Realisierung und Beobachtbarkeit von Polynom-Systemen – ein differentialalgebraischer Ansatz

T. Wey und M. Jelali

Forschungsbericht Nr. 2/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Im vorliegenden Forschungsbericht wird ein differentialalgebraischer Ansatz zur Beschreibung nichtlinearer Systeme vorgestellt. Im Gegensatz zu anderen Ansätzen ist seine Anwendung weitgehend konsistent zur Theorie linearer Regelungssysteme. Insbesondere die *Realisierungsproblematik* und die damit eng verknüpfte *Beobachtbarkeitsanalyse* lassen sich mit Hilfe der Differentialalgebra einfach bearbeiten.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
GB	Gröbner Basis
PLS	Polynomsystem

Formelzeichen

$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{x})$	Systemvektor
$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$	Eingangsmatrix
$\boldsymbol{c}^T,\ \boldsymbol{C}$	Ausgangsmatrix
$c(\boldsymbol{x})$	Ausgangsfunktion
$\mathbb{C}$	Menge der komplexen Zahlen
$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)$	analytische Systemfunktion
K	differentieller Körper der rationalen Funktionen in $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \ldots$
k	differentieller Körper aller Koeffizienten einer System-Dgl.
$k{<}\boldsymbol{u}{>}$	differentieller Körper aller rationalen Funktionen in den Variablen $\boldsymbol{u}^{(i)}$ mit Koeffizienten in k
$k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}$	differentieller Körper aller rationalen Funktionen in den Variablen $\boldsymbol{u}^{(i)}$ und $\boldsymbol{y}^{(i)}$ mit Koeffizienten in k
L	differentieller Körper
M	differentieller Zwischenkörper
m	Dimension des Eingangsvektors $\boldsymbol{u}(t)$
n	Dimension des Zustandsvektors $\boldsymbol{x}(t)$
$\mathcal{O}_{n-1},\ \mathcal{O}_n$	Ideale
$P(\cdot)$	Polynom
p	Dimension des Ausgangsvektors $\boldsymbol{y}(t)$
$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$	Beobachtbarkeitsabbildung
$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$	Beobachtbarkeitsmatrix
$\mathbb{Q}$	Menge der rationalen Zahlen
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\boldsymbol{u}(t)$	Eingangsvektor
$\mathcal{U}_0$	offene Umgebung von $\boldsymbol{x}_0$
$\boldsymbol{x}(t)$	Zustandsvektor
$\boldsymbol{y}(t)$	Ausgangsvektor
ν	Anzahl Variablen in einem Polynom
Ω	differentieller Grundkörper

Sonstige Zeichen

$/$	Körpererweiterung
$k[x]$	Körper der Polynome in x mit Koeffizienten in k
$k(x)$	Körper der rationalen Funktionen in x mit Koeffizienten in k
$k\{x\}$	Körper der Polynome in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ mit Koeffizienten in k
$k<x>$	Körper der rationalen Funktionen in $x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots$ mit Koeffizienten in k
$\subset,\ \subseteq$	Teilmenge
$\prec,\ \succ$	Rangfolge-Relation
$\in$	Element von
$\forall$	für alle
$M_{\boldsymbol{f}},\ N_{\boldsymbol{f}}$	Differentialoperatoren
Trg	Transzendenzgrad
diff. Trg	differentieller Transzendenzgrad
Rang	Rang einer Matrix
Rang_{gen}	generischer Rang einer Matrix

1 Einleitende Übersicht

In den letzten Jahren entwickelte sich die Differentialalgebra, die von Ritt (1950) eingeführt wurde, zu einem exzellenten Werkzeug zur Analyse nichtlinearer Systeme. Dies ist hauptsächlich auf die zahlreichen Arbeiten von Fliess (u. a. 1986, 1990) zurückzuführen. Viele Eigenschaften nichtlinearer Systeme, wie z. B. Entkoppelbarkeit, Invertierbarkeit und Beobachtbarkeit, können anhand der neuen differentialalgebraischen Ansätze auf elegante Art und Weise analysiert werden.

Der vorliegende Forschungsbericht behandelt zwei eng miteinander verknüpfte Eigenschaften nichtlinearer Systeme –insbesondere Polynomsysteme–, nämlich die *Minimalrealisierung* und die *Beobachtbarkeit*. Die Analyse dieser Eigenschaften stellt eine Voraussetzung für die Auslegung von Regelungskonzepten dar. Beide Problemkreise werden auf der Basis der Differentialalgebra vorgestellt und diskutiert.

Im einzelnen gliedert sich die Arbeit wie folgt: Abschnitt 2 führt einige grundlegende Begriffe der Differentialalgebra ein, die zum Verständnis der weiteren Ausführungen unbedingt notwendig sind. Hauptsächlich wird auf die Algebraisierung nichtalgebraischer Differentialgleichungen und die sog. differentiellen Körper eingegangen.

Gegenstand des 3. Abschnitts ist die Beschreibung nichtlinearer Systeme mittels der neuen Werkzeuge der Differentialalgebra. Im Vordergrund stehen die Ein-/Ausgangsbeziehung und die Zustandsraumdarstellung eines Systems. Wichtige Begriffe, wie z. B. differentielle Körpererweiterung, Transzendenzgrad und Transzendenzbasis werden im Zusammenhang mit der Realisierung eines nichtlinearen Systems erläutert.

In Abschnitt 4 erfolgt die Behandlung des Konzepts der algebraischen Beobachtbarkeit von Diop und Fliess (1991) sowie deren Zusammenhang mit dem Begriff der Minimalrealisierung. Dieser Zusammenhang wird zusätzlich anhand eines technischen Beispiels erläutert. Anschließend wird die Beziehung der algebraischen Beobachtbarkeit zu anderen Beobachtbarkeitskonzepten, hauptsächlich zu denen von Hermann und Krener (1977) angegeben.

Abschnitt 5 befaßt sich mit dem Einsatz der sog. Gröbner Basen zur rechnergestützten Analyse der algebraischen Beobachtbarkeit sowie zur Berechnung von Ein-/Ausgangs-Differentialgleichungen.

Der letzte Abschnitt enthält eine Zusammenfassung des vorliegenden Berichts und gibt einen Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen im Bereich der hier behandelten Thematik.

2 Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra

Die *Differentialalgebra* wurde von Ritt (1950) mit der Intention eingeführt, die aus der klassischen Algebra bekannten Grundsätze so aufzubereiten, daß sie auf Differentialgleichungen anwendbar sind. Voraussetzung hierfür ist, daß sich die Differentialgleichungen algebraisch in ihren Variablen und deren Ableitungen verhalten. Sie dürfen also keine Funktionen wie *sin*, *cos* etc. enthalten, sondern müssen aus Polynomen bzw. rationalen Funtkionen aufgebaut sein. Diese Forderung schränkt den Wirkungsbereich der Differentialalgebra zunächst deutlich ein, es läßt sich aber zeigen, daß eine Reihe von nichtalgebraischen Differentialgleichungen in algebraische umgewandelt werden können (Fliess 1990).

2.1 Nichtalgebraische Differentialgleichungen

Betrachtet man z. B. die Differentialgleichung eines Pendels

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 \quad , \tag{2.1}$$

so kann diese in der vorliegenden Form nicht mit Hilfe der Differentialalgebra analysiert werden. Bedenkt man aber, daß

$$y = \sin x \tag{2.2}$$

die Lösung der algebraischen Differentialgleichung

$$\dot{x}^2 y^2 + \dot{y}^2 = \dot{x}^2 \tag{2.3}$$

darstellt, so kann Gl. (2.1) alternativ auch als algebraische Differentialgleichung

$$(x^{(3)})^2 + (\dot{x}\ddot{x})^2 = \omega^4 \dot{x}^2 \tag{2.4}$$

geschrieben werden[1].

Dieses Verfahren führt für *alle* die Differentialgleichungen zum Erfolg, deren Koeffizienten algebraischen Differentialgleichungen genügen (Fliess 1990). Modelle realer Systeme erfüllen im allgemeinen diese Voraussetzung, so daß sich mit Hilfe der Differentialalgebra eine große Anzahl von systemtheoretisch relevanten Fragestellungen bearbeiten läßt.

Im folgenden werden die grundlegenden Begriffe der Differentialalgebra diskutiert, die zur Beschreibung von nichtlinearen Systemen benötigt werden. Weitergehende Informationen sind z. B. in Fliess (1990) sowie Wey und Svaricek (1994) enthalten. Sie sind weitestgehend an die in der kommutativen Algebra verwendeten Nomenklatur angelehnt (z. B. Shapiro 1975, Meyberg 1976).

[1] Das Ergebnis aus Gl. (2.4) läßt sich leicht verifizieren, denn mit der Substitution $y = \sin x$ folgt aus Gl. (2.1) sowohl $\ddot{x} = -\omega^2 y$ als auch $x^{(3)} = -\omega^2 \dot{y}$. Stellt man dann Gl. (2.3) noch nach $\dot{x}^2$ um und setzt die gefundenen Ergebnisse in Gl. (2.4) ein, so folgt die Identität.

2.2 Differentielle Körper

Ein *differentieller Körper* K ist eine Menge, in der neben den Verknüpfungen Addition und Multiplikation auch eine *einfache Differentiation* d/dt definiert ist[2]. Diese entspricht den bekannten Regeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a+b) &= \dot{a}+\dot{b} \\ \frac{d}{dt}(ab) &= \dot{a}b+a\dot{b} \qquad \forall\, a,b \in K \quad . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Ein Element c des differentiellen Körpers K wird als *Konstante* bezeichnet, wenn $\dot{c}=0$ gilt. Die Menge aller Konstanten in K ist demzufolge eine Teilmenge von K. Typische Beispiele für solche *trivialen* Mengen sind $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$.

Für die differentialalgebraische Definition eines Systems ist der Begriff der *differentiellen Körpererweiterung* von wesentlichem Interesse. Man betrachtet hierzu zwei differentielle Körper L und K, für die $K \subseteq L$ gilt. Die zugehörige Körpererweiterung, die mit L/K bezeichnet wird, kann grundsätzlich einer von zwei Klassen zugeordnet werden:

a) Ein Element $a \in L$ ist *differentiell algebraisch* über K, wenn eine Differentialgleichung $P(a,\dot{a},\ldots,a^{(\alpha)})=0$ existiert, wobei P einem Polynom beliebigen Grades mit Koeffizienten in K entspricht.

   Eine Körpererweiterung L/K heißt differentiell algebraisch, wenn alle Elemente von L differentiell algebraisch über K sind.

b) Ein Element $a \in L$ ist *differentiell transzendent* über K, wenn es nicht differentiell algebraisch ist. Existiert wenigstens ein Element von L, das differentiell transzendent ist, so wird die Körpererweiterung L/K ebenfalls als differentiell transzendent bezeichnet.

   Die maximale Anzahl von transzendenten und untereinander unabhängigen Elementen in L ist eine wichtige Größe für die Beschreibung von Systemen. Sie wird als *differentieller Transzendenzgrad von* L/K bezeichnet und im weiteren durch

$$\text{diff. Trg } L/K \tag{2.6}$$

   abgekürzt.

Wird ein Körper M so gewählt, daß $K \subseteq M \subseteq L$ gilt, dann läßt sich der differentielle Transzendenzgrad von L/K in Analogie zur kommutativen Algebra indirekt bestimmen (Fliess 1986):

$$\text{diff. Trg } (L/K) = \text{diff. Trg } (L/M) + \text{diff. Trg } (M/K) \quad . \tag{2.7}$$

[2]Die hier gemachten Betrachtungen bleiben auf gewöhnliche Differentialgleichungen beschränkt, d. h., daß die Aussagen nur für *gewöhnliche differentielle Körper* mit einer einzelnen Differentiation d/dt zutreffen, nicht aber für Körper mit mehreren partiellen Differentiationen.

3 Differentialalgebraische Beschreibung nichtlinearer Systeme

Im folgenden wird aufgezeigt, wie die bisher erläuterten Begriffe der Differentialalgebra gezielt auf die Problemstellungen, die sich bei der Analyse nichtlinearer Systeme ergeben, angewendet werden können. Die Betrachtungen sind aus Gründen der Anschaulichkeit auf analytisch lineare Systeme (ALS) mit dem Zustandsmodell[3]

$$\sum_{ALS} \quad \begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{a}(\boldsymbol{x}(t)) + \boldsymbol{B}(\boldsymbol{x}(t))\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) \qquad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \quad \boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m; \quad \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^p \end{aligned} \tag{3.1}$$

beschränkt. Aber auch allgemeinere Systemklassen als diese lassen sich mit Hilfe der Differentialalgebra beschreiben. Bevor näher auf Zustandsraumdarstellungen eingegangen wird, soll zunächst die differentialalgebraische Beschreibung von Ein-/Ausgangssystemen erläutert werden.

3.1 Ein-/Ausgangsbeschreibung nichtlinearer Systeme

In der Algebra ist es üblich, mit einer umfassenden Menge als Grundkörper zu arbeiten und die für eine Problemlösung benötigten Elemente als Teilmenge dieses Grundkörpers anzusehen. In der Differentialalgebra geht man analog vor, indem in einem ersten Schritt Ω als differentieller Grundkörper definiert wird. D. h., Ω genügt den in Abschnitt 2 formulierten Anforderungen an einen differentiellen Körper und beinhaltet alle Elemente.

Mit $k \subset \Omega$ wird ein differentieller Körper bezeichnet, der zumindest alle Koeffizienten der zu betrachtenden System-Differentialgleichungen beinhaltet. Im allgemeinen reichen für k die Mengen der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ oder reellen Zahlen $\mathbb{R}$ aus. Weil differentielle Körper Ableitungen $\{\dot{a}, \ldots, a^{(\alpha)}\}$ als Elemente enthalten können, bieten sich aus Gründen der Übersicht die folgenden Abkürzungen an:

- $k\{x\}$ steht für alle Polynome in den Variablen $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots\}$ mit Koeffizienten aus k,
- $k<x>$ steht für alle rationalen Funktionen in den Variablen $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, \ldots\}$ mit Koeffizienten aus k.

Für nichtdifferentielle Körper werden dementsprechend die Symbole:

- $k[x]$ steht für alle Polynome in der Variablen x mit Koeffizienten aus k,
- $k(x)$ steht für alle rationalen Funktionen in der Variablen x mit Koeffizienten aus k

[3]Die Annahme einer linearen Ausgangsgleichung $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t)$ bedeutet keine Einschränkung der Allgemeingültigkeit (Schwarz 1991).

verwendet.

Der differentielle Körper $k{<}\boldsymbol{u}{>}$ entspricht demnach der Menge aller rationalen Funktionen in den Elementen $\boldsymbol{u} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ sowie deren zeitlichen Ableitungen mit Koeffizienten in k. Die Ein-/Ausgangs-Differentialgleichungen, die ein Regelungssystem mit Eingangsvektor $\boldsymbol{u}(t)$ und Ausgangsvektor $\boldsymbol{y}(t)$ beschreiben, werden nun mittels der Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ modelliert, wobei der differentielle Körper $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}$ gegenüber $k{<}\boldsymbol{u}{>}$ zusätzlich die p Ausgangsgrößen $y_1, \ldots, y_p$ sowie deren zeitliche Ableitungen beinhaltet:

Definition 3.1 (Rudolph 1992)
Ein nichtlineares Ein-/Ausgangssystem $\sum$ mit dem Eingang $\boldsymbol{u} = \{u_1, \ldots, u_m\}$ und dem Ausgang $\boldsymbol{y} = \{y_1, \ldots, y_p\}$ ist eine differentielle Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$, die differentiell algebraisch ist. Folglich gilt für den differentiellen Transzendenzgrad der Zusammenhang

$$\text{diff. Trg } k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>} = 0 \quad . \tag{3.2}$$

□

Die Eingangsgrößen u_j sind hierbei als voneinander unabhängig angenommen, d.h.

$$\text{diff. Trg } k{<}\boldsymbol{u}{>}/k = \text{diff. Trg } k{<}u_1, \ldots, u_m{>}/k = m \quad . \tag{3.3}$$

Definition 3.1 gibt wieder, daß für ein System $\sum$[4] die Komponenten von $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{y}$ durch eine endliche Anzahl impliziter Differentialgleichungen verknüpft sind:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ddot{\boldsymbol{y}}, \ldots) = \boldsymbol{0} \quad . \tag{3.4}$$

Diese Aussage korrespondiert mit der in der Regelungstheorie üblichen Definition eines Systems (Isidori 1989, Schwarz 1991, Föllinger 1992). Im weiteren werden die Betrachtungen auf Systeme beschränkt, die durch algebraische Differentialgleichungen in $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{y}$ beschrieben werden können. Andere Systeme können eventuell unter Zuhilfenahme der in Abschnitt 2.1 vorgestellten Methode algebraisiert werden.

3.2 Zustandsraumdarstellung nichtlinearer Systeme

Anstatt ein System durch Differentialgleichungen höherer Ordnungen zu beschreiben, ist es oftmals zweckmäßiger, ein Zustandsmodell zu verwenden. Hierbei wird mittels einer Zustandsvariablen $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ein System durch mehrere, im allgemeinen miteinander gekoppelte, Differentialgleichungen erster Ordnung dargestellt. Für ein ALS erhält man somit die Zustandsraumdarstellung (3.1).

[4] Die Bezeichnung $\sum$ steht in den folgenden Abschnitten für die ein System beschreibende Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$.

Ein Zustand $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ sollte hierbei als eine Menge mit n Elementen aus Ω angesehen werden, so daß zum einen alle zeitlichen Ableitungen $\{\dot{x}_k | \ k = 1, \ldots, n\}$ und zum anderen die Ausgangsgrößen $\{y_i | \ i = 1, \ldots, p\}$ Funktionen in den Variablen $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \ldots$ sind (Fliess 1986).

Neben dem in Definition 3.1 eingeführten differentiellen Transzendenzgrad eines Systems $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ ist der *(nichtdifferentielle) Transzendenzgrad* dieser Körpererweiterung eine wesentliche Kenngröße. Er entspricht, vollkommen analog zum differentiellen Transzendenzgrad, der maximalen Anzahl von Elementen a in $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}$, die voneinander (nichtdifferentiell) unabhängig sind und für die kein (nichtdifferentielles) Polynom $P(a^0, a, a^2, \ldots)$ $= 0$ mit Koeffizienten in $k{<}\boldsymbol{u}{>}$ existiert. Er wird im folgenden mit n_{min} bezeichnet:

$$n_{min} = \mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>} \quad . \tag{3.5}$$

Eine Menge von n_{min} transzendenten Elementen wird auch als *Transzendenzbasis* bezeichnet.

Wählt man eine beliebige Transzendenzbasis zu $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ aus und bezeichnet diese mit $\boldsymbol{x} = \{x_1, \ldots, x_{n_{min}}\}$, so führt dies zu folgenden Abhängigkeiten:

$$\begin{aligned} P_k(\dot{x}_k, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(p_k)}) &= 0\ ; \quad k = 1, \ldots, n_{min} \\ Q_i(y_i, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(q_i)}) &= 0\ ; \quad i = 1, \ldots, p \quad . \end{aligned} \tag{3.6}$$

P_k und Q_i stehen hierbei für Polynome mit Koeffizienten in k.

Die impliziten Differentialgleichungen (3.6) beschreiben die wohl allgemeinste Form einer Realisierung (Diop 1992), entsprechende explizite Zusammenhänge sind unter Umständen nur lokal gültig. Das Vorhandensein von zeitlichen Ableitungen der Eingangsgröße auch in den expliziten Differentialgleichungen wird durch eine Spezialisierung auf die Klasse der ALS ausgeschlossen. Es ist jedoch möglich, durch Zustandstransformation die maximal vorkommende Ordnung von Eingangsableitungen in einem System zu verringern (Delaleau 1992).

Eine Transformation eines Zustandsvektors in einen anderen wird aus differentialalgebraischer Sicht wiederum durch die Existenz von Polynomen charakterisiert. Nimmt man z. B. zwei Zustände $\boldsymbol{x}$ und $\bar{\boldsymbol{x}} = \{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_{n_{min}}\}$, so sind deren Elemente durch die Beziehungen

$$\begin{aligned} \bar{P}_k(x_i, \bar{\boldsymbol{x}}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(\bar{p}_i)}) &= 0\ ; \quad i = 1, \ldots, n_{min} \\ \bar{Q}_i(\bar{x}_i, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ldots, \boldsymbol{u}^{(\bar{q}_i)}) &= 0 \end{aligned} \tag{3.7}$$

miteinander verknüpft, wobei die Polynome $\bar{P}_k$ und $\bar{Q}_i$ nur Koeffizienten in k aufweisen.

Obwohl die grundsätzliche Beschreibung von Zustandsmodellen mit Hilfe der Differentialalgebra keine Probleme bereitet, ist es verhältnismäßig aufwendig, aus einer gegebenen

Ein-/Ausgangsbeziehung eine zugehörige Zustandsraumdarstellung abzuleiten. Denn neben der Tatsache, daß das Realisierungsproblem im allgemeinen nicht eindeutig lösbar ist, müssen eventuell Ungleichungen zu vorhandenen Ein-/Ausgangsgleichungen hinzugefügt werden, um eine Realisierung zu finden (Diop 1991). Ansätze zur Lösung des Realisierungsproblems sind z. B. in Forsman (1991a) enthalten.

4 Beobachtbarkeit nichtlinearer Systeme

Unter dem Begriff der *Beobachtbarkeit* eines Systems $\sum$ ist grundsätzlich die Problematik zu verstehen, aus Kenntnis der Ein- und Ausgangsgrößen die Zustandsgrößen zu ermitteln. Das heißt, daß dieser Begriff in keiner Weise eine innere Systemeigenschaft wiedergibt, sondern vielmehr abhängt von der Existenz und Verfügbarkeit einer Zustandsraumdarstellung. Im weiteren wird die algebraische Natur des Konzeptes der Beobachtbarkeit von ALS diskutiert und, darauf aufbauend, die Eignung der Differentialalgebra zur Untersuchung dieser Kenngröße verifiziert. Anschließend erfolgt die Behandlung der Beziehung der algebraischen Beobachtbarkeit zu anderen Konzepten.

4.1 Algebraische Beobachtbarkeit

Eng verknüpft mit der Analyse der Beobachtbarkeit ist der Begriff der *Minimalrealisierung*. Denn es läßt sich der folgende direkte Zusammenhang angeben:

Satz 4.1 (Diop 1992)
Wenn für ein Ein-/Ausgangssystem $\sum$ eine Zustandsdarstellung gemäß Gl. (3.1) existiert, so sind die beiden folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Die Zustandsdarstellung (3.1) von $\sum$ ist eine Minimalrealisierung, d. h. die Anzahl n der Zustände stimmt mit der Ordnung von $\sum$ überein.

(ii) $\sum$ ist beobachtbar.

□

Die Ordnung eines Systems entspricht hierbei dem im vorherigen Abschnitt definierten Transzendenzgrad n_{min} eines Systems:

$$n_{min} = \mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>} \quad . \tag{4.1}$$

Anmerkung:
Der hier verwendete Begriff der Minimalrealisierung steht in einem Widerspruch zu dem von Kalman (1969) gefundenen Ergebnis für LS, daß ein minimal realisiertes System immer *steuerbar* ist. Dies liegt daran, daß Kalmans Ansatz sich an der Übertragungsmatrix orientiert und dadurch die Anfangswerte unberücksichtigt bleiben können (Fliess und Glad 1993):

Beispiel 4.1
Untersucht man das durch die Differentialgleichung $\dot{y} = \dot{u}$ beschriebene LS, so kommt der hier verwendete Ansatz in Gl. (4.1) zu dem Ergebnis, daß eine Minimalrealisierung die Ordnung $n_{min} = 1$ hat:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0 \\ y &= x + u \quad ; \qquad x(t_0) = x_0 \quad . \end{aligned}$$

Dieses System ist wegen Satz 4.1 beobachtbar. Allerdings ist es offensichtlich *nicht* steuerbar.

Demgegenüber ist die Übertragungsfunktion für $\dot{y} = \dot{u}$ durch $F(s) = 1$ gegeben, damit hat eine minimale Realisierung nach Kalman die Ordnung 0 und ist vollständig steuer- und beobachtbar. Allerdings vernachlässigt dieser Ansatz die Anfangsbedingung x_0.

Anschaulich bedeutet Satz 4.1, daß eine Systemrealisierung dann minimal (und damit beobachtbar) ist, wenn die Zustandsvariablen gerade eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>}$ bilden. Voraussetzung hierfür ist allerdings, daß $\sum$ durch algebraische Ein-/Ausgangs-Differentialgleichungen beschrieben werden kann. Wird von einem nichtalgebraischen System ausgegangen und das in Abschnitt 2.1 besprochene Verfahren zur Algebraisierung verwendet, so ist die Aussage von Satz 4.1 für das algebraisierte System richtig. Für das Originalsystem muß Satz 4.1 aber nicht gelten, da die Algebraisierung zu einer Änderung der Ordnung führen kann (vgl. Fliess 1986).

Berücksichtigt man Gl. (2.7), die sowohl für den nichtdifferentiellen als auch den differentiellen Transzendenzgrad Gültigkeit hat, so führt dies zu einer weiteren Möglichkeit zur algebraischen Charakterisierung der Beobachtbarkeit. Denn wenn $\boldsymbol{x}$ eine Transzendenzbasis zu $\sum$ mit n_{min} Elementen bildet, können nach Gl. (3.6) alle Ausgangsgrößen y_j durch Differentialgleichungen in den Variablen $\boldsymbol{x}$ und $\boldsymbol{u}, \dot{\boldsymbol{u}}, \ddot{\boldsymbol{u}}, \ldots$ beschrieben werden. Es gilt deshalb

$$\mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}(\boldsymbol{x})/k{<}\boldsymbol{u}{>} = n_{min} = \mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>} \quad , \tag{4.2}$$

so daß nach Gl. (2.7) der Zusammenhang

$$\begin{aligned} \mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}(\boldsymbol{x})/k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>} &= \mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}(\boldsymbol{x})/k{<}\boldsymbol{u}{>} - \mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}/k{<}\boldsymbol{u}{>} \\ &= n_{min} - n_{min} = 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

folgende Definition ermöglicht:

Definition 4.1 (Diop und Fliess 1991, Forsman 1991a)
Ein System $\sum$ wird als algebraisch beobachtbar bezeichnet, wenn gilt:

$$\mathrm{Trg}\ k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}(\boldsymbol{x})/k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>} = 0 \quad . \tag{4.4}$$

□

Ein System ist demzufolge algebraisch beobachtbar, wenn alle seine Zustandsgrößen x_i algebraisch über $k{<}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}{>}$ sind.

Beispiel 4.2 Ein frei rotierender Starrkörper, wie z. B. ein Satellit, kann durch die nichtlinearen Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
I_1\dot{\omega}_1(t) &= (I_2 - I_3)\omega_2(t)\omega_3(t) + u_1 \\
I_2\dot{\omega}_2(t) &= (I_3 - I_1)\omega_1(t)\omega_3(t) + u_2 \\
I_3\dot{\omega}_3(t) &= (I_1 - I_2)\omega_1(t)\omega_2(t) + u_3
\end{aligned}
$$

beschrieben werden (Frayman 1974). Die Eingangsgrößen u_i entsprechen den angreifenden Drehmomenten in Richtung der orthonormalen Achsen $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, I_i den Hauptträgheitsmomenten und ω_i den Winkelgeschwindigkeiten. Als Ausgangsgröße wird ω_1 verwendet. Die Analyse eines solchen Systems ist z. B. für die Höhenregelung von Raumfahrzeugen von Interesse (Kang und Krener 1991).

Mit den Abkürzungen

$$
\alpha_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}\ ; \quad \alpha_2 = \frac{1}{I_1}\ ; \quad \beta_1 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}\ ; \quad \beta_2 = \frac{1}{I_2}\ ; \quad \gamma_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}\ ; \quad \gamma_2 = \frac{1}{I_3}
$$

erhält man das System als Zustandsmodell eines ALS:

$$
\sum\nolimits_{bsp1} \qquad
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \begin{bmatrix} \alpha_1 x_2 x_3 \\ \beta_1 x_1 x_3 \\ \gamma_1 x_1 x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{u} \\
y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Fragestellung, ob aus der Kenntnis einer Winkelgeschwindigkeit sowie der wirkenden Drehmomente die gesamte Körperbewegung bestimmt werden kann, läßt sich durch eine Analyse der Beobachtbarkeit klären.

In differentialalgebraischer Schreibweise ist das Beispielsystem als Körpererweiterung $\mathbb{R}<u_1, u_2, u_3, y>/\mathbb{R}<u_1, u_2, u_3>$ beschreibbar. Gemäß Gl. (4.1) ist für die Elemente der Menge $\{y, \dot{y}, \ddot{y}, \ldots\}$ zu prüfen, ob diese algebraisch oder transzendent über der Menge $\mathbb{R}<u_1, u_2, u_3>$ sind. Für die zeitlichen Ableitungen gilt

$$
\begin{aligned}
y &= x_1 \\
\dot{y} &= \alpha_1 x_2 x_3 + \alpha_2 u_1 \\
\ddot{y} &= \alpha_1 \dot{x}_2 x_3 + \alpha_1 x_2 \dot{x}_3 + \alpha_2 \dot{u}_1 \\
&= \alpha_1\beta_1 x_1 x_3^2 + \alpha_1\beta_2 x_3 u_2 + \alpha_1\gamma_1 x_1 x_2^2 + \alpha_1\gamma_2 x_2 u_3 + \alpha_2 \dot{u}_1 \quad .
\end{aligned}
$$

Zunächst wird eine generische Betrachtung vorgenommen, so daß die Zahlenwerte von $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ und y sowie der Parameter $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ unberücksichtigt bleiben. Dann ist

y nicht als rationale Funktion in $\boldsymbol{u}$ darstellbar, ebenso kann $\dot{y}$ nicht ausschließlich durch $\boldsymbol{u}$ beschrieben werden. Löst man die beiden ersten Gleichungen nach x_1 und x_2 auf

$$\begin{aligned} x_1 &= y \\ x_2 &= \frac{\dot{y} - \alpha_2 u_1}{\alpha_1 x_3} \end{aligned}$$

und setzt das Ergebnis in die Gleichung für $\ddot{y}$ ein, so führt dies zu einer Funktion $\ddot{y} = f(\boldsymbol{u}, x_3)$. Also ist auch $\ddot{y}$ transzendent über $k<\boldsymbol{u}>$, eine Minimalrealisierung muß demzufolge mindestens die Ordnung 3 aufweisen. Das System $\sum_{bsp1}$ ist bereits minimal und damit algebraisch beobachtbar.

Eventuell auftretende Singularitäten können ebenfalls analysiert werden. Gilt z. B. $\alpha_1 = 0$, so sind sowohl $\dot{y} = \alpha_2 u_1$, $\ddot{y} = \alpha_2 \dot{u}_1$ als auch alle weiteren Ableitungen von y algebraisch über $k<\boldsymbol{u}>$. Eine Minimalrealisierung hätte folglich die Ordnung 1, so daß $\sum_{bsp1}$ nicht beobachtbar wäre.

Dieses Verfahren zur Analyse der Beobachtbarkeit kann relativ einfach als Algorithmus in einer symbolverarbeitenden Sprache realisiert werden. Hierauf wird im Abschnitt 5 näher eingegangen.

4.2 Beziehung zu anderen Beobachtbarkeitsformen

In Diop und Fliess (1991) erfolgte bereits die Herleitung des Zusammenhangs zwischen der algebraischen Beobachtbarkeit und der lokal weichen Beobachtbarkeit nach Hermann und Krener (1977) mit Hilfe der sog. Kähler-Differentiale. Auf diesen Zusammenhang wird im folgenden eingegangen.

Betrachtet werden hier Eingrößen-Polynomsysteme (PLS) der Form

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \sum_{i=1}^{r} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_{\otimes}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^{s} \boldsymbol{B}_j \boldsymbol{x}_{\otimes}^{(j)}(t) u(t) := \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) \\ y(t) &= \boldsymbol{c}^T \boldsymbol{x}(t) := c(\boldsymbol{x}) \quad ; \quad \boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n \quad , \end{aligned} \tag{4.5}$$

die eine Unterklasse der ALS bilden. Zur übersichtlichen Darstellung wird die Kronecker-Potenznotation

$$\boldsymbol{x}_{\otimes}^{(i)}(t) = \underbrace{\boldsymbol{x}(t) \otimes \ldots \otimes \boldsymbol{x}(t)}_{i-\text{mal}} \tag{4.6}$$

verwendet. Zunächst sei folgende Definition angegeben:

Definition 4.2 (Hermann und Krener 1977, Schwarz 1991)

i) Zwei verschiedene Anfangszustände $\boldsymbol{x}_a(0)$ und $\boldsymbol{x}_b(0)$ des PLS nach Gl. (4.5) heißen nicht unterscheidbar, wenn für jedes Eingangssignal $u(t) \in \mathcal{U}$ gilt: $y_a(t) = y_b(t) \;\; \forall t \in [0, T]$. Hierbei sind $y_a(t)$ und $y_b(t)$ die Systemantworten für $u(t)$ und $\boldsymbol{x}_a(0)$ bzw. $u(t)$ und $\boldsymbol{x}_b(0)$. T sei eine beliebige, aber feste reelle Zahl.

ii) Ein PLS nach Gl. (4.5) heißt lokal weich beobachtbar in $\boldsymbol{x}_0$, wenn eine offene Umgebung $\mathcal{U}_0$ von $\boldsymbol{x}_0$ so existiert, daß für jede offene Umgebung $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}_0$ die Menge der nicht unterscheidbaren Punkte $\boldsymbol{x}_0$ selbst ist.

iii) Das PLS heißt lokal weich beobachtbar, wenn die Eigenschaft ii) für alle $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt.

□

Es gibt ein mathematisches Kriterium zur Überprüfung der lokal weichen Beobachtbarkeit:

Satz 4.2
Das PLS nach nach Gl. (4.5) ist lokal weich beobachtbar, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ im gesamten Zustandsraum $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ den vollen Rang

$$\text{Rang } \boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = n \tag{4.7}$$

besitzt.

□

Die Beobachtbarkeitsmatrix $\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$ kann anhand des Differentialoperators

$$\begin{aligned} N_{\boldsymbol{f}} c(\boldsymbol{x}) &= c(\boldsymbol{x}) \frac{\partial \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u)}{\partial \boldsymbol{x}} + \boldsymbol{f}^T(\boldsymbol{x}, u) \frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} + \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}^T(t) \left[\frac{\partial}{\partial \bar{\boldsymbol{u}}} \right]^T \quad , \\ N_{\boldsymbol{f}}^k c(\boldsymbol{x}) &= N_{\boldsymbol{f}}(N_{\boldsymbol{f}}^{k-1} c(\boldsymbol{x})) \qquad \text{mit} \quad N_{\boldsymbol{f}}^0 c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) \quad ; \quad \bar{\boldsymbol{u}} = \left[u, \dot{u}, \ldots, u^{n-2} \right] \end{aligned}$$

durch

$$\boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} N_{\boldsymbol{f}}^0 \\ N_{\boldsymbol{f}} \\ \vdots \\ N_{\boldsymbol{f}}^{n-1} \end{bmatrix} \frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{4.8}$$

gebildet werden. Sie ist die Jacobi-Matrix der Beobachtbarkeitsabbildung $\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$, die den Systemzustand und das Eingangssignal auf das Ausgangssignal abbildet. Sie kann mit dem Differentialoperator

$$\begin{aligned} M_{\boldsymbol{f}} c(\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, u) + \frac{\partial c(\boldsymbol{x})}{\partial \bar{\boldsymbol{u}}} \dot{\bar{\boldsymbol{u}}}(t) \quad , \\ M_{\boldsymbol{f}}^k c(\boldsymbol{x}) &= M_{\boldsymbol{f}}(M_{\boldsymbol{f}}^{k-1} c(\boldsymbol{x})) \qquad \text{mit} \qquad M_{\boldsymbol{f}}^0 c(\boldsymbol{x}) = c(\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

in der kompakten Form

$$\boldsymbol{q}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = \begin{bmatrix} M_{\boldsymbol{f}}^0 \\ M_{\boldsymbol{f}} \\ \vdots \\ M_{\boldsymbol{f}}^{n-1} \end{bmatrix} c(\boldsymbol{x}) \tag{4.9}$$

dargestellt werden. Mit der Beobachtbarkeitsabbildung bzw. der Beobachtbarkeitsmatrix gilt:

Satz 4.3 (Forsman 1991a)
Ein PLS nach Gl. (4.5) ist dann und nur dann *algebraisch beobachtbar*, wenn die zugehörige Beobachtbarkeitsabbildung dominant ist, d. h. wenn alle Komponenten dieser Abbildung algebraisch unabhängig sind. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Beobachtbarkeitsmatrix die Rangbedingung

$$\mathrm{Rang}_{gen}\, \boldsymbol{Q}_B(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}}) = n \tag{4.10}$$

erfüllt.

□

Es gibt also einige wesentliche Unterschiede zwischen dem oben vorgestellten Konzept der algebraischen Beobachtbarkeit und dem der lokal weichen Beobachtbarkeit von Hermann und Krener (1977) gemäß Definition 4.2. Einerseits stellt die Rangbedingung für die algebraische Beobachtbarkeit eine notwendige *und* hinreichende, für die lokale weiche Beobachbarkeit aber nur eine hinreichende Bedingung dar. Andererseits muß die Rangbedingung bei der letzteren Eigenschaft generell (überall) gelten, während sie bei der anderen nur strukturell (generisch) erfüllt sein muß. Damit werden die Probleme aufgrund evtl. auftretender Singularitäten umgangen. Die Überprüfung der algebraischen Beobachtbarkeit ist daher wesentlich einfacher als die der lokal weichen Beobachtbarkeit.

5 Gröbner Basen und Rechnereinsatz

Nun besteht die Aufgabe darin, die bereits in Abschnitt 3.1 angesprochene Körpererweiterung $k<\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}>/k<\boldsymbol{u}>$, die ein in Ein-/Ausgangsform gegebenes System beschreibt, zu bestimmen. Weil dies bereits für Systeme niedriger Ordnung umfangreiche analytische Berechnungen erfordert, ist eine Rechnerunterstützung praktisch unentbehrlich. Dazu werden in den letzten Jahren in verstärktem Maße symbolverarbeitende Programmiersprachen, wie z. B. Maple oder Macsyma, eingesetzt.

Gl. (4.5) lautet in Komponenten-Schreibweise:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= a_1(\boldsymbol{x},u) + b_1(\boldsymbol{x},u)u(t) = f_1(\boldsymbol{x},u) \\
\dot{x}_2(t) &= a_2(\boldsymbol{x},u) + b_2(\boldsymbol{x},u)u(t) = f_2(\boldsymbol{x},u) \\
&\vdots \\
\dot{x}_n(t) &= a_n(\boldsymbol{x},u) + b_n(\boldsymbol{x},u)u(t) = f_n(\boldsymbol{x},u) \\
y(t) &= c(\boldsymbol{x}) \quad .
\end{aligned}
$$

Gesucht wird ein Differentialpolynom nur in u und y für das Ideal

$$I = (\dot{x}_1(t) - f_1(\boldsymbol{x},u), \dot{x}_2(t) - f_2(\boldsymbol{x},u), \ldots, \dot{x}_n(t) - f_n(\boldsymbol{x},u), y - c(\boldsymbol{x})) \tag{5.1}$$

in $k\{\boldsymbol{x},u,y\}$. Um die Anzahl der Variablen in I zu reduzieren, betrachtet man das equivalente Ideal (Forsman 1991)

$$\mathcal{O}_n = \left(y(t) - M_{\boldsymbol{f}}^0 c(\boldsymbol{x}), \dot{y}(t) - M_{\boldsymbol{f}} c(\boldsymbol{x}), \ldots, y^{(n)}(t) - M_{\boldsymbol{f}}^n c(\boldsymbol{x})\right) \quad . \tag{5.2}$$

Demzufolge müssen in $\mathcal{O}_n$ die Variablen x_i eliminiert werden, um die gesuchte Ein-/Ausgangs-Differentialgleichung zu erhalten. Dies kann anhand der sog. Gröbner Basen verwirklicht werden. Denn es gilt:

Satz 5.1 (Forsman 1991a)
Ein Gröbner Basis für $\mathcal{O}_n$ mit einer Rangfolge vom Typ $\boldsymbol{x} \succ \{u, \dot{u}, \ldots, u^{(n-1)}, y, \dot{y}, \ldots, y^{(n)}\}$ enthält eine Ein-/Ausgangsbeziehung für das PLS nach Gl. (4.5).

□

Die Rangfolge gibt an, welche Variablen zuerst eliminiert werden sollen:

Definition 5.1 (Forsman 1991a)
Eine *Rangfolge* der Variablen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist eine Permutation dieser Symbole. Zur Kennzeichnung dieser Rangfolge eignet sich die Relation $\prec$ bzw. $\succ$ mit den Eigenschaften:

$x_i \prec x_j$: x_j hat eine höhere Rangordnung als x_i,
$\boldsymbol{x} \prec \boldsymbol{y}$: alle Komponenten des Vektors $\boldsymbol{y}$ besitzen eine höhere Rangordnung als die von $\boldsymbol{x}$.

□

Der Zusammenhang zur algebraischen Beobachtbarkeit kann auch folgendermaßen formuliert werden:

Satz 5.2 (Forsman 1991a)
Ein PLS nach Gl. (4.5) ist algebraisch beobachtbar, wenn es keine Ein-/Ausgangs-Differentialgleichung der Ordnung kleiner als n in $y(t)$ existiert.

□

Die Gröbner Basen sind ein nützliches mathematisches Werkzeug der kommutativen Algebra und entsprechen den konstruktiven Methoden der Differentialalgebra, den sog. Rittschen charakteristischen Mengen . Sie können auch als Verallgemeinerung der Gaußschen Elimination angesehen werden. Ein Vorteil der Verwendung der Gröbner Basen zur Eliminierung von Variablen liegt in der Tatsache, daß diese in vielen symbolverarbeitenden Programmiersprachen, wie z. B. Maple (Char u. a. 1991) und Macsyma (Symbolics 1988), implementiert sind. In dieser Arbeit wird auf die GB-Grundfunktionen in Maple sowie die in Polycon[5] zu findenden Routinen zurückgegegriffen.

Es existieren 3 Methoden zur Berechnung der Ein-/Ausgangsbeziehung von PLS anhand der Gröbner Basen:

1. Bestimmung einer sog. Kontraktion des Ideals $\mathcal{O}_n$ auf $k<u,y>[y^{(n)}]$ mit Hilfe der Maple-Funktion *finduni*.

2. Berechnung der Gröbner Basen des Ideals $\mathcal{O}_n$ mit der Rangfolge $\{x_1,\ldots,x_n\} \prec \{u,\dot{u},\ldots,u^{(n)}\} \prec y^{(n)} \prec \ldots \prec \dot{y}$ mit Hilfe der Maple-Funktion *gbasis*.

3. Berechnung der Gröbner Basen des Ideals $\mathcal{O}_n$ mit der Rangfolge $\{x_1,\ldots,x_n\} \prec y^{(n)}$ und mit $u,\dot{u},\ldots,u^{(n-1)}$ und $y,\dot{y},\ldots,y^{(n-1)}$ als Parameter.

Diese Methoden werden in Form von Maple-Prozeduren *iorel*, *iorel2* und *iorel3* bei Forsman (1991a) beschrieben. Außerdem existieren in Polycon u. a. zum einen eine weitere Routine *ss2ioc* zur Berechnung des Ein-/Ausgangsverhaltens und zum anderen *obsvc*, welche die Analyse der algebraischen Beobachtbarkeit für PLS ermöglicht. Sie liefert die Zusammenhänge der einzelnen Zustände $x_i(t)$ mit dem Eingangssignal $u(t)$, dem Ausgangssignal $y(t)$ sowie deren Zeitableitungen. Dazu genügt es i. allg., den Eliminationsalgorithmus der Gröbner Basen für das Ideal

$$\mathcal{O}_{n-1} = \Big(y(t) - M_{\boldsymbol{f}}^0 c(\boldsymbol{x}), \dot{y}(t) - M_{\boldsymbol{f}} c(\boldsymbol{x}), \ldots, y^{(n-1)}(t) - M_{\boldsymbol{f}}^{n-1} c(\boldsymbol{x})\Big) \tag{5.3}$$

unter Beachtung einer bestimmten Rangfolge auszuwerten. Die Verwendung der beiden Routinen verdeutlicht Beispiel 5.1.

[5]Polycon ist ein Maple-Programmsystem, das an der Universität Linköping in Schweden von Forsman (1992 und 1993) entwickelt und in der Share-Bibliothek von Maple implementiert wurde.

Beispiel 5.1 Die bekannte Räuber-Beute-Beziehung stellt ein PLS mit der Zustandsdarstellung

$$\sum_{bsp2} \begin{array}{rcl} \dot{\boldsymbol{x}} & = & \begin{bmatrix} ax_1 - bx_1x_2 \\ -dx_2 + cx_1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ex_2 \end{bmatrix} u \\ y & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} \end{array}$$

dar. Die Maple-Programmierbefehle zur Analyse der algebraischen Beobachtbarkeit und zur Berechnung der Ein-/Ausgangsbeziehung lauten[6]:

```
> f:=vector([a*x1-b*x1*x2, -d*x2+c*x1*x2-e*x2*u0]):
> h:=x2:
> x1:=obsvc(f, h, x1);
```

$$x1 := -\frac{-y1 - y0\,d - y0\,e\,u0}{y0\,c}$$

```
> x2:=obsvc(f, h, x2);
```

$$x2 := y0$$

```
> ss2ioc(f, h);
```

$$\begin{gathered} y2\,y0 - y1^2 + b\,y1\,y0^2 - a\,y1\,y0 + e\,u0\,b\,y0^3 + d\,b\,y0^3 - \\ -d\,a\,y0^2 - e\,u0\,a\,y0^2 + u1\,e\,y0^2 \end{gathered}$$

Das betrachtete System $\sum_{bsp2}$ ist damit algebraisch beobachtbar, da beide Zustände

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\dot{y} + dy + euy}{cy} \\ x_2 &= y \end{aligned}$$

algebraisch über $k<u, y>$ sind, womit $\sum_{bsp2}$ der Bedingung nach Gl. 4.4 genügt. Darüber hinaus kann $\sum_{bsp2}$ durch die Ein-/Ausgangs-Differentialgleichung

$$\ddot{y}y - \dot{y}^2 + b\dot{y}y^2 - a\dot{y}y + ebuy^3 + dby^3 - day^2 - eauy^2 + \dot{u}y^2 = 0$$

beschrieben werden. □

Viele Autoren befaßten sich mit der Aufgabe der Bestimmung von Ein-/Ausgangs-Differentialgleichungen nichtlinearer Systeme. In van der Schaft (1989) wird ein differentialgeometrischer sukzessiver Algorithmus hergeleitet, der allerdings nur lokal um einen Arbeitspunkt $(\boldsymbol{x}_A, \bar{\boldsymbol{u}}_A, \bar{\boldsymbol{y}}_A)$ und unter gewissen Rangbedingungen Gültigkeit hat. Der gleiche Algorithmus findet sich in Nijmeijer und van der Schaft (1990). Diop (1991) schlägt einen differentialalgebraischen Eliminations-Algorithmus vor, der zusätzlich ein System von Ungleichungen bezüglich $\bar{\boldsymbol{y}} = [y, \dot{y}, \ldots, y^{n-1}]$ und $\bar{\boldsymbol{u}}$ liefert, bei dessen Erfüllung die Ein-/Ausgangsbeziehung Gültigkeit hat.

[6]Für x_1, x_2 werden die Symbole $x1, x2$ verwendet. $u0, u1$ und $y0, y1, y2$ bezeichnen $u, \dot{u}$ und $y, \dot{y}, \ddot{y}$.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Der vorliegende Bericht[7] hat die Beobachtbarkeitsanalyse nichtlinearer Systeme mit Hilfe eines algebraischen Ansatzes zum Thema. Diese wird insbesondere für Polynomsysteme diskutiert.

Die Basis für die hier vorgestellte Analyse bildet die Verwendung der Differentialalgebra. Zunächst werden in einem ersten Schritt die wichtigsten Begriffe dieser Theorie, insoweit sie für die genannte Problematik von Interesse sind, kurz erläutert. Die anschließende Anwendung auf nichtlineare Systeme zeigt, daß das Konzept der Differentialalgebra sich nicht nur zur Beschreibung von Ein-/Ausgangssystemen sondern auch von Systemen in Zustandsraumdarstellung gut eignet. Damit ist eine algebraische Definition der Beobachtbarkeit eines Systems möglich.

Der Begriff des *Transzendenzgrades*, der einen direkten Zusammenhang zwischen einer Realisierung und der korrespondierenden Ein-/Ausgangsdarstellung herstellt, erweist sich als wichtiges Kriterium zur Beobachtbarkeitsanalyse. Mit seiner Hilfe kann die Äquivalenz der Begriffe *algebraische Beobachtbarkeit* und *Minimalrealisierung* nachgewiesen werden. Aufbauend auf dieser Verknüpfung läßt sich ein überschaubares Verfahren zur Analyse der Beobachtbarkeit angegeben, welches anhand eines Beispiels verifiziert wird. Außerdem kann ein Bezug zu den Beobachtbarkeitskonzepten von Hermann und Krener (1977) aufgezeigt werden.

Für die Analyse komplexer nichtlinearer Systeme ist die Verwendung rechnergestützter Verfahren praktisch unentbehrlich. Die Grundlage für die algebraische Analyse der Beobachtbarkeit bildet der Übergang von einer Zustandsdarstellung zu einer Ein-/Ausgangsdarstellung. Hierfür existieren bereits effiziente Algorithmen, die mit dem Begriff der Gröbner Basen (Forsman 1991b) in engem Zusammenhang stehen. Anhand eines Beispiels wird die Anwendung dieser Methode in der symbolverarbeitenden Programmiersprache Maple dargestellt.

Zwischen der Beobachtbarkeit einer nichtlinearen Zustandsdarstellung und der Beobachbarkeit des korrespondierenden linearisierten Zustandsmodells besteht ein unmittelbarer Zusammenhang (Diop und Fliess 1991). In weiteren Arbeiten ist daher zu klären, in welchem Verhältnis die algebraische Beobachtbarkeit zu den Ergebnissen steht, die sich anhand des *Tangentialsystems* ergeben. Im Laufe dieser Untersuchungen könnte eventuell ein noch effizienterer Algorithmus zur rechnergestützten Systemanalyse gefunden werden. Darüber hinaus sollte geklärt werden, ob aus der Theorie linearer Systeme bekannte Ansätze, wie z. B. eine *strukturelle Beobachtbarkeitsanalyse* (Reinschke 1988), auch auf nichtlineare Systeme übertragbar sind.

[7]Die Arbeit entstand im Rahmen der von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekten „Qualitative Analyse nichtlinearer Systeme mittels Digraphen“ und „Zustands- und Parameterschätzung bei analytischen Systemen mit linearer Steuerung“.

7 Literaturverzeichnis

Char, B. W. u. a. 1991. *Maple V: Library Reference Manual.* Berlin u. a.: Springer.

Delaleau, E. 1992. Lowering orders of input derivatives in generalized state representations of nonlinear systems. *Proc. of the IFAC Nonlinear Control System Design Symposium.* Bordeaux. 209-213.

Diop, S. 1991. Elimination in control theory. *Math. Control Signals Systems* 4. 17-32.

Diop, S. 1992. Rational system equivalence, and generalized realization theory. *Proc. of the IFAC Nonlinear Control System Design Symposium.* Bordeaux. 402-407.

Diop, S. und M. Fliess 1991. On nonlinear observability. *Proc. of the European Control Conference.* Grenoble. 152-157.

Fliess, M. 1986. Nonlinear Control Theory and differential Algebra. *Modelling and Adaptive Control.* Byrnes, C. I.; Kurszanski, A. (eds.) Lecture Notes in Control and Information Science. 105. Berlin u. a.: Springer.

Fliess, M. 1990. Generalized controller canonical forms for linear and nonlinear dynamics. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-35. 994-1001.

Fliess, M. und S. T. Glad. 1993. An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications.* Trentelmann, H. L.; Willems, J. C. (eds.) Boston: Birkhäuser.

Föllinger, O. 1992. *Regelungstechnik.* Heidelberg: Hüthig.

Forsman, K. 1991a. *Constructive Commutative Algebra in Nonlinear Control Theory.* Ph. D. Thesis. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden: Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations. No. 261.

Forsman, K. 1991b. *Applications of Gröbner bases to nonlinear systems.* Technical Report LiTH-ISY-I-1180. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Forsman, K. 1992. *POLYCON - a Maple package for polynomial and rational control systems.* Technical Report LiTH-ISY-I-1386. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Forsman, K. 1993. *POLYCON - Computer algebra software for polynomial control systems.* Technical Report LiTH-ISY-R-1447. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Sweden.

Frayman, M. 1974. *Quadratic Differential Systems: A Study in Nonlinear Systems Theory.* Ph. D. Thesis. University of Maryland. College Park, Maryland.

Hermann, R. und A. J. Krener. 1977. Nonlinear controllability and observability. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-22. 728-740.

Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems.* Berlin u. a.: Springer.

Kalman, R. E.; P. L. Falb und M. A. Arbib. 1969. *Topics in Mathemaical System Theory.* New-York: McGraw-Hill.

Kang, W. und A. J. Krener. 1991. Observation of a rigid body from measurement of a principal axis. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control* 2. 197-207.

Meyberg, K. 1976. *Algebra.* Teil 2. München: Hanser.

Nijmeijer, H. und A. J. van der Schaft. 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* New York u. a.: Springer.

Reinschke, K. J. 1988. *Multivariable Control – A Graph-theoretic Approach.* Berlin u. a.: Springer.

Ritt, J. F. 1950. *Differential Algebra.* New York: Amer. Math. Soc.

Rudolph, J. 1992. A differential algebraic approach to the classical right model matching problem. *Proc. of the IFAC Nonlinear Control System Design Symposium.* Bordeaux. 112-117.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme.* München: Oldenbourg.

Shapiro, L. 1975. *Introduction to Abstract Algebra.* International Series in pure and applied Mathematics. New York: McGraw-Hill.

Symbolics, Inc. 1988. *MACSYMA User's Guide.* MACSYMA versions 309 and later. USA: Symbolics, Inc.

van der Schaft, A. J. 1989. Representing a nonlinear state space system as a set of higher-order differential equations in the inputs and outputs. *Systems & Control Letters* 12. 151-160.

Wey, T. und F. Svaricek. 1994. Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme. *Automatisierungstechnik* **at** (angenommener Beitrag).