transformation

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*) \quad \text{bzw.} \quad \boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{v}^{-1}(\boldsymbol{x}) \ , \tag{3.5}$$

die ein QLS nach Gl. (7.1) in die SKNF nach Gl. (8.2) überführt, eine hinreichende Bedingung für die globale Steuerbarkeit des Systems darstellt. In die zeitliche Ableitung

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{dt} = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) \tag{3.6}$$

von Gl. (8.5) wird Gl. (8.3) eingesetzt:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}^*) + \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{b}^* u(t) \ . \tag{3.7}$$

Aus dem Vergleich von Gl. (8.7) mit (7.1) ergeben sich die beiden Vektor-Differentialgleichungen zur Bestimmung der Transformation $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)$ zu:

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}^*) = \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}(t) \otimes \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*}\boldsymbol{b}^* = \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{x}(t) \otimes \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \ . \tag{3.9}$$

Definiert man die Steuerbarkeits-Matrix

$$\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) \quad := \quad \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial \boldsymbol{x}^*} = \left[\frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_1^*}, \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_2^*}, \ldots, \frac{\partial \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)}{\partial x_n^*}\right] \quad , \tag{3.10}$$

dann erhält man wegen der speziellen Struktur von $\boldsymbol{a}^*(\boldsymbol{x}^*)$ und $\boldsymbol{b}^*$ (Schwarz 1991):

$$\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \left[\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), \mathrm{ad}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}), \ldots, \mathrm{ad}_{\boldsymbol{b}}^{n-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})\right] \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(x_n^*)}{\partial x_n^*} \quad = \quad -\boldsymbol{Q}_S^{-1}(\boldsymbol{x})\mathrm{ad}_{\boldsymbol{b}}^n\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \tag{3.12}$$

mit dem Lie-Klammer-Produkt (Isidori 1989)

$$\begin{aligned} ad_{\boldsymbol{b}}\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) &= [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})] = \frac{\partial \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) - \frac{\partial \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) \\ ad_{\boldsymbol{b}}^j\,\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}) &= [\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}), ad_{\boldsymbol{b}}^{j-1}\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})] \quad ; \quad j \geq 1 \quad . \end{aligned}$$

Hieraus folgt, daß die beiden Bedingungen

1. Regularität der Steuerbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x})$ und
2. Integrierbarkeit des Systems partieller Differentialgleichungen in Gln. (8.11) und (8.12)

notwendig und hinreichend für die Existenz der Transformation $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}^*)$ sind.

Beispiel 3.1 :

Betrachtet wird die bekannte Räuber-Beute-Beziehung (Keller 1986)

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= -dx_2(t) + cx_1(t)x_2(t) - ex_2(t)u(t) \end{aligned}\right\} \quad , \tag{B 3.1-1}$$

die ein QLS nach Gl. (7.1) darstellt. Die Systemmatrizen lauten:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{A}_1 &= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -b & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{B}_1 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -e \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{0} \quad ; \quad \boldsymbol{b}_0 = \boldsymbol{0} \end{aligned}\right\} \quad . \tag{B 3.1-2}$$

Die Konstanten a, b, c, d und e seien alle von Null verschieden. Der Definitionsbereich sei durch $x_1 > 0$; $x_2 > 0$; $u \geq 0$ festgelegt. Die Steuerbarkeits-Matrix ergibt sich mit Gl. (8.11) zu

$$\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) \quad = \quad \begin{bmatrix} 0 & bex_1(t)x_2(t) \\ -ex_2(t) & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{B 3.1-3}$$

Die Auswertung von Gl. (8.12) liefert dann für das betrachtete System

$$\frac{\partial \boldsymbol{a}(x_2^*)}{\partial x_2^*} = -\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{ex_2(t)} \\ \frac{1}{bex_1(t)x_2(t)} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} be^2x_1(t)x_2(t) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e \end{bmatrix}.$$

Durch Integration von Gl. (B8.1-4) erhält man

$$\boldsymbol{a}(x_n^*) = \begin{bmatrix} 0 \\ -ex_2^*(t) \end{bmatrix}, \tag{B 3.1-4}$$

hierbei wurden die Integrationskonstanten zu Null gesetzt. Damit ergibt sich die SKNF zu

$$\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1^*(t) + ex_2^*(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \quad . \tag{B 3.1-5}$$

□

Da es nur in seltenen Fällen gelingen, das System partieller Differentialgleichungen zu integrieren, wird weiter unten die einfach zu untersuchenden Eigenschaft lokale Steuerbarkeit auf der Basis der Steuerbarkeits-Matrix nach Gl. (8.11) behandelt.

Allgemeine Steuerbarkeits-Strukturen

Wie bei der Beobachtbarkeits-Analyse der QLS (Jelali 1993b) sind auch hier allgemeine Steuerbarkeits-Strukturen von großer Bedeutung, da durch sie die Anwendung aufwendiger mathematischer Verfahren zur Überprüfung der Steuerbarkeit evtl. umgangen werden kann. Analog zur allgemeinen Beobachtbarkeits-Normalform von Gauthier und Bornard (1981) kann eine allgemeine Steuerbarkeits-Normalform (ASKNF) angegeben werden zu:

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -\,a_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \\ \tilde{x}_1(t) - a_2(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \\ \tilde{x}_2(t) - a_3(\tilde{x}_3, \ldots, \tilde{x}_n) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{n-1}(t) - a_n(\tilde{x}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.6}$$

$$\text{mit} \quad b(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \neq 0 \quad .$$

Eine noch allgemeinere SKNF wird von Zeitz (1989) durch

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{f}_1(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \\ \tilde{f}_2(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \\ \tilde{f}_3(\tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n) \\ \vdots \\ \tilde{f}_n(\tilde{x}_{n-1}, \tilde{x}_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{g}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \tag{3.7}$$

$$\text{mit} \quad \tilde{g}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \neq 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial \tilde{f}_{i+1}}{\partial \tilde{x}_i} \neq 0 \; ; \quad i = 1, \ldots, n-1$$

erklärt und mit der „impliziten Steuerbarkeits-Dreiecks-Normalform“ bezeichnet. Damit kann man den folgenden Satz formulieren:

Satz 3.2 :

Ein QLS nach Gl. (7.1) ist global steuerbar, wenn es in einer ASKNF gemäß Gl. (8.6) bzw. (8.7) vorliegt oder in diese überführt werden kann.

□

Beispiel 3.2 :

Anhand der Transformation (Indextausch)

$$\tilde{\boldsymbol{x}}(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_1(t) \\ \tilde{x}_1(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_1(t) \end{bmatrix} \qquad \text{(B 3.2-1)}$$

gelingt es, das QLS nach Gl. (B8.1-2) in die implizite Steuerbarkeits-Dreiecks-Normalform nach Gl. (8.7) mit der Zustandsdarstellung

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = \begin{bmatrix} -d\tilde{x}_1(t) + c\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(t) \\ a\tilde{x}_2(t) - b\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -e\tilde{x}_1(t) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \qquad \text{(B 3.2-2)}$$

zu überführen. Die Bedingungen $-e\tilde{x}_1(t) \neq 0$ und $\frac{\partial \tilde{f}_2}{\partial \tilde{x}_1} = -b\tilde{x}_2(t) \neq 0$ sind wegen $e \neq 0$ und $x_2(t) > 0$ bzw. $b \neq 0$ und $x_1(t) > 0$ erfüllt.

□

3.2.2 Lokale Steuerbarkeit

Mit Hilfe der Steuerbarkeits-Matrix kann die lokale Steuerbarkeit überprüft werden:

Satz 3.3 :

Ein QLS nach Gl. (7.1) ist *lokal steuerbar*, wenn die Steuerbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x})$ nach Gl. (8.11) im gesamten Definitionsbereich $\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{x}}$ den vollen Rang

$$\text{Rang } \boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) = n \quad ; \; \forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_{\boldsymbol{x}} \qquad (3.3)$$

besitzt.

□

Für QLS 3. Ordnung kann die Steuerbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) = [\boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{x}), \ldots, \boldsymbol{q}_{n-1}(\boldsymbol{x})]^T$ zeilenweise

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{q}_0(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^0 \\
\boldsymbol{q}_1(\boldsymbol{x}) &= [\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^1][\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^0] - [\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^1][\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^0] \\
\boldsymbol{q}_2(\boldsymbol{x}) &= \Big\{\boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^2\boldsymbol{I}_n \otimes [\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^0] + [\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^1][\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^1] - \\
&\quad - \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^2\boldsymbol{I}_n \otimes [\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^0] - [\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^1][\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^1]\Big\} \times \\
&\quad \times [\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^0] - \\
&\quad - [\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^1]\Big\{[\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^1][\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^0] - \\
&\quad - [\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^1][\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^0]\Big\}
\end{aligned}$$

angegeben werden.

Die lokale Steuerbarkeit eines QLS stellt nur eine notwendige Bedingung für die Existenz der Transformation zur SKNF nach Gl. (8.2), da zusätzlich die Integrierbarkeitsbedingung erfüllt sein muß.

Beispiel 3.3 :

Die Steuerbarkeits-Matrix lautet für das QLS aus Beispiel 8.1:

$$\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} 0 & bex_1(t)x_2(t) \\ -ex_2(t) & 0 \end{bmatrix} . \tag{B 3.3-1}$$

Da im gesamten Definitionsbereich

$$\text{Rang } \boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x}) = 2 = n \tag{B 3.3-2}$$

gilt, ist das QLS dort lokal steuerbar.

□

Auch bei der Untersuchung der lokalen Steuerbarkeit ist die durch Gl. (8.6) definierte ASKNF von besonderem Interesse. Für ein QLS dieser Form lautet die Steuerbarkeits-Matrix:

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_S(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} b(\tilde{\boldsymbol{x}}) & * & \ldots & * \\ 0 & b(\tilde{\boldsymbol{x}}) & * & \vdots \\ \vdots & \boldsymbol{0} & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & b(\tilde{\boldsymbol{x}}) \end{bmatrix} . \tag{3.3}$$

Die „*“ bezeichnen hierbei die nichtverschwindenden übrigen Matrizenelemente. Wegen der Dreiecks-Struktur von $\tilde{\boldsymbol{Q}}_S(\tilde{\boldsymbol{x}})$ und $b(\tilde{\boldsymbol{x}}) \neq 0$ ist die Rangbedingung nach Gl. (8.3) unabhängig von den Nichtlinearitäten $\boldsymbol{a}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ immer erfüllt. Damit ist auch die lokale Steuerbarkeit direkt gegeben und Satz 8.1 kann wie folgt erweitert werden:

Satz 3.4 :

QLS, die in der ASKNF nach Gl. (8.1) vorliegen oder sich in diese überführen lassen, sind *direkt* global und lokal steuerbar.

□

Beispiel 3.4 :

Für das transformierte QLS nach Gl. (B8.2-2) ergibt sich die Steuerbarkeits-Matrix zu:

$$\tilde{\boldsymbol{Q}}_S(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \begin{bmatrix} -e\tilde{x}_1(t) & 0 \\ 0 & be\tilde{x}_1(t)\tilde{x}_2(t) \end{bmatrix} . \tag{B 3.4-1}$$

Wie zu erwarten ist, bleibt die Struktureigenschaft lokale Steuerbarkeit im gesamten Definitionsbereich unter der Transformation erhalten.

□

3.2.3 Arbeitspunkt-Steuerbarkeit

Arbeitspunkt-Steuerbarkeits-Matrix

Zur Bildung der Arbeitspunkt-Steuerbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_{Ss}$ wird Gl. (7.1) um den stationären Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_s, u_s)$ linearisiert:

$$\boldsymbol{A} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)}{\partial \boldsymbol{x}}\right|_{\boldsymbol{x}_s,u_s} = \left[\boldsymbol{A}_1 + \boldsymbol{A}_2\mathcal{K}_\otimes^1 + (\boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^1)u(t)\right]\Big|_{\boldsymbol{x}_s,u_s} \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{b} = \left.\frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},u)}{\partial u}\right|_{\boldsymbol{x}_s,u_s} = \left[\boldsymbol{b}_0 + \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}_2\mathcal{K}_\otimes^0\right]\Big|_{\boldsymbol{x}_s,u_s} . \tag{3.3}$$

Das linearisierte System lautet dann

$$\left.\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{b}u(t) \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T\boldsymbol{x}(t) \qquad ; \quad \boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{x}(t_0) \end{aligned}\right\} . \tag{3.4}$$

Hierzu gehört die Arbeitspunkt-Steuerbarkeits-Matrix

$$\boldsymbol{Q}_{Ss} = \left[\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b},\ \ldots,\ \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{b}\right] , \tag{3.5}$$

womit gilt:

Satz 3.5 :

Ein QLS nach Gl. (7.1) ist *arbeitspunkt-steuerbar* in $(\boldsymbol{x}_s, u_s)$, wenn die Steuerbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_{Ss}$ in diesem Punkt die Rangbedingung

$$\text{Rang } \boldsymbol{Q}_{Ss} = n \tag{3.6}$$

erfüllt.

□

Wurde die Steuerbarkeits-Matrix $\boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x})$ zuvor berechnet, kann $\boldsymbol{Q}_{Ss}$ aus

$$\boldsymbol{Q}_{Ss} \;=\; \boldsymbol{Q}_S(\boldsymbol{x})|_{\boldsymbol{x}_s,u_s} \tag{3.7}$$

bestimmt werden. Dies bedeutet, daß für ein im gesamten Definitionsbereich lokal steuerbares QLS auch die Arbeitspunkt-Steuerbarkeit gegeben ist.

Beispiel 3.5 :

Für das QLS nach Gl. (B8.1-2) folgt aus $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_s, u_s) = \boldsymbol{0}$ und $u_s = 0$ der stationäre Punkt $\boldsymbol{x}_s = \begin{bmatrix} \frac{d}{c} & \frac{a}{b} \end{bmatrix}^T$, wofür das zugehörige linearisierte System die Matrizen

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ca}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ae}{b} \end{bmatrix} \tag{B 3.5-1}$$

besitzt. Die Arbeitspunkt-Steuerbarkeits-Matrix lautet:

$$\boldsymbol{Q}_{Ss} = [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{b}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{ade}{c} \\ -\frac{ae}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad . \tag{B 3.5-2}$$

Das System ist also in $\boldsymbol{x}_s$ arbeitspunkt-steuerbar.

□

4 Einsatz symbolverarbeitender Software

Die Anwendung der Analyseverfahren der QLS erfordert bereits für Systeme niedriger Ordnung umfangreiche analytische Berechnungen, die ohne Rechnerunterstützung praktisch kaum durchführbar sind (vgl. hierzu Jelali (1993b) am Beispiel der Beobachtbarkeits-Analyse sowie Abschnitt 8 dieser Arbeit am Beispiel der Steuerbarkeits-Analyse). Dazu werden in den letzten Jahren in verstärktem Maße symbolverarbeitende Programmiersprachen, wie z. B. MACSYMA, MAPLE und REDUCE, eingesetzt. Diese können aufwendige mathematische Rechenoperationen sowohl numerisch als auch symbolisch vornehmen. Die symbolische Verarbeitung erleichtert die Durchführung von Parameterstudien erheblich.

Zur Zeit sind Programmsysteme zu finden, die die Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme ermöglichen. Hier interessieren zum einen das Programmsystem MACNON und zum anderen das Programmsystem POLYCON[7]

Das MACSYMA-Programmsystem MACNON

MACNON enthält eine Anzahl von Analyseverfahren bezüglich

- Beobachtbarkeit,
- Steuerbarkeit und
- Stabilität,

sowie Syntheseverfahren bezüglich

- Beobachterentwurf und
- Zustandsregelung.

Außerdem stellt das Programmsystem einige wichtige mathematische Funktionen, wie z. B. die Berechnung der Jacobi-Matrix, die Taylorlinearisierung und die interaktive Untersuchung des Vorzeichens eines skalaren Ausdrucks bereit. Zur Ranguntersuchung wird eine interaktive Vorgehensweise vorgeschlagen, die darin besteht, die Determinante der jeweiligen Matrix symbolisch zu berechnen und auf Nullstellen, d. h. Singularitäten zu untersuchen. Eine ausführliche Beschreibung des Programmsystems findet man in Birk und Zeitz (1991) sowie Birk 1992.

Das MAPLE-Programmsystem POLYCON

POLYCON ermöglicht die Analyse nichtlinearer Polynomsysteme und zwar:

- Bestimmung von Ein-/Ausgangsdifferentialgleichungen,

[7]Das Programmsystem wird an der Universität Linköping (Schweden), hauptsächlich von Forsman (1992a und 1993), bearbeitet.

- Realisierung von Ein-/Ausgangsbeziehungen,
- (algebraische) Beobachtbarkeit,
- Zustandstransformation von Systemen und
- Berechnung der Transformation zwischen äquivalenten Polynom-Systemen.

Diese Funktionen sind als Routinen sowohl für zeitkontinuierliche als auch für zeitdiskrete Polynom-Systeme in die Share-Bibliothek von MAPLE implementiert. Die Beschreibung der einzelnen Routinen, die auf Verfahren der kommutativen Algebra basieren, ist Forsman (1992a und 1993) zu entnehmen.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit[8] beschäftigt sich mit der Steuer- und Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung, die eine nichtlineare Unterklasse der analytisch linearen Systeme bilden. Diese Analyse stellt eine Vorraussetzung zum Entwurf einer Zustandsregelung bzw. eines Zustandsschätzers der QLS dar.

Einige in der Literatur angegebene mathematische Verfahren zur Überprüfung der Beobachtbarkeit werden angegeben. Die meisten Verfahren stellen nur hinreichende und damit strenge Kriterien zur Verfügung. Die Gröbner Basen, die als Verallgemeinerung der Gaußschen Elimination angesehen werden können, sind dagegen ein sehr nützliches Werkzeug sowohl zur Überprüfung der globalen als auch der algebraischen Beobachtbarkeit. Die letztere Eigenschaft ist von besonderer Bedeutung, da sie einfacher nachgewiesen werden kann als die sonstigen Beobachtbarkeits-Formen (Jelali 1993b). Vor allem treten bei ihrer Überprüfung keine numerischen Probleme auf.

Im weiteren Teil der Arbeit erfolgt die Behandlung der in enger Verbindung mit der Beobachtbarkeit stehenden Eigenschaft der Steuerbarkeit. Es werden aus der Vielzahl der in der Literatur angegebenen Steuerbarkeits-Formen für nichtlineare Systeme die globale Steuerbarkeit, die lokale Steuerbarkeit und die Arbeitspunkt-Steuerbarkeit besprochen und auf die QLS spezialisiert. Es hat sich auch hier gezeigt, daß es sehr günstig ist, die QLS in eine allgemeine Steuerbarkeits-Normalform zu überführen, bei der sowohl die globale als auch die lokale Steuerbarkeit direkt gegeben ist. Dadurch wird die Anwendung komplizierter und strenger mathematischer Überprüfungsverfahren vermieden.

In Zukunft kann das Problem der algebraischen Steuer- und Beobachtbarkeit auf der Basis der Differentialalgebra behandelt werden, die in letzter Zeit in verstärktem Maße zur Analyse nichtlinearer Systeme herangezogen wird und sich als geeignet erweist (Weyh 1992 und Wey und Swaricek 1994). Sehr interessant ist vor allem der Zusammenhang zwischen den Problemkreisen der Steuer- und Beobachtbarkeit, der Minimalrealisierung und der Ein-/Ausgangsdarstellung durch Ein-/Ausgangsdifferentialgleichungen eines Systems, worauf nur vereinzelt in der Literatur eingegangen wird. Ein-/Ausgangsbeziehungen lassen sich mit Hilfe der Gröbner Basen elegant berechnen.

Da bisher nur akademische Beispiele zur Erläuterung der vorgestellten Analyseverfahren herangezogen wurden, ist es naheliegend, in weiteren Arbeiten die Anwendung auf technische Systeme, z. B. hydraulische und pneumatische Antriebe, vorzunehmen. Dies setzt die Bestimmung zustandsquadratischer Modelle für diese Systeme voraus, was entweder analytisch oder anhand von Identifikationsverfahren geschehen kann.

[8] Die Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes „Zustands- und Parameterschätzung bei analytischen Systemen mit linearer Steuerung“.

6 Literaturverzeichnis

Aeyels, D. 1984. Lokal and global Controllabilty for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 5. 19-26.

Birk, J. und M. Zeitz. 1991. *MACNON (MACsyma Programm for NONlinear systems).* User's Guide. Institut für Systemdynamik und Regelungstechnik. Universität Stuttgart.

Birk, J. 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben.* Diss. Universität Stuttgart. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 294. Düsseldorf: VDI-Verlag.

Brandin, V. N., Y. M. L. Kostyukovskii und G. N. Razorenov 1976. Global observability conditions for nonlinear dynamic systems. *Automation and Remote Control* 36. 1585-1591.

Char, B. W. u.a. 1991. *Maple V: Library Reference Manual.* Berlin u.a.: Springer.

Casti, J. L. 1985. *Nonlinear System Theory.* Orlando, San Diego u. a.: Academic Press.

Diop, S. 1991. Elimination in control theory. *Math. Control Signals Systems* 4. 17-32.

Diop, S. und Fliess, M. 1991. On nonlinear observability. *Proc. First European Control Conference.* Vol. 1. 152-157. Grenoble, France.

Forsman, K. 1991. *Constructive Commutative Algebra in Nonlinear Control Theory.* PhD thesis. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden. Linköping Studies in Science and Technology: Dissertations Nr. 261.

Forsman, K. 1992a. *POLYCON - a Maple Package for Polynomial and Rational Control Systems.* Technical Report LiTH-ISY-I-1386. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Forsman, K. 1992b. *Elementary Aspects of Constructive Commutative Algebra.* Technical Report LiTH-ISY-I-1395. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Forsman, K. 1992c. *Some Generic Results on Algebraic Observability and Connections with Realisation Theory.* Technical Report LiTH-ISY-I-1403. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Forsman, K. 1993. *POLYCON - Computer Algebra Software for Polynomial Control Systems.* Technical Report LiTH-ISY-R-1447. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Gauthier, J. P. und G. Bornard. 1981. Observability for any $u(t)$ of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-26. 922-926.

Hermann, R. und A. J. Krener. 1977. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-22. 728-740.

Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems: An Introduction.* Second Edition. Berlin u.a.: Springer.

Jelali, M. 1993a. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Diplomarbeit MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Jelali, M. 1993b. *Zur Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Forschungsbericht 11/93 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Keller, H. 1986. Entwurf nichtlinearer, zeitinvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. *Automatisierungstechnik* 34. 271-274 und 326-331.

Kou, S. R., D. L. Elliot und T. J. Tarn. 1973. Observability of nonlinear systems. *Information and Control* 22. 89-99.

Nijmeijer, H. und A. J. van der Schaft. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* Berlin u.a.: Springer.

Rothfuß, R., J. Schaffner und M. Zeitz. 1993. Rechnergestützte Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme. *VDI-Berichte* 1026. Düsseldorf: VDI-Verlag.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme.* München, Wien: R. Oldenbourg.

Schwarz, H. 1993. *Quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS).* Forschungsbericht 12/93 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

van der Schaft, A. J. 1989. Representing a nonlinear state space system as a set of higher-order differential equations in the inputs and outputs. *Systems & Control Letters* 12. 151-160.

Wey, T. 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme.* Forschungsbericht 10/92 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Wey, T. 1993. *Zur graphentheoretischen Charakterisierung des Rangs nichtlinearer Systeme.* Forschungsbericht 04/93 MSRT. Universität -GH- Duisburg.

Wey, T. und F. Svaricek. 1994. Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme. *MSRT. Universität -GH- Duisburg* (angenommener *at*-Beitrag).

Zeitz, M. 1983. Controllabilty canonical (phase-variable) form for non-linear time-variable systems. *International Journal of Control* 37. 1449-1457.

Zeitz, M. 1989. Canonical forms for nonlinear systems. *Proceedings of the IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design*. A. Isidori (Hrsg.). Oxford: Pergamon Press.