

Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme

F. Svaricek und T. Wey

Forschungsbericht Nr. 03/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Im vorliegenden Bericht wird ein neuer algebraischer Zugang zur Analyse und Synthese nichtlinearer Regelkreise behandelt. Neben der möglichst einfachen Darstellung der mathematischen Grundlagen steht eine Anwendung dieser Methode auf praxisrelevante Fragestellungen im Vordergrund. Hierzu wird das Benchmarkproblem „Rührkesselreaktor“ verwendet, für das mit Hilfe algebraischer Verfahren eine Lösung des Ein-/Ausgangsentkopplungsproblems ermittelt wird. Der Bericht basiert auf den Ausführungen des Forschungsberichts 10/92, wurde aber in wesentlichen Teilen überarbeitet bzw. erweitert.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

1	Einführende Übersicht	1
1.1	Nichtlineares Benchmarkproblem „Rührkesselreaktor“	3
1.2	Mathematische Modellierung	4
2	Grundlagen der Algebra	7
2.1	Körpertheorie	7
2.2	Vektorraum	11
3	Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra	14
3.1	Nichtalgebraische Differentialgleichungen	14
3.2	Differentielle Körper	15
3.3	Differentielle Vektorräume	19
3.4	Differentialalgebraische Systembeschreibung	21
4	Differentialalgebraische Systemanalyse	22
4.1	Differentieller Rang	22
4.2	Invertierbarkeit	24
4.3	Beobachtbarkeit	26
4.4	Struktur im Unendlichen nichtlinearer Systeme	28
5	Algebraische Systemanalyse	30
5.1	Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem	36
5.2	Dynamische Entkopplung	38
6	Nichtlinearer Reglerentwurf für das Benchmarkproblem „Rührkesselreaktor“	40
6.1	Bestimmung der Struktur im Unendlichen	40
6.2	Überprüfung der statischen Entkoppelbarkeit	43
6.3	Lösung des dynamischen Entkopplungsproblems	43
6.4	Entwurf der entkoppelnden Zustandsrückführung	45
6.5	Entwurf einer Regelung zur näherungsweise Entkopplung	49
6.6	Führungs- und Störverhalten	51
7	Literaturverzeichnis	55

1 Einführende Übersicht

Die zunehmende Komplexität moderner Automatisierungssysteme und weiter wachsende Ansprüche an die Qualität einer Regelung führten dazu, daß das Interesse an nichtlinearen Regelungskonzepten in den vergangenen Jahren stark zugenommen hat. So beschäftigt sich beispielsweise auch der VDI/VDE-GMA-Ausschuß 1.4 „Neuere Theoretische Verfahren der Regelungstechnik“ seit 1990 schwerpunktmäßig mit dem Thema „Nichtlineare Systeme“. Der aktuelle Stand der Forschung auf diesem Gebiet und insbesondere die Anwendung der verfügbaren Methoden wurde erst kürzlich im Rahmen eines Aussprachetages (VDI 1993) dargestellt.

Um den Anwendern den Übergang von der linearen zur nichtlinearen Betrachtungsweise zu erleichtern, ist man bestrebt, die von den linearen Systemen her bekannten und vertrauten Konzepte auf nichtlineare Systeme zu übertragen. In den zur Zeit verfügbaren Lehrbüchern (z.B. Isidori 1989, Nijmeijer und van der Schaft 1990, Schwarz 1991, Vidya-sagar 1993) wird hierzu auf die Differentialgeometrie zurückgegriffen. Mit Hilfe dieses mathematischen Werkzeuges lassen sich nicht nur strukturelle Eigenschaften (z.B. die Steuer- und Beobachtbarkeit) untersuchen, sondern auch Lösungen für regelungstechnische Problemstellungen wie z.B. der Ein-/Ausgangsentkopplung, der Störungsentkopplung oder der exakten Linearisierung angeben. Die Verwendung der Differentialgeometrie im Bereich der Regelungstheorie geht dabei bis auf den Anfang der siebziger Jahre (Sussmann und Jurdjevic 1972) zurück.

Im Gegensatz dazu ist ein weiterer – alternativer – Weg für die Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme wesentlich neueren Datums und eng mit dem Namen Fliess verbunden, der Mitte der achtziger Jahre feststellte, daß sich die durch den Mathematiker Ritt (1950) begründete *Differentialalgebra* hervorragend für die Untersuchung der *Invertierbarkeit nichtlinearer Systeme* eignet. Diese Eigenschaft spielt immer dann eine besondere Rolle, wenn das dynamische Verhalten eines nichtlinearen Prozesses mit Hilfe von *dynamischen* Reglern verbessert werden soll. Betrachtet man lineare Systeme, so kann die Frage nach der Invertierbarkeit sofort anhand des Ranges der Übertragungsmatrix beantwortet werden. Bedingt durch die Tatsache, daß die Laplace-Transformation für nichtlineare Systeme im allgemeinen nicht existiert, ist eine Übertragung des Begriffes *Rang eines Systems* auf nichtlineare Systeme nicht ohne weiteres möglich. Erst mit Hilfe der Differentialalgebra konnte Fliess (1986b) erstmals eine klare und präzise Definition für den *Rang eines nichtlinearen Systems* angeben.

Angeregt durch diese Arbeiten hat sich in den vergangenen Jahren eine völlig neue Richtung im Bereich der nichtlinearen Regelungstheorie herausgebildet, die nicht mit differentialgeometrischen sondern mit algebraischen bzw. mit differentialalgebraischen Methoden arbeitet. Die rege Teilnahme an einem von Fliess und Glad (1993) auf der letzten European Control Conference in Groningen im Mai 1993 veranstalteten Einführungskurs mit

dem Titel „An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control“ machte das zunehmende Interesse der Regelungstechniker an diesem neuen Zugang deutlich. Inzwischen sind in der Literatur (z.B. Sira–Ramirez und Lischinsky–Arenas 1991, Fliess u.a. 1991b, Rouchon u.a. 1993) auch eine Reihe von praktischen Anwendungen bekannt geworden.

Einer weiteren Verbreitung dieses algebraischen Ansatzes steht in erster Linie entgegen, daß die Differentialalgebra und deren Anwendung nicht nur den Ingenieuren, sondern meistens auch den Mathematikern nicht ausreichend bekannt ist. An dieser Stelle möchte dieser Bericht ansetzen, und den Leser an diesen neuen algebraischen Zugang zur Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme heranführen. Darüber hinaus soll er in die Lage versetzt werden, die auf diesem Gebiet in den nächsten Jahren zu erwartenden internationalen Forschungsbemühungen weiterzuverfolgen.

Ein weiterer Vorteil des differentialalgebraischen Ansatzes ist, daß dieses Konzept nicht nur auf zeitinvariante Systeme mit konzentrierten Speichern, sondern auch auf *zeitvariable* Systeme (Fliess u.a. 1991a, Fliess u.a. 1993) und auf Systeme mit verteilten Parametern (Fliess 1989) angewendet werden kann. Aus Gründen der Übersichtlichkeit beschränkt sich dieser Bericht allerdings auf nichtlineare Systeme, die durch gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung in dieser Form beschreibbar sind:

$$\begin{aligned} \Sigma_{ALS} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Hierbei sollen $\mathbf{a}(\mathbf{x})$, die Spalten von $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ und die Zeilen von $\mathbf{c}(\mathbf{x})$ *analytische* Funktionen in ihren Argumenten sein. Die hierbei getroffene Annahme einer linear einwirkenden Steuerung stellt für viele regelungstechnische Anwendungen keine besondere Einschränkung dar, und hat demgegenüber den Vorteil, daß für diese Klasse der analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS) bereits auf eine recht vollständige Systemtheorie (Isidori 1989, Schwarz 1991) zurückgegriffen werden kann.

Nach dieser einführenden Übersicht wird zunächst ein Beispiel aus dem Katalog der nichtlinearen Benchmarkprobleme des VDI/VDE–GMA–Ausschuß 1.4 vorgestellt, auf das in den folgenden Abschnitten Bezug genommen wird. Bevor sich der dritte Abschnitt mit der Begriffswelt der Differentialalgebra auseinandersetzt, werden im folgenden Abschnitt noch einmal für das weitere Verständnis wichtige algebraische Grundlagen zusammengestellt. Von besonderer Bedeutung wird hierbei der Begriff der *Körpererweiterung* sein. In welcher Form die Differentialalgebra zur Analyse nichtlinearer Regelungssysteme eingesetzt werden kann, wird der vierte Abschnitt aufzeigen. Dabei geht es um grundlegende Eigenschaften und Strukturmerkmale wie differentieller Rang eines nichtlinearen Systems, Invertierbarkeit, Beobachtbarkeit und Struktur im Unendlichen. Abschnitt 5 behandelt dann eine rein algebraische Analysemethode für nichtlineare Systeme, die im Rahmen der Beschäftigung mit der Frage einer effizienten numerischen Berechnung des differentiellen Rangs eines Systems entwickelt wurde. Rein algebraisch bedeutet hier, daß hier keine *differentiellen*, sondern lediglich gewöhnliche Vektorräume

betrachtet werden. Mit Hilfe dieser Methode lassen sich einfache Lösungsbedingungen für das Problem der Ein-/Ausgangsentkopplung und -linearisierung angeben. Im letzten Abschnitt werden die zuvor behandelten Methoden auf das eingeführte Benchmarkproblem eines „Rührkesselreaktors“ angewendet. In einem Prozeß, der aus mehreren einfachen und überschaubaren Teilschritten besteht, wird für dieses Testbeispiel eine Regelung entworfen, deren Güte sich mit aus der Literatur bekannten Ergebnissen vergleichen läßt. Die instabile Nulldynamik und die fehlende Entkoppelbarkeitseigenschaft des Rührkesselreaktors stellen dabei besondere Anforderungen an das Reglerentwurfverfahren.

Die Inhalte der Abschnitte 1, 5 und 6 stellen im wesentlichen eine Erweiterung zu den Ausführungen in (Svaricek 1993) dar. Die Abschnitte 2, 3 sowie 4 basieren auf Wey (1992).

1.1 Nichtlineares Benchmarkproblem „Rührkesselreaktor“

Die vorgestellten differentialalgebraischen Methoden sollen im folgenden nicht nur auf akademische Beispiele, sondern auch auf eine praxisbezogenere Aufgabenstellung angewendet werden. Hierzu wurde aus dem Katalog nichtlinearer Benchmarkprobleme des VDI/VDE-GMA-Ausschuß 1.4 das Modell eines kontinuierlich betriebenen Rührkesselreaktors ausgewählt (vergleiche Klatt und Engell 1993).

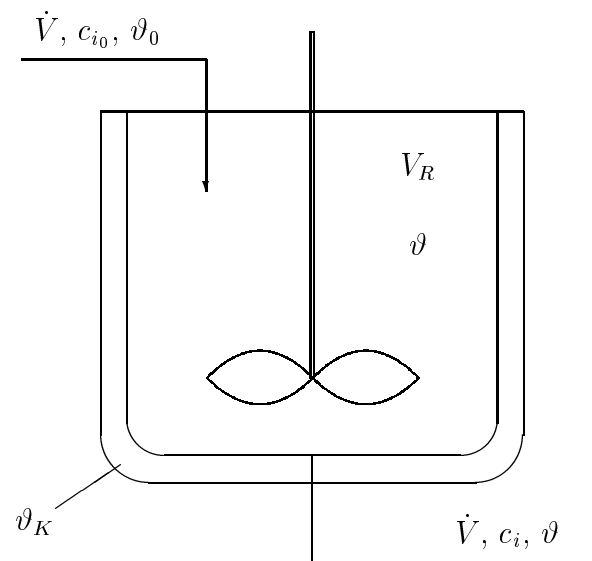


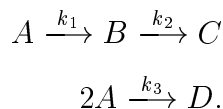
Bild 1.1: Schematische Darstellung des Rührkesselreaktors

Hierbei handelt es sich um ein *nichtlineares* Modell eines chemisch-technischen Prozesses, bei dem unerwünschte Parallel- und Folgereaktionen die Hauptreaktion überlagern. In der Regel wird die Bildung von Neben- und Folgeprodukten durch die Zugabe von

Katalysator/Inhibitor-Systemen unterdrückt und die geforderte Produktspezifikation erst durch eine nachgeschaltete und oft sehr aufwendige Aufarbeitungsstufe erreicht. Unter Umständen behindert dies den kontinuierlichen Betrieb der Gesamtanlage erheblich oder macht ihn sogar unmöglich. Daraus ergibt sich die interessante regelungstechnische Aufgabenstellung, die gewünschten Produktspezifikationen alleine durch eine entsprechend ausgelegte Prozeßregelung sicherzustellen, so daß auf nachgeschaltete Aufarbeitungsstufen verzichtet werden kann.

Der in Bild 1.1 schematisch dargestellte Rührkesselreaktor soll Teil einer kontinuierlich betriebenen Anlage sein, wobei das in diesem Reaktor aus Cyclopentadien hergestellte Cyclopentenol als Einsatzstoff für einen nachgeschalteten Anlagenteil dient. Das Reaktorgefäß ist von einem Kühlmantel umgeben und hat ein Volumen von 10 Litern. Der zugeführte Volumenstrom enthält nur das Edukt Cyclopentadien (Stoff A) in verdünnter Lösung, woraus Cyclopentenol (Stoff B) durch säurekatalysierte elektrophile Wasseraddition hergestellt werden soll. Zur Vermeidung von spontanen Reaktionen mit dem Luftsauerstoff findet die Umsetzung bei 15 bar in einer Stickstoff-Atmosphäre statt.

Bedingt durch die starke Reaktionsfähigkeit sowohl von Cyclopentadien als auch von Cyclopentenol entstehen als Folgeprodukt Cyclopentandiol (Stoff C) bzw. Dicyclopentadien (Stoff D) als Nebenprodukt. Dieser Mechanismus läßt sich vereinfacht wie folgt darstellen:



1.2 Mathematische Modellierung

Der in den Reaktor eintretende Volumenstrom \dot{V} enthält lediglich den Stoff A in der Anfangskonzentration c_{A_0} . Unter der Annahme einer volumenkonstanten Gesamtreaktion und einer idealen Vermischung im Reaktor ergeben sich für die Konzentrationen c_A und c_B die folgenden differentiellen Bilanzgleichungen:

$$\dot{c}_A = \frac{\dot{V}}{V_R}(c_{A_0} - c_A) - k_1(\vartheta)c_A - k_3(\vartheta)c_A^2 \quad (1.2)$$

$$\dot{c}_B = -\frac{\dot{V}}{V_R}c_B + k_1(\vartheta)c_A - k_2(\vartheta)c_B, \quad (1.3)$$

wobei stets $c_A, c_B \geq 0$ gilt.

Für die Reaktorinnentemperatur ϑ erhält man mit Hilfe einer Energiebilanz

$$\dot{\vartheta} = \frac{\dot{V}}{V_R}(\vartheta_0 - \vartheta) - \frac{1}{\rho C_P} \left(k_1(\vartheta)c_A \Delta H_{R_{AB}} + k_2(\vartheta)c_B \Delta H_{R_{BC}} + k_3(\vartheta)c_A^2 \Delta H_{R_{AD}} \right) + \frac{k_W A_R}{\rho C_P V_R}(\vartheta_K - \vartheta), \quad (1.4)$$

wobei die Reaktionsenthalpien ΔH_{R_i} für freiwerdende Energien negativ angesetzt werden und ϑ_0 die Temperatur des einströmenden Mediums darstellt. Dem Kühlmittel wird in einem externen Wärmetauscher der Wärmestrom \dot{Q}_K entzogen, so daß sich für dessen Temperatur ϑ_K die folgende Bilanzgleichung ergibt:

$$\dot{\vartheta}_K = \frac{1}{m_K C_{P_K}} \left(\dot{Q}_K + k_W A_R (\vartheta - \vartheta_K) \right). \quad (1.5)$$

Die auf das Edukt der jeweiligen Teilreaktion bezogenen Reaktionsgeschwindigkeiten in den Gleichungen (1.2) - (1.4) sind temperaturabhängig und mit einer gewissen Modellunsicherheit behaftet:

$$\begin{aligned} k_1(\vartheta) &= (1,287 \pm 0,04) \cdot 10^{12} \cdot \exp\left(\frac{-9758,3}{\vartheta + 273,15}\right) \text{ h}^{-1} \\ k_2(\vartheta) &= k_1(\vartheta) \\ k_3(\vartheta) &= (9,043 \pm 0,27) \cdot 10^9 \cdot \exp\left(\frac{-8560}{\vartheta + 273,15}\right) \frac{1}{\text{mol A} \cdot \text{h}}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Die Reaktionsenthalpien der einzelnen Teilreaktionen nehmen innerhalb des Temperatur-Arbeitsbereiches folgende Werte an:

$$\begin{aligned} \Delta H_{R_{AB}} &= (4,2 \pm 2,36) \frac{\text{kJ}}{\text{mol A}} \\ \Delta H_{R_{AB}} &= -(11,0 \pm 1,92) \frac{\text{kJ}}{\text{mol B}} \\ \Delta H_{R_{AB}} &= -(41,85 \pm 1,41) \frac{\text{kJ}}{\text{mol A}}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Für die Dichte ρ und die Wärmekapazität C_P können in einer verdünnten Lösung mittlere Werte angenommen werden:

$$\rho = (0,9342 \pm 4,0 \cdot 10^{-4}) \frac{\text{kg}}{\text{l}}, \quad C_P = (3,01 \pm 0,04) \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}. \quad (1.8)$$

Der Wärmedurchgangskoeffizient k_W , die Kühlmantelfläche A_R und das Reaktorvolumen betragen:

$$k_W = (4032 \pm 120) \frac{\text{kJ}}{\text{hm}^2\text{K}}, \quad A_R = 0,215 \text{ m}^2, \quad V_R = 0,01 \text{ m}^3. \quad (1.9)$$

Für die Masse des Kühlmittels m_K und dessen Wärmekapazität C_{P_K} werden folgende Werte angesetzt:

$$m_K = 5,0 \text{ kg}, \quad C_{P_K} = (2,0 \pm 0,05) \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}. \quad (1.10)$$

Führt man folgende Zustandsvariablen ein

$$\begin{aligned} x_1(t) &:= \text{Konzentration } c_A \text{ des Stoffes A,} \\ x_2(t) &:= \text{Konzentration } c_B \text{ des Stoffes B,} \\ x_3(t) &:= \text{Temperatur } \vartheta \text{ des Reaktorinhalts,} \\ x_4(t) &:= \text{Temperatur } \vartheta_K \text{ des Kühlmediums} \end{aligned}$$

so läßt sich die Herstellung von Cyclopentenol aus Cyclopentadien mit Hilfe dieser Bezeichnungen und den Konstanten

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{\rho C_p}, & \alpha_2 &= \frac{k_w A_R}{\rho C_p V_R}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{m_K C_{pK}}, & \alpha_4 &= \frac{k_w A_R}{m_K C_{pK}}\end{aligned}\quad (1.11)$$

durch vier verkoppelte nichtlineare Zustandsgleichungen der Form

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1(x_3)x_1 - k_3(x_3)x_1^2 + (c_{A_0} - x_1)u_1 \\ \dot{x}_2 &= k_1(x_3)x_1 - k_2(x_3)x_2 - x_2u_1 \\ \dot{x}_3 &= -\alpha_1 \Delta H_{R_{AB}} k_1(x_3)x_1 - \alpha_1 \Delta H_{R_{BC}} k_2(x_3)x_2 - \\ &\quad -\alpha_1 \Delta H_{R_{AD}} k_3(x_3)x_1^2 + (\vartheta_0 - x_3)u_1 + \alpha_2(x_4 - x_3) \\ \dot{x}_4 &= \alpha_3 u_2 + \alpha_4(x_3 - x_4)\end{aligned}\quad (1.12)$$

beschreiben. Hierbei stehen der auf das Reaktorvolumen bezogene Volumenstrom \dot{V}/V_R (Raumgeschwindigkeit) und die Kühlleistung \dot{Q}_K als Stellgrößen $u_i(t)$, $i = 1, 2$ zur Verfügung. Die Konzentration c_B und die Temperatur ϑ des Reaktors werden gemessen. Die Ausgangsgrößen $y_i(t)$, $i = 1, 2$ sind also

$$\begin{aligned}y_1(t) &= x_2(t) := \text{Konzentration } c_B, \\ y_2(t) &= x_3(t) := \text{Temperatur } \vartheta.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Wie weiter oben bereits angedeutet, sind die in diesen Gleichungen auftretenden Modellparameter mit gewissen Unsicherheiten behaftet. Für weitere Einzelheiten über die Ermittlung der Parameter und ihrer Wertebereiche sowie zum physikalisch-chemischen Hintergrund wird auf Klatt und Engell (1993) verwiesen.

Die folgenden Werte beschreiben den Hauptarbeitspunkt des Reaktors:

$$\begin{aligned}c_{A_{0s}} &= 5,1 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & \vartheta_s &= 134,14^\circ\text{C} & \vartheta_0 &= 130^\circ\text{C} \\ c_{A_s} &= 1,235 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & k_1 &= k_2 = (50,6 \pm 1,5) \text{h}^{-1} & \frac{\dot{V}}{V_R} &= 18,83 \text{h}^{-1} \\ c_{B_s} &= 0,9 \frac{\text{mol}}{\text{l}} & k_3 &= (6,74 \pm 0,2) \frac{1}{\text{mol} \cdot \text{h}} & \dot{Q}_{K_s} &= -4495,7 \frac{\text{kJ}}{\text{h}}.\end{aligned}$$

Dieses nichtlineare Testbeispiel verfügt über eine Reihe von Eigenschaften, die einen Reglerentwurf erschweren. Dazu sind die fehlende statische Entkoppelbarkeit zu zählen und daß die Nulldynamik im betrachteten Arbeitspunkt instabil ist, d.h. daß eine Nullstelle des linearisierten Modells in der rechten s -Halbebene liegt.

2 Grundlagen der Algebra

Zur Einführung der grundlegenden Begriffe der Differentialalgebra ist es sinnvoll, zuvor die korrespondierenden Bereiche in der „klassischen“ Algebra zu erläutern. Diese bilden, aufgrund der zahlreichen Analogien zwischen beiden Theorien, eine geeignete Basis für die anschließende Beschreibung der wichtigsten Elemente der Differentialalgebra.

2.1 Körpertheorie

Eine zentrale Thematik der Algebra ist die *Körpertheorie*, die in der zweiten Hälfte des vorherigen Jahrhunderts mit dem Ziel entwickelt wurde, umständliche Manipulationen von algebraischen Gleichungen zu vermeiden. Die mit ihr erarbeiteten Ergebnisse werden in vielen Bereichen der Mathematik verwendet, hauptsächlich in weiteren Teilen der Algebra, in der algebraischen Zahlentheorie, der Geometrie und der Kombinatorik. Zu ihrer Einführung ist eine Anzahl von Begriffsdefinitionen notwendig.

Ein *Körper* E ist eine Menge von mindestens zwei Elementen zusammen mit zwei binären Verknüpfungen, die man *Addition* und *Multiplikation* nennt und für welche die folgenden Bedingungen gelten (Rosenbrock und Storey 1971, Böhme 1990):

1. Für jedes Paar von Elementen $a, b \in E$ gibt es eine eindeutige Summe

$$a + b \in E$$

und ein eindeutiges Produkt

$$a \cdot b \in E .$$

2. Für drei beliebige Elemente $a, b, c \in E$ gilt sowohl das Assoziativgesetz

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= (a + b) + c \\ a \cdot (b \cdot c) &= (a \cdot b) \cdot c , \end{aligned}$$

das Kommutativgesetz

$$\begin{aligned} a + b &= b + a \\ a \cdot b &= b \cdot a \end{aligned}$$

als auch das Distributivgesetz:

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \quad .$$

3. Jeder Körper besitzt ein Nullelement 0 (neutrales Element der Addition)

$$a + 0 = 0 + a = a$$

und ein Einselement 1 (neutrales Element der Multiplikation)

$$1a = a1 = a .$$

4. Weiterhin existieren inverse Elemente $-a \in E$ und $a^{-1} \in E$ derart, daß

$$a + (-a) = 0 \quad \text{für alle } a \in E$$

und

$$a \cdot a^{-1} = 1 \quad \text{für alle } a \in E \setminus \{0\}$$

gilt.

Die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} stellt beispielsweise einen Körper dar, der im Bereich der Ingenieurwissenschaften vielen mathematischen Untersuchungen (z.B. lineare Abhängigkeit von Vektoren) unbewußt zugrunde gelegt wird.

Beispiel 2.1

Demnach sind z.B. in einem Körper E mit den Elementen 1 und 3 notwendigerweise auch die Elemente enthalten, die sich durch wiederholte Anwendung der oben genannten Operationen ergeben:

$$\begin{aligned} 1, 3 \in E &\Rightarrow 0, \frac{1}{3}, 1, 2, 3, 4 \in E \\ &\Rightarrow 0, 1, 2\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, \dots, 5, 6, 7, 8, \dots \in E \\ &\quad \vdots \end{aligned}$$

Bereits der durch die Zahlen 1 und 3 *generierte* Körper E beinhaltet also unendlich viele Elemente.

Eine der wichtigsten Operationen in der Körpertheorie ist die Bildung einer sogenannten *Körpererweiterung*. Eine Teilmenge von E heißt ein *Teilkörper* (auch *Unterkörper*) von E , falls sie einen Körper bezüglich der Addition und Multiplikation in E darstellt. Wenn mit F ein derartiger Unterkörper des Körpers E ($F \subseteq E$) bezeichnet ist, so nennt man E eine Körpererweiterung über F . Diese Operation läßt sich abgekürzt durch die Schreibweise E/F wiedergegeben. Im weiteren ist eine Aufteilung der Körpererweiterungen in zwei Klassen von Interesse (Fliess 1990):

- a) Ein Element $a \in E$ wird als *algebraisch* über F bezeichnet, wenn ein Polynom P mit beliebigen Koeffizienten aus F den Zusammenhang $P(a) = 0$ erfüllt.

Beispiel 2.2

Man betrachte die Körpererweiterung \mathbb{R}/\mathbb{Q} . Die Zahl $\sqrt{2}$ aus der Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} ist algebraisch über der Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} , weil $\sqrt{2}$ eine Lösung des Polynoms $x^2 - 2 = 0$ ist, welches nur Koeffizienten in \mathbb{Q} aufweist.

Eine Körpererweiterung E/F ist nur dann algebraisch, wenn alle Elemente von E algebraisch über F sind.

- b) Ein Element $a \in E$ heißt dann und nur dann *transzendent* über F , wenn es nicht algebraisch über F ist. Anschaulich bedeutet diese Aussage, daß kein Polynom P über F existiert, für das $P(a) = 0$ gilt. Transzendente Zahlen können demnach nicht mit algebraischen Gleichungen über F beschrieben werden.

Eine Körpererweiterung E/F ist transzendent, wenn mindestens ein Element von E transzendent über F ist.

Beispiel 2.3

Die Körpererweiterung \mathbb{R}/\mathbb{Q} ist transzendent, weil u.a. für die Eulersche Zahl $e \in \mathbb{R}$ und $\pi \in \mathbb{R}$ keine endlichen Polynome P mit rationalen Koeffizienten existieren, die den Zusammenhang $P(e, \pi) = 0$ erfüllen (vgl. Venn-Diagramm in Bild 2.1).

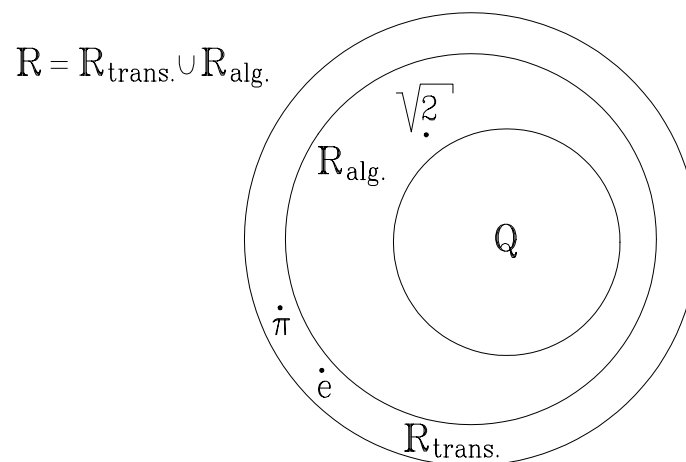


Bild 2.1: Venn-Diagramm der Körpererweiterung \mathbb{R}/\mathbb{Q} mit maximalem, transzendenterem ($\mathbb{R}_{\text{trans.}}$) und algebraischem ($\mathbb{R}_{\text{alg.}}$) Anteil

Mit Hilfe des Konzeptes einer transzendenten Erweiterung lassen sich nun nichtlineare Analogien für die Dimension und die Basis eines Vektorraumes angeben. Hierzu werden

zwei Körper mit der Eigenschaft $F \subseteq E$ vorausgesetzt. Betrachtet man die Elemente $\{\xi_i | i = 1, \dots, \mu\}$, welche eine Teilmenge S von E darstellen, so werden diese als *F-algebraisch abhängig* bezeichnet, wenn ein Polynom $P(x_1, \dots, x_\nu)$ über F derart existiert, daß

$$P(\xi_{i_1}, \dots, \xi_{i_\nu}) = 0 \quad ; \quad i_j = 1, \dots, \mu; \quad \nu = 2, \dots, \mu \quad (2.1)$$

erfüllt wird. Ist eine Teilmenge $S \subseteq E$ nicht algebraisch abhängig, so wird sie *F-algebraisch unabhängig* genannt. Mit anderen Worten, eine Menge ist *F-algebraisch unabhängig*, wenn keines ihrer Elemente durch ein Polynom in den übrigen Elementen ausgedrückt werden kann. Bezeichnet man mit S_{max} eine bezüglich der Elementenanzahl *maximale*, *F-algebraisch unabhängige* Teilmenge von E , so nennt man diese auch eine *Transzendenzbasis* der Körpererweiterung E/F . Es gilt die wichtige Eigenschaft, daß jede transzendente Körpererweiterung E/F sich immer aus einer maximalen, transzendenten Erweiterung S_{max} und einer algebraischen Erweiterung zusammensetzt (Bild 2.1).

Beliebige Transzendenzbasen S_{max} einer Körpererweiterung besitzen immer die gleiche Mächtigkeit, d. h. sie haben die gleiche Anzahl von Elementen. Diese für eine Körpererweiterung charakteristische Anzahl wird auch als *Transzendenzgrad* bezeichnet:

$$\text{trg}(E/F) = |S_{max}| = \begin{cases} n & \text{für } S_{max} \text{ hat } n \text{ Elemente} \\ \infty & \text{für } S_{max} \text{ ist unendlich} \end{cases} . \quad (2.2)$$

Beispiel 2.4 (Fliess 1990, Meyberg 1976)

- a) Die Körpererweiterung E/F ist dann und nur dann *algebraisch*, wenn $\text{Trg}(E/F) = 0$ gilt.
- b) Für einen gegebenen Körper F sei $E = F(s_1, \dots, s_n)$ der Körper der rationalen Funktionen in den n unabhängigen Variablen s_1, \dots, s_n mit Koeffizienten aus dem Körper F . Wenn der Körper F beispielsweise gleich der Menge der ganzen Zahlen und n gleich 2 ist, gehört zwar $s_2^2 + 2s_1 + 1$ zur Körpererweiterung $F(s_1, s_2)/F$; nicht aber $s_2^2 + 2,1s_1 + 1$. Da s_1, \dots, s_n *F-algebraisch unabhängig* sind, bilden sie eine Transzendenzbasis der Körpererweiterung $F(s_1, \dots, s_n)/F$. Für den Transzendenzgrad dieser Körpererweiterung gilt dann:

$$\text{Trg}(F(s_1, \dots, s_n)/F) = n .$$

Eine solche Erweiterung stellt eine *rein transzendente* Erweiterung dar.

- c) Der Körper \mathbb{Q}' werde durch die rationalen Zahlen \mathbb{Q} und die beiden Elemente $\{e, \sqrt{2}\}$ generiert. Dies wird im allgemeinen durch die Schreibweise $\mathbb{Q}' = \mathbb{Q}(e, \sqrt{2})$ abgekürzt. \mathbb{Q}' ist wegen der Eulerschen Zahl e transzendent über \mathbb{Q} . Die maximal algebraisch unabhängige Teilmenge ergibt sich zu $S_{max} = \{e\}$, so daß der Transzendenzgrad der Körpererweiterung \mathbb{Q}'/\mathbb{Q} genau 1 beträgt. Die durch e generierten Elemente in \mathbb{Q}' wie z. B. e^2, e^3, \dots können

immer durch Polynome in e ausgedrückt werden. Sie sind demzufolge nicht algebraisch unabhängig von e und tragen deshalb nicht zu einer Erhöhung des Transzendenzgrades bei.

- d) Sind τ_1 und τ_2 Unbestimmte über \mathbb{Q} , dann ist die Körpererweiterung E/\mathbb{Q} mit $E = \mathbb{Q}(\tau_1, \tau_2, \sqrt{\tau_1}, \sqrt{2}, \sqrt[3]{5})$ transzendent. Die maximalen, algebraisch unabhängigen Teilmengen von E sind entweder $S_{max} = \{\tau_1, \tau_2\}$ oder $S_{max} = \{\sqrt{\tau_1}, \tau_2\}$, der Transzendenzgrad ergibt sich damit zu 2. Eine algebraisch unabhängige Teilmenge S_{max} mit 3 Elementen existiert nicht, da für beliebige τ_1 ein Polynom mit Koeffizienten in \mathbb{Q} existiert, so daß $P(\tau_1, \sqrt{\tau_1}) = 0$ gilt.

Ein wesentlicher Zusammenhang im Bereich der Körpertheorie basiert auf der *Gradformel*. Und zwar läßt sich bei 3 gegebenen Körpern E , F und G , für die $F \subseteq G \subseteq E$ gilt, aus den Transzendenzgraden von E/G und G/F ein Transzendenzgrad für E/F ableiten (Meyberg 1976):

$$\text{trg}(E/F) = \text{trg}(E/G) + \text{trg}(G/F) \quad . \quad (2.3)$$

2.2 Vektorraum

Bei der algebraischen Analyse nichtlinearer Systeme spielen *abstrakte* und *differentielle* Vektorräume eine besondere Rolle. Aus diesem Grund werden hier zunächst noch einmal wichtige Grundlagen über (lineare) Vektorräume zusammengestellt.

Ein linearer (reeller) *Vektorraum* \mathcal{V} entspricht einer nichtleeren Menge V , für deren Elemente, die Vektoren genannt werden, eine Addition '+' und eine Multiplikation '.' mit reellen Zahlen derart erklärt ist, daß folgende Axiome gelten (Bronstein und Semendjajew 1987):

Gesetze der Addition

1. *Ausführbarkeit und Eindeutigkeit:* Zu je zwei Elementen $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ gibt es genau ein Element $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in V$, die *Summe* von \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 .
2. *Assoziativität:* Für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ gilt: $\mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3$.
3. *Kommutativität:* Für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ gilt: $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1$.
4. *Umkehrbarkeit:* Für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ gibt es ein $\mathbf{v}_3 \in V$, so daß $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ ist.

Gesetze der Multiplikation mit (reellen) Zahlen

5. *Ausführbarkeit und Eindeutigkeit:* Zu jedem Element $\mathbf{v} \in V$ und jeder reellen Zahl α gibt es genau ein Element $\alpha\mathbf{v} \in V$, das α -*fache* von \mathbf{v} .
6. *Assoziativität:* Für alle $\mathbf{v} \in V$ und alle reellen Zahlen α, β gilt: $(\alpha\beta)\mathbf{v} = \alpha(\beta\mathbf{v})$.

7. Für alle $\mathbf{v} \in V$ gilt: $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Distributivgesetze

8. Für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ und alle reellen Zahlen α, β gilt:

$$\alpha(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) = \alpha\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 \quad \text{und} \quad (\alpha + \beta)\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_1.$$

Bei der Definition der Multiplikation kann man statt des Körpers der reellen Zahlen auch andere Körper F , wie zum Beispiel den Körper der rationalen Funktionen in einer unbestimmten Variablen s mit Koeffizienten aus dem Körper der reellen Zahlen, zugrundelegen. Man spricht dann auch von einem *abstrakten Vektorraum* $\mathcal{V}(F)$ über dem Körper F .

Mehrere Eigenschaften eines Vektorraums sind erwähnenswert. Zum einen ist es nicht notwendig, daß Elemente von V miteinander multipliziert werden können. Zum anderen stellt die Multiplikation \cdot eine Funktion $F \cdot V \rightarrow V$ dar, wobei Elemente von F im allgemeinen als Skalare und Elemente von V als Vektoren bezeichnet sind. Häufig werden als Körper F die Mengen der reellen oder komplexen Zahlen verwendet, man spricht dann auch von einem *reellen Vektorraum* bzw. einem *komplexen Vektorraum*.

Beispiel 2.5

Sei $V = \mathbb{R}^2$ die Menge aller Paare $[r_1, r_2]^T$ mit $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$. Dann ist $\mathcal{V}(\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum, in dem $+$ und \cdot wie folgt definiert sind (Shapiro 1975):

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_3 \\ r_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_1 + r_3 \\ r_2 + r_4 \end{bmatrix}$$

$$r \cdot \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} rr_1 \\ rr_2 \end{bmatrix} .$$

Für das Verständnis der in den folgenden Abschnitten dargestellten algebraischen Methodik zur Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme sind neben dem Begriff *Vektorraum* auch die Begriffe *lineare Abhängigkeit* und *Basis* von grundlegender Bedeutung.

Eine Menge von Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ heißt *linear abhängig*, falls eine Menge von Skalaren α_i angegeben werden kann, die nicht alle Null sind und für die

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

gilt. Ob diese Gleichung für von Null verschiedene α_i erfüllt werden kann, hängt dabei nicht nur von Vektoren \mathbf{v}_i , sondern auch davon ab, aus welchem Körper die Skalare α_i stammen. Betrachtet man beispielsweise die beiden folgenden Vektoren aus dem \mathbb{R}^2

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1, 0 \\ 0, 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} e \\ 0, 0 \end{bmatrix},$$

so sind diese sicherlich linear abhängig, wenn die Skalare α_i dem Körper der reellen Zahlen \mathbb{R} angehören dürfen. Wird diesen Skalaren aber der Körper \mathbb{N} der natürlichen Zahlen zugrundegelegt, so sind diese beiden Vektoren linear *unabhängig*.

Eine Teilmenge U von Vektoren in V heißt dann *linear unabhängig*, wenn sich kein Element $\mathbf{u} \in U$ durch eine Linearkombination der übrigen Elemente $\mathbf{u}_i \in U; \forall \mathbf{u}_i \neq \mathbf{u}$ erzeugen läßt. In Bild 2.2 sind sowohl eine linear unabhängige Teilmenge (U) als auch eine linear abhängige Teilmenge (\bar{U}) des \mathbb{R}^3 dargestellt.

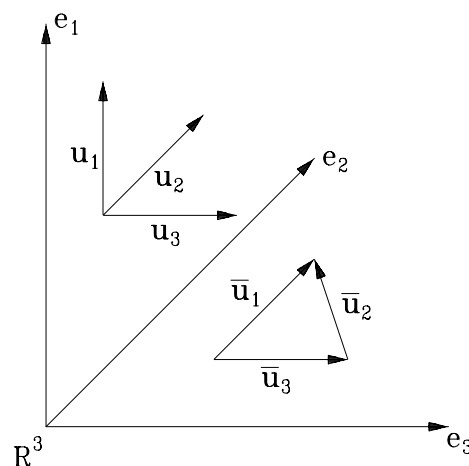


Bild 2.2: Linear unabhängige ($U = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$) und linear abhängige Teilmengen ($\bar{U} = \{\bar{\mathbf{u}}_1, \bar{\mathbf{u}}_2, \bar{\mathbf{u}}_3\}$) des \mathbb{R}^3

Eine *maximale*, linear unabhängige Menge U_{max} eines Vektorraumes \mathcal{V} wird auch als *Basis* von \mathcal{V} bezeichnet. Alle Basen eines Vektorraums \mathcal{V} haben immer die gleiche Anzahl von Elementen. Diese Anzahl entspricht gerade der *Dimension* von \mathcal{V} und wird auch mit $\dim(\mathcal{V})$ bezeichnet.

Drückt man einen Vektor von \mathcal{V} als Linearkombination einer Basis von \mathcal{V} aus, so bezeichnet man die Koeffizienten in der Linearkombination als die Koordinaten des Vektors bezüglich der Basis.

Eine im weiteren ebenfalls verwendete Darstellung für einen Vektorraum ist

$$\mathcal{V} = \text{span}_F \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}, \quad (2.4)$$

wobei *span* dafür steht, daß die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren \mathbf{v}_i mit Koeffizienten aus F den Vektorraum \mathcal{V} *aufspannen*. Sind die n Vektoren linear unabhängig über dem betrachteten Körper F , so stellen sie eine Basis dar und es gilt:

$$\dim \mathcal{V} = \dim (\text{span}_F \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = n. \quad (2.5)$$

Beispiel 2.6

Eine Basis des reellen Vektorraum \mathbb{R}^3 kann durch die drei Einheitsvektoren $\mathbf{e}_1 = [1, 0, 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0, 1, 0]^T$ und $\mathbf{e}_3 = [0, 0, 1]^T$ beschrieben werden. Neben dieser existieren unendlich viele andere Basen, die aber alle eine Dimension von 3 gemeinsam haben (z.B. $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ in Bild 2.2).

3 Grundlegende Begriffe der Differentialalgebra

Die Differentialalgebra wurde mit der Intention eingeführt, die aus der herkömmlichen Algebra bekannten Grundsätze so aufzubereiten, daß sie auf Differentialgleichungen anwendbar sind. Voraussetzung hierfür ist folglich, daß sich die Differentialgleichungen algebraisch in ihren Variablen und deren Ableitungen verhalten. Sie dürfen also keine Funktionen wie *sin*, *cos* etc. enthalten, sondern müssen aus Polynomen aufgebaut sein. Diese Forderung schränkt den Einsatzbereich der Differentialalgebra zunächst deutlich ein. Es läßt sich aber zeigen, daß eine Reihe von nichtalgebraischen Differentialgleichungen in algebraische umgewandelt werden können (Sira–Ramirez und Lischinsky–Arenas 1991, Fliess 1990).

3.1 Nichtalgebraische Differentialgleichungen

Betrachtet man z.B. die im ersten Abschnitt angegebenen Differentialgleichungen des Rührkesselreaktors, so können diese aufgrund der Arrheniusterme

$$k_i(\vartheta) = k_{i_0} \cdot \exp\left(-\frac{k_{i_1}}{\vartheta + 273,15}\right) \quad (3.1)$$

nicht sofort mit Hilfe der Differentialalgebra analysiert werden. Bedenkt man aber, daß

$$x_5 = k_i(\vartheta) \quad (3.2)$$

die Lösung der algebraischen Differentialgleichung

$$\dot{x}_5 = \frac{k_{i_0} k_{i_1}}{(\vartheta + 273,15)^2} x_5 \dot{\vartheta} \quad (3.3)$$

darstellt, so kann beispielsweise die erste Gleichung des Zustandsmodells (12) alternativ auch als algebraische Differentialgleichung

$$\dot{x}_1 = -x_5 x_1 - x_6 x_1^2 + (c_{A_0} - x_1) u_1 \quad (3.4)$$

geschrieben werden, wobei die neuen von $\vartheta = x_3$ *abhängigen* Zustandsvariablen x_5 und x_6 den algebraischen Differentialgleichungen

$$\dot{x}_5 = \frac{k_{i_0} k_{i_1}}{(x_3 + 273,15)^2} x_5 \dot{x}_3 \quad (3.5)$$

und

$$\dot{x}_6 = \frac{k_{3_0} k_{3_1}}{(x_3 + 273, 15)^2} x_6 \dot{x}_3 \quad (3.6)$$

genügen.

Dieses Verfahren führt für *alle* die Differentialgleichungen zum Erfolg, deren Koeffizienten algebraischen Differentialgleichungen genügen (Fliess 1990). Modelle realer Systeme erfüllen häufig diese Voraussetzung, so daß sich mit Hilfe der Differentialalgebra eine große Anzahl von regelungstechnischen Fragestellungen bearbeiten läßt.

3.2 Differentielle Körper

In den vorherigen Abschnitten wurden die Grundlagen der herkömmlichen Algebra und hier im speziellen der Körpertheorie dargestellt. In Analogie zu den dort definierten Begriffen wird jetzt eine *differentielle Körpertheorie* eingeführt.

Ein *differentieller Körper* K ist wiederum eine Menge, in der neben den schon genannten Verknüpfungen Addition und Multiplikation auch eine *einfache Differentiation* d/dt definiert ist. Diese entspricht den bekannten Regeln

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(a + b) &= \dot{a} + \dot{b} \\ \frac{d}{dt}(ab) &= \dot{a}b + a\dot{b} \quad \forall a, b \in K \end{aligned} .$$

Erfüllt ein Element c eines differentiellen Körpers K die Gleichung

$$\dot{c} = 0 , \quad (3.7)$$

so heißt dieses Element *Konstante*. Die Menge der Konstanten eines Körpers K formen einen Teilkörper, der auch als *Körper der Konstanten* bezeichnet wird. Bekannte Körper von Konstanten sind die Menge der reellen Zahlen \mathbb{R} und die Menge der komplexen Zahlen \mathbb{C} .

Das Ergebnis einer Differentiation in K muß, im Gegensatz zu Addition und Multiplikation, nicht notwendigerweise wieder in K enthalten sein. Eine Teilmenge I von K , für deren Elemente solch ein Zusammenhang $a \in I \Rightarrow \dot{a} \in I$ erfüllt ist, heißt ein *differentielles Ideal*. Eine Differentiation der Elemente von I ist demzufolge immer eine Abbildung $I \rightarrow I$ (Kaplansky 1976). Dieser Sachverhalt ist in Bild 3.1 graphisch dargestellt.

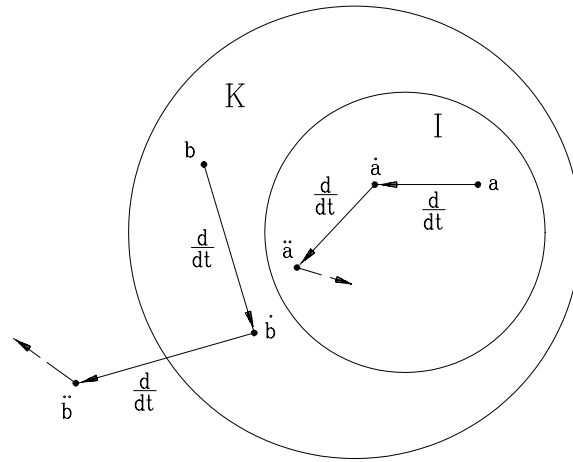


Bild 3.1: Differentielles Ideal I eines Körpers K

Beispiel 3.1

- a) Die Menge S aller rationalen Übertragungsfunktionen in einer Variablen s , die nicht notwendigerweise *echt gebrochen* rational sein müssen, stellt einen differentiellen Körper dar, in dem eine Differentiation d/ds definiert ist. Alle Ergebnisse, die sich durch Anwendung des Differentiationsoperators auf Elemente von S ergeben, sind wiederum Übertragungsfunktionen in s , also im Körper S enthalten, wie z.B.:

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{1+s} \right) = -\frac{1}{(1+s)^2} \in S \quad .$$

Folglich ist S ein differentielles Ideal.

- b) Unter der Notation $\mathbb{Q}[x(t)]$ wird die Menge aller Polynome in einer zeitabhängigen Variablen $x(t)$ mit Koeffizienten in \mathbb{Q} verstanden. Nun soll $\mathbb{Q}[x(t)]$ als differentielles Körper mit einer einzelnen Differentiation d/dt angesehen werden. Nicht alle zeitlichen Ableitungen der Elemente von $\mathbb{Q}[x(t)]$ sind wiederum in diesem Körper enthalten, was sich anhand von

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + x(t) + 1) = 2x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t) \notin \mathbb{Q}[x(t)] \quad .$$

einfach veranschaulichen läßt. Demzufolge ist der Körper $\mathbb{Q}[x(t)]$ kein differentielles Ideal.

Im weiteren werden zur klaren Unterscheidung der verschiedenen Körper folgende Notationen verwendet:

- $A(x)$: Menge aller Polynome in x mit Koeffizienten in A .
 $A[x]$: Menge aller rationalen Funktion in x mit Koeffizienten in A .
 $A\{x\}$: Menge aller *differentiellen* Polynome in x mit Koeffizienten in A ,
d.h. der Menge aller Polynome in den Variablen $\{x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots\}$
mit Koeffizienten in A .
 $A\langle x \rangle$: Menge aller *differentiell* rationalen Funktion in x mit Koeffizienten in A .

Gegenüber $A(x)$ sind in $A\langle x \rangle$ beispielsweise zusätzlich Terme wie z.B.

$$\dot{x}, \dot{x}^2, \dots, \ddot{x}, \ddot{x}^2, \dots, \frac{\dot{x}}{\ddot{x}}, \frac{\dot{x}}{\ddot{x}^2}, \dots \quad (3.8)$$

enthalten.

Beispiel 3.2

Ein einfaches Beispiel für solch eine differentiell rationale Funktion in einer Variablen u mit Koeffizienten in \mathbb{Q} , also einem Element des Körpers $\mathbb{Q}\langle u \rangle$, ist

$$\frac{\ddot{u}^2 - u - 1}{\dot{u} + 1}.$$

Für eine differentielle Körpererweiterung L/K gilt nun, äquivalent zur klassischen Körpertheorie, $K \subseteq L$. Auch differentielle Erweiterungen L/K kann man grundsätzlich in zwei Klassen einteilen:

- a) Ein Element $a \in L$ ist *differentiell algebraisch* über K , wenn eine Differentialgleichung $P(a, \dot{a}, \dots, a^{(\alpha)}) = 0$ existiert, wobei P einem Polynom beliebigen Grades mit Koeffizienten in K entspricht.

Eine Körpererweiterung L/K heißt *differentiell algebraisch*, wenn alle Elemente von L differentiell algebraisch über K sind.

Beispiel 3.3

Sei L der Körper aller Funktionen in der Variablen s mit Koeffizienten in \mathbb{Q} und K die Menge der rationalen Zahlen. Dann ist die Funktion $\frac{1}{s} \in L$ differentiell algebraisch über K , weil mit

$$P(x, \dot{x}) = x^2 + \dot{x}$$

ein differentielles Polynom mit Koeffizienten aus K existiert, für das $P(x = \frac{1}{s}) = 0$ gilt.

- b) Ein Element $a \in L$ ist *differentiell transzendent* über K , wenn es nicht differentiell algebraisch ist. Existiert wenigstens ein Element von L , das differentiell transzendent ist, so wird die Körpererweiterung L/K ebenfalls als differentiell transzendent bezeichnet.

Beispiel 3.4

Seien L und K definiert wie in Beispiel 3.3. Die Funktion $\ln(s) \in L$ ist differentiell transzendent über K , weil außer einer trivialen Lösung offensichtlich kein endliches Polynom

$$P(\ln(s), \frac{d}{ds}(\ln(s)), \frac{d^2}{ds^2}(\ln(s)), \dots) = 0$$

existiert. Aus diesem Grunde ist die Körpererweiterung L/K differentiell transzendent.

Eine Teilmenge T mit den Elementen $\{\xi_i | i = 1, \dots, \mu\}$ und $T \subseteq L$ heißt *differentiell K -algebraisch abhängig*, wenn Elemente der Menge aller beliebigen Ableitungen $\{\xi_i^{(\nu_i)} | i = 1, \dots, \mu, \nu_i = 0, 1, 2, \dots\}$ ein Polynom $P(\xi_i^{(\nu_i)}) = 0$ mit Koeffizienten in K erfüllen. Anders formuliert sind die $\xi_i \in T$ nur dann differentiell K -algebraisch abhängig, wenn sie einer algebraischen Differentialgleichung genügen. Eine Teilmenge T von L , die nicht differentiell K -algebraisch abhängig ist, wird dementsprechend *differentiell K -algebraisch unabhängig* genannt. Hat eine mit T_{max} bezeichnete, differentiell K -algebraisch unabhängige Teilmenge eine maximale Anzahl von Elementen, so ist diese Menge eine *differentielle Transzendenzbasis* zu der Erweiterung L/K .

Auch für differentielle Transzendenzbasen gilt ebenso wie in der klassischen Algebra, daß alle Transzendenzbasen einer differentiellen Körpererweiterung L/K die gleiche Mächtigkeit haben, diese wird mit *differentieller Transzendenzgrad von L/K* bezeichnet. Wird die Menge M so gewählt, daß $K \subseteq M \subseteq L$ gilt, dann läßt sich der differentielle Transzendenzgrad von L/K in Analogie zu Gl. (16) indirekt bestimmen (Fliess 1990):

$$\text{diff. trg}(L/K) = \text{diff. trg}(L/M) + \text{diff. trg}(M/K) \quad . \quad (3.9)$$

Beispiel 3.5 (Fliess 1990, Meyberg 1976)

- a) Die Körpererweiterung L/K ist dann und nur dann *differentiell algebraisch*, wenn für den differentiellen Transzendenzgrad gilt:

$$\text{diff. Trg } L/K = 0 \quad .$$

- b) Sei $L = K\langle u_1, \dots, u_m \rangle$ die Menge aller differentiell rationalen Funktionen in u_1, \dots, u_m und deren Ableitungen mit Koeffizienten aus dem Körper K . Die u_i , $i = 1, \dots, m$ bilden dann eine differentielle Transzendenzbasis von $K\langle u_1, \dots, u_m \rangle/K$ mit

$$\text{diff. Trg } K\langle u_1, \dots, u_m \rangle/K = m \quad .$$

Eine solche Erweiterung wird als eine *rein differentiell transzendente* Erweiterung bezeichnet.

- c) Sei $u = \{u_i | i = 1, \dots, \mu\}$ eine differentielle Transzendenzbasis der Erweiterung L/K . Mit $K\langle u \rangle$ wird der differentielle Körper bezeichnet, der aus differentiell rationalen Funktionen in $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots$ mit Koeffizienten in K besteht. Die Erweiterung $L/K\langle u \rangle$ ist immer differentiell algebraisch, obwohl im allgemeinen die Körper L und $K\langle u \rangle$ nicht übereinstimmen. Dies läßt sich leicht erklären, wenn die zuvor diskutierten Zusammenhänge berücksichtigt werden. Denn die Transzendenzbasis u enthält die maximale Anzahl von transzendenten Elementen in L . Wenn diese nun in $K\langle u \rangle$ enthalten sind, so erfüllen auch alle über K transzendenten Elemente innerhalb von L Polynome mit Koeffizienten in $K\langle u \rangle$, was gleichbedeutend ist mit

$$\text{diff. Trg } L/K\langle u \rangle = 0 \quad .$$

Es existieren z. B. keine Koeffizienten $\alpha, \beta \in K$, für die das Polynom

$$P(u_1, u_2) = \alpha u_1 + \beta u_2 = 0$$

gilt, weil u_1 und u_2 per Definition eine Transzendenzbasis darstellen und somit unabhängig voneinander sind. In $K\langle u \rangle$ dagegen ist durch die triviale Koeffizientenwahl $\alpha = u_2$ und $\beta = -u_1$ eine Lösung für $P(u_1, u_2) = 0$ zu finden.

Zwischen den Eigenschaften einer differentiellen Körpererweiterung und ihrem (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad besteht eine sehr nützliche Beziehung:

Satz 3.1 (Fliess 1990)

Eine endlich generierte, differentielle Körpererweiterung ist dann und nur dann differentiell algebraisch, wenn ihr (nichtdifferentieller) Transzendenzgrad einen endlichen Wert annimmt. \square

Anschaulich bedeutet der Satz, daß der (nichtdifferentielle) Transzendenzgrad einer Körpererweiterung gerade der Anzahl an Startwerten entspricht, die zur Bestimmung einer Lösung der korrespondierenden, algebraischen Differentialgleichungen benötigt wird. Dieser Zusammenhang wird im folgenden Abschnitt näher erläutert.

3.3 Differentielle Vektorräume

Im zweiten Abschnitt wurde der Begriff *abstrakter Vektorraum* erläutert. Darauf aufbauend kann ein *differentieller K -Vektorraum* eingeführt werden, in dem neben den dort genannten Gesetzmäßigkeiten zusätzlich eine einzelne Differentiation d/dt definiert ist. Unter der Voraussetzung, daß K ein differentielles Körper ist, gilt in dem Vektorraum \mathcal{V} über K der folgende Zusammenhang für diese Differentiation: Für alle $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{V}$ und alle $a_1, a_2 \in K$ ist

$$\frac{d}{dt}(a_1 \mathbf{v}_1 + a_2 \mathbf{v}_2) = \dot{a}_1 \mathbf{v}_1 + a_1 \dot{\mathbf{v}}_1 + \dot{a}_2 \mathbf{v}_2 + a_2 \dot{\mathbf{v}}_2 \quad . \quad (3.10)$$

In Anlehnung an die Körpertheorie sind auch zur Charakterisierung von Vektorräumen eine Reihe von Bezeichnungen vorhanden. So ist eine Menge $\{\mathbf{v}_i | i = 1, \dots, \mu\}$ von Elementen in \mathcal{V} genau dann *differentiell K -linear abhängig*, wenn die Menge der Ableitungen $\{\mathbf{v}_i^{(\nu_i)} | i = 1, \dots, \mu, \nu_i = 0, 1, 2, \dots\}$ K -linear abhängig ist. Eine Menge, die nicht differentiell K -linear abhängig ist, wird *differentiell K -linear unabhängig* genannt. Innerhalb eines Vektorraums existieren immer solche unabhängigen Mengen mit einer maximalen Anzahl von Elementen, diese werden als *differentielle Basen* zu \mathcal{V} bezeichnet. Alle differentiellen Basen haben die gleiche Mächtigkeit, die auch die *differentielle Dimension* von \mathcal{V} genannt wird.

Beispiel 3.6 (Fliess 1990)

Unter $\mathbb{R}[t]$ ist die Menge aller reellen Polynome in der Variablen t zu verstehen:

$$\mathbb{R}[t] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{b_i} \right\} \quad ; \quad a_i \in \mathbb{R}; \quad b_i \in \mathbb{Z} \quad .$$

Diese läßt sich als differentieller \mathbb{R} -Vektorraum \mathcal{V} mit der unendlich dimensionalen Basis $\{t^0, t^1, t^2, \dots\}$ interpretieren. Die einzelnen Polynome $P(t)$ sind als Vektoren in \mathcal{V} zu verstehen, in Bild 3.2 ist dieser Sachverhalt für einen Untervektorraum \mathcal{V}' von \mathcal{V} veranschaulicht. Differenziert man ein beliebiges Polynom $P(t) \in \mathbb{R}[t]$ hinreichend

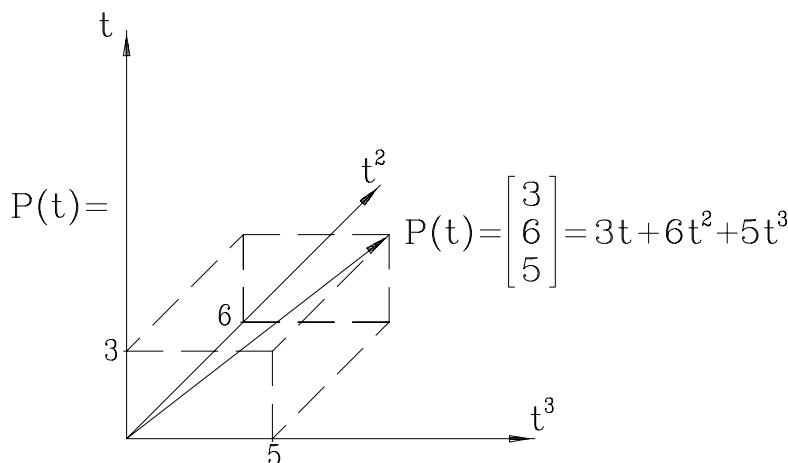


Bild 3.2: Interpretation des Polynoms $P(t)$ als Vektor im Vektorraum $\mathcal{V}' = \{t, t^2, t^3\}$ (Beispiel 3.6)

oft nach t , so ergibt sich, unabhängig vom betrachteten Polynom, der Wert Null. Für alle Polynome $P_i(t)$ in $\mathbb{R}[t]$ gilt deshalb

$$\sum_{i=1}^{\infty} P_i^{(\nu_i)}(t) \stackrel{!}{=} 0 \quad \text{für } \nu_i \text{ hinreichend groß} \quad ,$$

was gleichbedeutend ist mit der Aussage, daß alle Polynome differentiell K -linear abhängig sind. Folglich ist die differentielle Dimension von $\mathbb{R}[t]$ gleich Null. Demgegenüber ist die (nichtdifferentielle) Dimension von $\mathbb{R}[t]$ unendlich groß, weil eine

unendliche Anzahl von reellen Polynomen in t existiert, die im Vektorraum \mathcal{V} voneinander linear unabhängig sind.

3.4 Differentialalgebraische Systembeschreibung

In diesem Abschnitt wird aufgezeigt, wie sich mit Hilfe der Differentialalgebra das Ein-/Ausgangsverhalten eines nichtlinearen Systems beschreiben läßt. Hierzu wird, wie in der Algebra üblich, mit einer umfassenden Menge als Grundkörper gearbeitet und die für eine Problemlösung benötigten Elemente als Teilmenge dieses Grundkörpers angesehen.

Ein solcher differentieller Grundkörper Ω kann als eine Verallgemeinerung des Körpers der rationalen Zahlen angesehen werden. Mit $k \subset \Omega$ wird nun ein differentieller Körper bezeichnet, der mindestens alle Koeffizienten der zu betrachtenden System-Differentialgleichungen enthält. Im allgemeinen reichen für k die Mengen der rationalen oder reellen Zahlen aus. Der differentielle Körper $k\langle \mathbf{u} \rangle$ ist dann die Menge aller rationalen Funktionen in den Elementen von $\mathbf{u} = \{u_1, \dots, u_m\}$ sowie deren zeitlichen Ableitungen mit Koeffizienten in k . Die Ein-/Ausgangs-Differentialgleichungen, die ein Regelungssystem mit Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ und Ausgangsvektor $\mathbf{y}(t)$ beschreiben, werden nun mittels der endlich generierten Körpererweiterung $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{u} \rangle$ modelliert, wobei der differentielle Körper $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ gegenüber $k\langle \mathbf{u} \rangle$ zusätzlich die p Ausgangsgrößen y_1, \dots, y_p sowie deren zeitliche Ableitungen beinhaltet.

Die m Eingänge u_1, \dots, u_m eines Systems werden im weiteren als voneinander unabhängig vorausgesetzt, d.h. der Eingangsvektor $\mathbf{u}(t)$ stellt eine differentielle Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k\langle \mathbf{u} \rangle / k$ dar. Vergleicht man die Aussage mit der Definition in Abschnitt 3.2, so sind die Eingänge nur dann voneinander unabhängig, wenn keine Polynome

$$P(u_i, \dot{u}_i, \dots) = 0 \quad ; \quad i \subseteq \{1, \dots, m\} \quad (3.11)$$

existieren. Dieser Zusammenhang ist einsichtig, denn wenn zwei oder mehr Systemeingänge über eine Differentialgleichung und im korrespondierenden, realen System somit auch physikalisch miteinander verknüpft sind, so sind sie zwangsläufig voneinander abhängig.

Aus differentialalgebraischer Sicht spricht man dann von einem Eingangs-/Ausgangssystem, wenn die Körpererweiterung $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{u} \rangle$ differentiell algebraisch ist, d.h. die Komponenten des Ausgangsvektors \mathbf{y} differentiell algebraisch über $k\langle \mathbf{u} \rangle$ sind. Diese Definition besagt ganz allgemein, daß die Komponenten von \mathbf{u} und \mathbf{y} durch eine oder mehrere implizite Differentialgleichungen höherer Ordnungen in den Variablen y_i ; $i = 1, \dots, p$ und u_k ; $k = 1, \dots, m$ miteinander verknüpft sind:

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \dots) = \mathbf{0} \quad . \quad (3.12)$$

4 Differentialalgebraische Systemanalyse

Mit Hilfe der Differentialalgebra lassen sich zahlreiche aus der linearen Systemtheorie bekannte Konzepte und Kenngrößen auf nichtlineare Systeme übertragen. Ein Teil der Kenngrößen für nichtlineare Systeme resultiert direkt aus den oben definierten Körpererweiterungen $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k$ bzw. $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{u} \rangle$. Für die weiteren Betrachtungen ist es sinnvoll, zusätzlich den differentiellen Körper $k\langle \mathbf{y} \rangle$ einzuführen, der der angewendeten Nomenklatur zufolge aus rationalen Funktionen der Variablen $\mathbf{y}^{(i)}$ mit Koeffizienten in k besteht.

4.1 Differentieller Rang

Eine für die Analyse und Synthese von Regelungssystemen wichtige Kenngröße ist der *Rang* eines Systems. Für lineare Systeme entspricht diese Größe gerade dem Rang der Übertragungsmatrix $\mathbf{F}(\mathbf{s})$ und ist für eine Reihe von Systemeigenschaften wie z.B. die Invertierbarkeit und die Entkoppelbarkeit von fundamentalem Interesse. Die dem Begriff *Rang eines Systems* zugrundeliegende Beschreibungsform der Übertragungsmatrix ist allerdings auf die Klasse der linearen Systeme beschränkt, so daß der Rang-Begriff nicht unmittelbar auf nichtlineare Systeme übertragbar ist.

Dieses Problem wurde zunächst dadurch umgangen, daß man die von den linearen Systemen her bekannten Inversions- und Entkopplungsalgorithmen auf nichtlineare Systeme erweiterte. Ausgehend von den Arbeiten von Hirschhorn (1979) entwickelte beispielsweise Singh (1981) einen Algorithmus zur Berechnung der Linksinversen eines nichtlinearen Systems, der als eine Verallgemeinerung des bekannten Silverman-Inversionsalgorithmus (Silverman 1969) angesehen werden kann.

Eine klare und präzise Definition des *Ranges eines nichtlinearen Systems* konnte dann erst Mitte der achtziger Jahre mit Hilfe der Differentialalgebra von Fliess (1986b) angegeben werden. Fliess führte hierzu den Begriff *differentieller Rang* ρ^* eines nichtlinearen Systems ein, der durch

$$\rho^* = \text{diff. trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k \quad (4.1)$$

definiert ist. Dieser differentielle Rang eines Systems entspricht also der maximalen Anzahl der differentiell k -algebraisch unabhängigen Elemente von $k\langle \mathbf{y} \rangle$ bzw. der Anzahl der voneinander unabhängigen Ausgangsvariablen y_i , $i = 1, \dots, p$. Mit anderen Worten ist der differentielle Rang mit dem differentiellen Transzendenzgrad des durch die Ausgänge generierten differentiellen Körpers identisch. Für ρ^* gilt, wie im linearen Fall für den Rang der Übertragungsmatrix, der Zusammenhang

$$\rho^* \leq \min(m, p) \quad . \quad (4.2)$$

Insbesondere kann bei Anwendung der Differentialalgebra auf lineare Systeme bewiesen werden, daß der differentielle Rang ρ^* mit dem Rang der Übertragungsmatrix $\mathbf{F}(s)$ übereinstimmt (Fliess 1986a).

Beispiel 4.1

a) Es wird ein einfaches bilineares System mit dem Zustandsmodell

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ x_1(t) & 0 \\ x_2(t) & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)\end{aligned}$$

betrachtet. Als differentieller Körper k der Koeffizienten der Differentialgleichungen wird die Menge der rationalen Zahlen \mathbb{Q} verwendet. Die Erweiterung $\mathbb{Q}\langle\mathbf{y}\rangle$ wird durch die rationalen Zahlen und die beiden Ausgangsgrößen y_1 und y_2 generiert. Für die Bestimmung des differentiellen Systemrangs ist nun der differentielle Transzendenzgrad von $\mathbb{Q}\langle\mathbf{y}\rangle/\mathbb{Q}$ zu bilden. Er entspricht gerade der Anzahl von Ausgangsgrößen in $\mathbb{Q}\langle\mathbf{y}\rangle$, die keine algebraische Differentialgleichung mit Koeffizienten in \mathbb{Q} erfüllen. Zwar existiert mit

$$\dot{y}_2 = \dot{x}_3 = u_1 x_2 = u_1 y_1$$

eine differentielle Beziehungen zwischen y_1 und y_2 , allerdings mit nicht in \mathbb{Q} , dem Körper der rationalen Zahlen, enthaltenen Koeffizienten wie z.B. u_1, u_2, \dots . Weil keine Polynome

$$P(y_1, y_2, \dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots) = 0$$

mit ausschließlich rationalen Koeffizienten existieren, bilden die beiden Ausgangsgrößen eine Transzendenzbasis. Der differentielle Rang nimmt folglich den Wert

$$\rho^* = \text{diff. trg } \mathbb{Q}\langle\mathbf{y}\rangle/\mathbb{Q} = 2$$

an.

b) Gegeben ist ein ALS mit den Systemmatrizen

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Das System hat einen Eingang u und zwei Ausgänge y_1 und y_2 , der Rang des Systems kann demzufolge wegen Gl. (4.2) nicht größer als 1 sein. Es muß also ein Polynom

$P(\mathbf{y}^{(i)}) = 0$ existieren, welches die beiden Ausgangsgrößen miteinander verknüpft. Bildet man die zeitlichen Ableitungen von $\mathbf{y}(t)$, so erhält man

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = u \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = x_3^2 \Rightarrow \ddot{y}_2 = 2x_3\dot{x}_3 = 2x_3u \quad . \end{aligned}$$

Die Elimination von u führt dann zu der gesuchten Differentialbeziehung zwischen y_1 und y_2 :

$$\dot{y}_1 = u = \frac{\ddot{y}_2}{2x_3}; \quad x_3^2 = \dot{y}_2 \quad \Rightarrow \quad \dot{y}_1^2 = \frac{\ddot{y}_2^2}{4\dot{y}_2} \quad .$$

c) Es soll der differentielle Rang $\rho^* = \text{diff. trg } \mathbb{R}\langle \mathbf{y} \rangle / \mathbb{R}$ des im ersten Abschnitt diskutierten Rührkesselreaktors ermittelt werden. Für das nichtlineare Zustandsmodell erhält man in verkürzter Schreibweise

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -k_1(x_3)x_1 - k_3(x_3)x_1^2 + (c_{A_0} - x_1)u_1, & y_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= k_1(x_3)x_1 - k_2(x_3)x_2 - x_2u_1, & y_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= \bar{k}_1(x_3)x_1 + \bar{k}_2(x_3)x_2 + \bar{k}_3(x_3)x_1^2 + \bar{k}_4(x_3)u_1 + \alpha_2(x_4 - x_3) \\ \dot{x}_4 &= \alpha_3u_2 + \alpha_4(x_3 - x_4) \quad . \end{aligned}$$

Damit berechnet sich die zeitliche Ableitung von y_1 zu

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{x}_2 &= k_1(x_3)x_1 - k_2(x_3)x_2 - x_2u_1 \\ &= k_1(y_2)x_1 - k_2(y_2)y_1 - y_1u_1 \quad . \end{aligned}$$

Werden die anderen Zustandsgleichungen analysiert, so ist zu erkennen, daß der Term y_1u_1 nicht eliminiert werden kann. Die beiden Ausgangsgrößen können also nicht durch eine Differentialgleichung mit rein rationalen Koeffizienten verknüpft werden, so daß der Rührkesselreaktor den vollen Rang $\rho^* = 2$ hat.

4.2 Invertierbarkeit

Bei linearen Systemen läßt sich in Abhängigkeit vom Rang entscheiden, ob ein System *links-* bzw. *rechtsinvertierbar* ist. Das sind wesentliche Systemeigenschaften, die u. a. anzeigen, ob sich aus Kenntnis der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ eines Systems die Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ berechnen läßt. Vollständig analog zu den linearen Systemen wird ein nichtlineares System nun als *differentiell linksinvertierbar* bezeichnet, wenn

$$\rho^* = m \tag{4.3}$$

gilt und als *differentiell rechtsinvertierbar*, wenn der Zusammenhang

$$\rho^* = p \quad (4.4)$$

erfüllt ist. Es kann nun mit Hilfe der Differentialalgebra relativ einfach und elegant bewiesen werden, daß auch bei nichtlinearen Systemen die Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ genau nur dann aus der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ berechnet werden kann, wenn das System differentiell linksinvertierbar ist. Denn aus den Gln. (4.1) und (4.3) folgt für linksinvertierbare Systeme sofort

$$\text{diff. trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k = m \quad . \quad (4.5)$$

Wie bereits weit oben dargestellt, wird die Menge $\{u_1, \dots, u_m\}$ der Eingangsgrößen als voneinander unabhängig vorausgesetzt. Diese Menge ist somit eine differentielle Transzendenzbasis der Körpererweiterung $k\langle \mathbf{u} \rangle / k$. Man hat also m unabhängige Eingänge, so daß der differentielle Transzendenzgrad von $k\langle \mathbf{u} \rangle / k$ sich folglich zu (vgl. Abschnitt 3.2)

$$\text{diff. trg } k\langle \mathbf{u} \rangle / k = m \quad (4.6)$$

ergibt.

Betrachtet man nun die Erweiterung $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k$, so kann deren differentiieller Transzendenzgrad nicht größer als m sein, da die Ein- und Ausgänge eines Systems über Differentialgleichungen miteinander verknüpft sind. Es gilt also auch

$$\text{diff. trg } k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k = m \quad . \quad (4.7)$$

Die Anwendung der differentiiellen Gradformel gemäß Gl. (27) führt bei Berücksichtigung von (4.5) und (4.6) zu

$$\begin{aligned} \text{diff. trg } k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k &= \text{diff. trg } k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{y} \rangle + \text{diff. trg } k\langle \mathbf{y} \rangle / k \\ \Leftrightarrow \quad m &= \text{diff. trg } k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{y} \rangle + m \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\Rightarrow \quad \text{diff. trg } k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle / k\langle \mathbf{y} \rangle = 0 \quad .$$

Die Menge $\{u_1, \dots, u_m\}$ ist demzufolge differentiell algebraisch über $k\langle \mathbf{y} \rangle$, so daß alle u_i durch algebraische Differentialgleichungen mit Koeffizienten in k und $\{\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dots\}$ beschrieben werden können. Für differentiell linksinvertierbare Systeme kann daher allein aus der Kenntnis der Ausgangsgröße $\mathbf{y}(t)$ die Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ ermittelt werden.

Beispiel 4.2

Es wird nochmals das bilineare System aus Beispiel 4.1 betrachtet. Eine zweimalige Differentiation der Ausgangsgrößen liefert zunächst

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 & &= u_1 x_1, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_3 & &= u_1 x_2, \\ \ddot{y}_1 &= \dot{u}_1 x_1 + u_1 \dot{x}_1 & &= \dot{u}_1 x_1 + u_1 u_2, \end{aligned}$$

Aus der ersten Ableitung der zweiten Ausgangsgröße ergibt sich sofort eine Berechnungsgleichung für die erste Eingangsgröße:

$$u_1 = \frac{\dot{y}_2}{x_2} = \frac{\dot{y}_2}{y_1}.$$

Aus der zweiten Ableitung der ersten Ausgangsgröße folgt für $u_2(t)$ zunächst

$$u_2 = \frac{1}{u_1} (\ddot{y}_1 - \dot{u}_1 x_1).$$

Mit Hilfe von

$$u_1 = \frac{\dot{y}_2}{y_1}, \quad \dot{u}_1 = \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{y}_2}{y_1} \right) = \frac{\ddot{y}_2 y_1 - \dot{y}_2 \dot{y}_1}{y_1^2}, \quad x_1 = \frac{\dot{y}_1}{u_1} = \frac{\dot{y}_1 y_1}{\dot{y}_2}$$

ergibt sich folgende differentielle Gleichung für die zweite Eingangsgröße:

$$u_2 = \frac{y_1 \ddot{y}_1}{\dot{y}_2} - \frac{\dot{y}_1}{\dot{y}_2^2} (\ddot{y}_2 y_1 - \dot{y}_2 \dot{y}_1).$$

Ist die Anzahl m der Eingangsgrößen eines Systems größer als die Anzahl p der Ausgangsgrößen, so folgt aus (4.2) unmittelbar, daß der differentielle Transzendenzgrad niemals größer als p sein kann und daß solche Systeme immer *nicht* linksinvertierbar sind. Wenn der differentielle Transzendenzgrad ρ^* gleich der Anzahl p der Ausgangsgrößen ist, so ist damit sichergestellt (Fliess 1987), daß für diese rechtsinvertierbaren Systeme immer eine *dynamische* Rückführung existiert, die eine Entkopplung des Ein-/Ausgangsverhalten bewirkt (Schwarz 1991, Svaricek 1993).

4.3 Beobachtbarkeit

Neben der Steuerbarkeit stellt die Beobachtbarkeit eines der Schlüsselkonzepte der von Kalman (1960) eingeführten Zustandsraummethoden dar. Seit diesem Zeitpunkt haben sich viele Autoren mit diesem Begriff auseinandergesetzt, wobei erste Ansätze zur Übertragung auf nichtlineare Systeme auf Mitte der siebziger Jahre zurückgehen (Hermann und Krener 1977, Williamson 1977, Sontag 1979). Eine aktuelle Übersicht über die verschiedenen differentialgeometrischen Definitionsmöglichkeiten der *Beobachtbarkeit*

nichtlinearer Systeme kann den Büchern von Isidori (1989) bzw. Nijmeijer und van der Schaft (1990) entnommen werden.

Erst kürzlich wurde von Diop und Fliess (1991) erstmals eine rein algebraische Charakterisierung der Beobachtbarkeit eines nichtlinearen Systems vorgestellt. Diese algebraische Definition geht dabei von folgenden heuristischen Überlegungen aus: Eine Zustandsvariable x_i wird üblicherweise dann beobachtbar genannt, wenn sie sich aus den als bekannt vorausgesetzten Ein- und Ausgangsgrößen berechnen läßt. Hierzu sind im allgemeinen Differentialgleichungen zu lösen und es stellt sich die Frage, ob zur Berechnung der Zustandsgröße x_i der Anfangszustand $x(t_0)$ unbedingt gegeben sein muß. Diese Frage kann dann mit Nein beantwortet werden, wenn die Zustandsgröße x_i eine nichttriviale, rein algebraische Gleichung mit Koeffizienten in \mathbf{u} und \mathbf{y} erfüllt. Mit anderen Worten, die Zustandsgröße x_i muß algebraisch über dem Körper $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ sein. Ein System

$$\begin{aligned} \Sigma_{ALS} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) & \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n; \quad \mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)) & \mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p. \end{aligned} \quad (4.9)$$

ist in diesem Sinne dann vollständig beobachtbar, wenn alle x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ über dem differentiellen Körper $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ algebraisch sind, d.h. für jedes x_i ein Polynom der Form

$$P(x_i, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{u}}, \dots) = 0 \quad (4.10)$$

existiert.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß ein System (4.9) dann und nur dann vollständig beobachtbar ist, wenn für den (nichtdifferentiellen) Transzendenzgrad der Erweiterung $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle(\mathbf{x})/k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ gilt:

$$\text{Trg } k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle(\mathbf{x})/k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle = 0 \quad . \quad (4.11)$$

Anders als bei linearen Systemen kann die Beobachtbarkeit bei nichtlinearen Systemen auch von den Eingangsvariablen abhängig sein. Wie das folgende Beispiel zeigt, kann diese Abhängigkeit bereits bei einfachen nichtlinearen Systemen auftreten.

Beispiel 4.3

Es wird ein bilineares System mit den Zustandsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t)u_2(t) + u_1(t) \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \\ y(t) &= x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$

betrachtet. Aus der ersten Ableitung der Ausgangsgröße

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = x_2u_2 + u_1 + u_2$$

ergibt sich sofort eine Berechnungsgleichung für die zweite Zustandsgröße:

$$x_2 = \frac{1}{u_2}(\dot{y} - u_1 - u_2) .$$

Ersetzt man in der Ausgangsgleichung x_2 durch diesen Ausdruck, so ergibt sich für $x_1(t)$:

$$x_1 = y - x_2 = y - \frac{1}{u_2}(\dot{y} - u_1 - u_2) .$$

Diese beiden Bestimmungsgleichungen lassen sich allerdings nur dann lösen, wenn $u_2(t)$ von Null verschieden ist. Andernfalls ist das System nicht mehr vollständig beobachtbar, da zumindest eine der beiden Anfangswerte des Zustandsvektors bekannt sein muß, um die Differentialgleichung

$$\dot{y} = \dot{x}_1 + \dot{x}_2$$

zu integrieren.

4.4 Struktur im Unendlichen nichtlinearer Systeme

Weitere wesentliche Kenngrößen nichtlinearer Systeme lassen sich anhand der sogenannten *Nullstellenstruktur im Unendlichen* definieren. Dieser Begriff, der bei linearen Systemen direkt mit den Differenzgraden gewisser Unterdeterminanten der Übertragungsmatrix $\mathbf{F}(s)$ verknüpft ist (Svaricek 1994), hat für nichtlineare Systeme keine derart anschauliche Grundlage. Dennoch kann die Struktur im Unendlichen als eine aussagekräftige Größe für die Analyse nichtlinearer Systeme angesehen werden.

Als einer der ersten, der die Differentialalgebra im Bereich der nichtlinearen Regelungstheorie verwendete, führte Fliess (1986a) eine *algebraische* Definition für die Struktur im Unendlichen von nichtlinearen Systemen ein. Diese wird anhand von differentiellen k -Vektorräumen erstellt, welche aus den *Differentialen* der Ein- und Ausgangsgrößen resultieren. Im Gegensatz zur differentialgeometrisch definierten Struktur im Unendlichen (Isidori 1983, Nijmeijer und Schumacher 1985) verfügt die algebraische Darstellung über eine Reihe von Vorteilen, z.B. ist sie *global* über dem Zustandsraum eines Systems gültig und in ihren Eigenschaften konsistent mit den bekannten Eigenschaften der unendlichen Nullstellen linearer Systeme.

Geht man von einem ALS-Zustandsmodell der Form (4.9) aus, so lassen sich zunächst die

zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgröße durch den Zusammenhang

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \\
 \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \\
 &\vdots \\
 \mathbf{y}^{(k+1)}(t) &= \mathbf{y}^{(k+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) &= \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} \mathbf{u}^{(i+1)},
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

beschreiben. Hierbei sind die $\mathbf{y}^{(i)}(t)$ nicht nur Funktionen der Eingangsgröße $\mathbf{u}(t)$ und deren zeitlichen Ableitungen, sondern auch vom Zustand $\mathbf{x}(t)$. Will man auf die Betrachtung einer reinen Ein-/Ausgangsdarstellung verzichten und die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgrößen in der Form (4.12) differentialalgebraisch beschreiben, so reicht der oben definierte Körper $k\langle \mathbf{u} \rangle$ hierfür nicht aus. Denn in ihm sind keine Funktionen in $\mathbf{x}(t)$ enthalten, die aber als Koeffizienten der Differentialgleichungen benötigt werden. Deshalb wird nun der differentielle Körper K eingeführt, der neben $k\langle \mathbf{u} \rangle$ auch alle rationalen Funktionen in $\mathbf{x}(t)$ als Elemente enthalten soll. K besteht also aus rationalen Funktionen in $(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})$ mit meromorphen¹ Koeffizienten in der Variablen $\mathbf{x}(t)$ (Di Benedetto u.a. 1989).

Der Körper K enthält im Gegensatz zum Körper $k\langle \mathbf{u}, \mathbf{y} \rangle$ keine zeitlichen Ableitungen von $\mathbf{x}(t)$. Dies ist aus mathematischer Sicht sinnvoll, denn durch sukzessives Einsetzen der Zustandsgleichungen (vgl. (4.12)) tritt in den Differentialgleichungen kein Koeffizient mit zeitlichen Ableitungen von $\mathbf{x}(t)$ auf.

Über dem differentiellen Körper K wird nun ein differentieller Vektorraum \mathcal{U} definiert. Er wird aufgespannt durch die Basis $\{d\mathbf{u}, \dots, d\mathbf{u}^{(n-1)}\}$, wobei der Operator 'd' die Bildung eines Differentials entsprechend der Gleichung

$$d\eta(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^j \frac{\partial \eta(\mathbf{v})}{\partial v_i} dv_i \tag{4.13}$$

bedeutet.

Beispiel 4.4

Die Elemente der Vektorraum-Basis von \mathcal{U} sind in der vorliegenden Schreibweise in sogenannten *lokalen Koordinaten* notiert. Aus dieser Darstellung resultiert unmittelbar die bekanntere, aber schreibaufwendigere Vektorschreibweise, z. B. für $n = 2$ und $m = 2$:

$$\text{span} \{du_1, du_2, d\dot{u}_1, d\dot{u}_2\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

¹Eine Funktion heißt meromorph, innerhalb eines offenen Gebiets Γ , wenn sie in Γ bis auf Pole analytisch ist (Engell 1988).

Anhand der Gleichung ist sofort zu erkennen, daß die Differentiale $d\mathbf{u}^{(i)}$ keine Variablen darstellen, die Zahlenwerte annehmen. Vielmehr müssen sie in Bezug auf den Körper K gesehen werden und können als die aufspannenden Vektoren des K -Vektorraums \mathcal{U} interpretiert werden.

Die Projektionen der Ausgangsgrößen-Differentiale $d\mathbf{y}^{(i)}$; $0 \leq i \leq n$ auf \mathcal{U} spannen nun differentielle K -Vektorräume auf, deren differentielle Dimensionen mit σ_i bezeichnet werden. Aus diesen σ_i mit $0 = \sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \dots \leq \sigma_\nu \leq \dots \leq \min(m, p)$ läßt sich direkt die Nullstellenstruktur im Unendlichen eines Systems definieren (Fliess 1986a): Die Differenz $\sigma_{\nu+1} - \sigma_\nu$ gibt die *Anzahl der Nullstellen im Unendlichen* der Ordnung $\nu + 1$ an. Das Maximum der ganzzahligen Größen σ_i ist gleich der (Gesamt)–Anzahl der Nullstellen im Unendlichen und entspricht dem differentiellen Rang des Systems.

5 Algebraische Systemanalyse

Zur Berechnung des differentiellen Ranges nichtlinearer Systeme läßt sich ein leicht zu realisierender Algorithmus nicht unmittelbar angeben. Die Bearbeitung dieser Fragestellung lieferte nicht nur die gesuchten Algorithmen, sondern deckte auch interessante Zusammenhänge (Di Benedetto u.a. 1989) zwischen den verschiedenen in der Literatur bekannten Invertierbarkeitsaussagen (Singh 1981, Nijmeijer 1986, Descusse und Moog 1987), dem differentiellen Rang von Fliess und einer neuen rein algebraischen Analysemethode auf. Es zeigte sich, daß ein System beispielsweise genau dann im Sinne von Nijmeijer (1986) rechtsinvertierbar ist, wenn der differentielle Rang ρ^* gleich der Anzahl der Ausgangsgrößen ist, d.h. auch im Sinne von Fliess rechtsinvertierbar ist. Ein entsprechender Zusammenhang konnte auch zwischen der Linksinvertierbarkeit nach Singh (1981) und Fliess (1986b) angegeben werden.

Die in diesem Kontext entwickelte algebraische Methode hat darüber hinaus den entscheidenden Vorteil, daß nur noch *gewöhnliche* Vektorräume bestehend aus Differentialen von Funktionen, die mittels der Ausgangsgrößen des nichtlinearen Systems gebildet werden, zu betrachten sind. Weder zur Ableitung noch zur Anwendung der im folgenden dargestellten Ergebnisse sind also besondere mathematische Kenntnisse aus den Bereichen Differentialalgebra bzw. Differentialgeometrie erforderlich.

Betrachtet werden nichtlineare Systeme der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{B}(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \quad (5.1)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}(t)), \quad (5.2)$$

wobei $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$ und $\mathbf{a}(\cdot)$, die Spalten von $\mathbf{B}(\cdot)$ sowie die Zeilen von $\mathbf{c}(\cdot)$ meromorphe Funktionen (Engell 1988) von $\mathbf{x}(t)$ sind. Die Eingangsfunktionen $u_i(t)$ sollen darüber hinaus n -mal stetig differenzierbar sein.

Wichtig ist nun, daß mit $\mathbf{u}^{(0)} := \mathbf{u}(t)$, $\mathbf{u}^{(i+1)} := d/dt \mathbf{u}^{(i)}(t)$ die Größen $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)}$ als unabhängige Variablen betrachtet werden. Des weiteren wird ein Körper \mathcal{K} benötigt, der aus der Menge der rationalen Funktionen von $(\mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(n-1)})$ mit meromorphen Koeffizienten in \mathbf{x} besteht. Für einen solchen Körper mit den unabhängigen Variablen (v_1, \dots, v_j) gilt für die partielle Differentiation $\partial/\partial v_i$ einer meromorphen Funktion $\eta(\mathbf{v}) = p(\mathbf{v})/q(\mathbf{v})$, wobei $p(\cdot)$ und $q(\cdot)$ analytisch sind, die bekannte Quotientenregel:

$$\frac{\partial}{\partial v_i} \frac{p(\mathbf{v})}{q(\mathbf{v})} = \frac{q(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_i} p(\mathbf{v}) - p(\mathbf{v}) \frac{\partial}{\partial v_i} q(\mathbf{v})}{q^2(\mathbf{v})}. \quad (5.3)$$

Das vollständige Differential von $\eta(\mathbf{v})$ bestimmt sich mit (5.3) dann zu:

$$d\eta(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^j \frac{\partial \eta(\mathbf{v})}{\partial v_i} dv_i. \quad (5.4)$$

Betrachtet man die zeitlichen Ableitungen der Ausgangsgrößen $\mathbf{y}(t)$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}}(t) &= \dot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) &= \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] \\ \ddot{\mathbf{y}}(t) &= \ddot{\mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}) &= \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \frac{\partial \dot{\mathbf{y}}}{\partial \mathbf{u}} \dot{\mathbf{u}} \\ &\vdots \\ \mathbf{y}^{(k+1)} &= \mathbf{y}^{(k+1)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}) &= \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{u}] + \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\partial \mathbf{y}^{(k)}}{\partial \mathbf{u}^{(i)}} \mathbf{u}^{(i+1)}, \end{aligned} \quad (5.5)$$

so sind diese meromorphen Funktionen von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dots, \mathbf{u}^{(k)}$.

Ein abstrakter Vektorraum \mathcal{E} über dem Körper \mathcal{K} werde jetzt durch die Komponenten von $d\mathbf{x}, d\mathbf{u}, \dots, d\mathbf{u}^{(n-1)}$ aufgespannt. Dieser Vektorraum setzt sich dabei aus allen möglichen Linearkombinationen von dx_i und $du_i^{(j)}$ mit Koeffizienten aus \mathcal{K} zusammen und ist ein gewöhnlicher Vektorraum, d.h. kein differentieller Vektorraum. Eine Kette von Unterräumen $\mathcal{E}_0 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n$ sei nun durch

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &:= \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}\} = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx_1, \dots, dx_n\} \\ \mathcal{E}_1 &:= \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}\} = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_p\} \\ &\vdots \\ \mathcal{E}_n &:= \text{span}_{\mathcal{K}} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(n)}\} \\ &= \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_p, \dots, dy_1^{(n)}, \dots, dy_p^{(n)}\} \quad . \end{aligned} \quad (5.6)$$

definiert. Die Liste $\rho_0 \leq \dots \leq \rho_n$ der zugehörigen Dimensionen ist dann durch

$$\rho_k := \dim \mathcal{E}_k \quad (5.7)$$

gegeben, wobei für die Dimension von $\mathcal{E}_0 = \text{span}_{\mathcal{K}} \{dx_1, \dots, dx_n, dy_1, \dots, dy_p\}$ immer $\rho_0 = \dim \mathcal{E}_0 = \dim (\text{span}_{\mathcal{K}} \{dx_1, \dots, dx_n\})$ gilt, da der Ausgang $\mathbf{y}(t)$ nur von $\mathbf{x}(t)$ abhängt.

Die Differentiale $d\dot{\mathbf{y}}, d\ddot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(n)}$ sind aufgrund der Gln. (5.4) und (5.5) Funktionen in den Elementen der Basis $\{d\mathbf{x}, d\mathbf{u}, d\dot{\mathbf{u}}, \dots, d\mathbf{u}^{(n-1)}\}$ von \mathcal{E} . Sie können somit als Vektoren in \mathcal{E} aufgefaßt werden, die ihrerseits wieder Vektorräume aufspannen. Es gilt daher der Zusammenhang $\mathcal{E}_0 \subset \dots \subset \mathcal{E}_n \subset \mathcal{E}$. Die Vektorräume \mathcal{E}_0 bis \mathcal{E}_2 dieser Kette sind in Bild 5.1

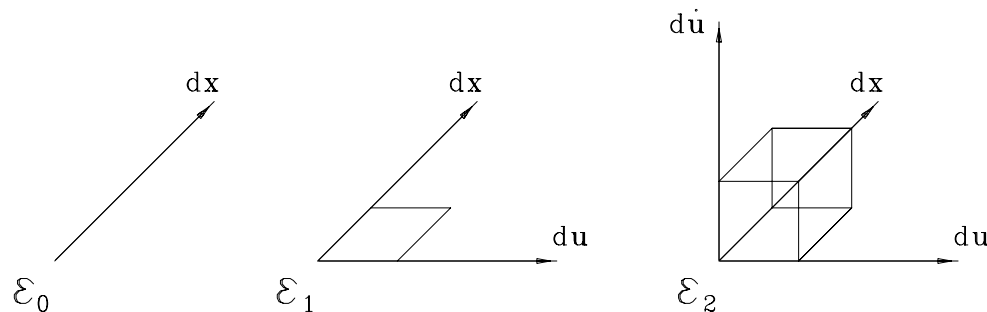


Bild 5.1: Kette von Vektorräumen $\mathcal{E}_0 \subset \mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2$

schematisch wiedergegeben, wobei die mit $d\mathbf{x}$, $d\mathbf{u}$ und $d\dot{\mathbf{u}}$ gekennzeichneten Vektoren als Stellvertreter für mehrdimensionale Räume zu verstehen sind.

Beispiel 5.1

Gegeben sei ein ALS mit $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^3$, $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^2$ und

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 \\ x_1 \\ x_1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & x_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Zunächst berechnet man die erste zeitliche Ableitung der Ausgangsgrößen und daraus die zugehörigen Differentiale:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 u_2 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_3 &= x_1 + u_2 \\ \Rightarrow d\dot{y}_1 &= dx_1 + x_2 du_2 + u_2 dx_2 \\ d\dot{y}_2 &= dx_1 + du_2 \end{aligned}$$

Die Basis für den Vektorraum \mathcal{E} ist

$$\{dx_1, dx_2, dx_3, du_1, du_2, d\dot{u}_1, d\dot{u}_2, d\ddot{u}_1, d\ddot{u}_2\} ,$$

so daß sich für die ersten beiden Untervektorräume folgende Ergebnisse errechnen

lassen:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0 &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3\} = \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} \\ \mathcal{E}_1 &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dy_1, dy_2\} \\ &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_1 + u_2 dx_2 + x_2 du_2, dx_1 + du_2\} \\ &= \text{span} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ u_2 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\} . \end{aligned}$$

Beispiel 5.2

Besonders einfach läßt sich die Dimension eines Vektorraums durch eine Rangbestimmung der Matrix errechnen, deren Spalten den aufspannenden Vektoren entsprechen. In Beispiel 5.1 ergibt sich z. B. für die Dimension von \mathcal{E}_0

$$\rho_0 = \dim \mathcal{E}_0 = \text{rang} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \mathbf{0} & & \end{bmatrix} = 3 .$$

Die definierten Vektorräume $\mathcal{E}_0, \dots, \mathcal{E}_n$ und deren Dimensionen enthalten eine Reihe von strukturellen Informationen über das zugehörige System. So gilt beispielsweise für den differentiellen Rang (Di Benedetto u.a. 1989):

$$\rho^* = \sigma_n = \rho_n - \rho_{n-1} . \quad (5.8)$$

Darüber hinaus kann mit ihnen auch sofort eine nichtdifferentielle Definition für die Struktur im Unendlichen abgeleitet werden:

Definition 5.1 (Moog 1988, Di Benedetto u.a. 1989)

Die Anzahl σ_k der Nullstellen im Unendlichen der Ordnung kleiner oder gleich k , $k \geq 1$, ist $\sigma_k = \dim \mathcal{E}_k - \dim \mathcal{E}_{k-1}$. Setzt man $\sigma_0 := 0$, so ergibt sich die Anzahl der Nullstellen im Unendlichen der Ordnung k aus $\sigma_k - \sigma_{k-1}$.

Diese Charakterisierung der Nullstellenstruktur im Unendlichen eines nichtlinearen Systems stimmt für die Klasse der linearen Systeme mit den bekannten Definitionen (Svaricek 1994) für lineare Systeme überein. Darüber hinaus verfügen diese algebraischen Nullstellen im Unendlichen über viele der von den linearen Systemen her vertrauten Eigenschaften. So ist beispielsweise die Summe der Ordnungen $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{\sigma_n}$, der nichtlinearen Nullstellen im Unendlichen stets kleiner oder gleich der Anzahl n der Zustände. Diese charakteristische Nullstelleneigenschaft besitzen die von Nijmeijer und Schumacher (1985) mittels der Differentialgeometrie definierten nichtlinearen Nullstellen im Unendlichen nicht (Nijmeijer und van der Schaft 1990).

Für die Ermittlung der Struktur im Unendlichen ist die Begrenzung (Di Benedetto u.a. 1989)

$$\sigma_k = \dim \mathcal{E}_k - \dim \mathcal{E}_{k-1} \leq \min(m, p) \quad (5.9)$$

der Zunahme σ_k der Dimensionen der Vektorräume \mathcal{E}_k von Interesse. Sobald ein σ_k in (5.9) erstmalig gleich dem Minimum der Anzahl der Ein- und Ausgänge ist, kann die Bildung und Untersuchung dieser Vektorräume beendet werden, da entsprechend der Definition 5.1 Nullstellen mit einer Ordnung größer als k dann nicht mehr auftreten können. Insbesondere bei Mehrgrößensystemen höherer Ordnung kann der Einsatz des Abbruchkriteriums (5.9) eine erhebliche Reduzierung des erforderlichen Rechenaufwandes bewirken.

Die Bestimmung dieser algebraisch definierten Struktur im Unendlichen soll an einem überschaubaren Beispiel erläutert werden.

Beispiel 5.3

Gegeben sei das bilineare System aus dem Beispiel 4.1 mit dem Zustandsmodell:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= u_2(t), & y_1(t) &= x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) &= u_1(t)x_1(t), & y_2(t) &= x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) &= u_1(t)x_2(t). \end{aligned}$$

Aus der Anzahl n der Zustandsgrößen ergibt sich $\rho_0 = \dim \mathcal{E}_0 = n = 3$. Zur Bestimmung der Dimension ρ_1 ist eine Berechnung der vollständigen Differentiale $d\dot{y}_1$ und $d\dot{y}_2$ erforderlich:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 = \dot{x}_2 = u_1 x_1 & \Rightarrow d\dot{y}_1 = x_1 du_1 + u_1 dx_1, \\ \dot{y}_2 = \dot{x}_3 = u_1 x_2 & \Rightarrow d\dot{y}_2 = x_2 du_1 + u_1 dx_2. \end{aligned}$$

Die Dimension ρ_1 des Unterraumes

$$\mathcal{E}_1 = \text{span} \{dx, d\dot{y}\} = \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2\}$$

ist dann gleich 4, da dj_2 von dx und dj_1 linear abhängig ist. Das heißt, für dj_2 gilt

$$dj_2 = \alpha_1 dj_1 + \alpha_2 dx_2 + \alpha_3 dx_1$$

mit

$$\alpha_1 = \frac{x_2}{x_1}; \quad \alpha_2 = u_1 \quad \text{und} \quad \alpha_3 = -\frac{x_2}{x_1}u_1.$$

Die vollständigen Differentiale von $\ddot{\mathbf{y}}(t)$ berechnen sich zu:

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= \dot{u}_1 x_1 + u_1 \dot{x}_1 = \dot{u}_1 x_1 + u_1 u_2 \quad \Rightarrow \quad d\ddot{y}_1 = x_1 d\dot{u}_1 + \dot{u}_1 dx_1 + u_1 du_2 + u_2 du_1, \\ \ddot{y}_2 &= \dot{u}_1 x_2 + u_1 \dot{x}_2 = \dot{u}_1 x_2 + u_1^2 x_1 \quad \Rightarrow \quad d\ddot{y}_2 = x_2 d\dot{u}_1 + \dot{u}_1 dx_2 + u_1^2 dx_1 + 2u_1 x_1 du_1. \end{aligned}$$

Diese beiden Differentiale sind, bedingt durch die Terme du_2 und $d\dot{u}_1$, von den vorhergehenden Differentialen linear unabhängig, so daß

$$\begin{aligned} \rho_2 &= \dim \mathcal{E}_2 = \dim (\text{span}_{dx_1, dx_2, dx_3, dj_1, dj_2, d\ddot{y}_1, d\ddot{y}_2} \{ \}) \\ &= \dim (\text{span}_{dx_1, dx_2, dx_3, x_1 du_1, u_1 du_2, x_2 d\dot{u}_1} \{ \}) \\ &= 6 \end{aligned}$$

gilt. Die Dimension ρ_2 des Vektorraumes \mathcal{E}_2 ist gegenüber der Dimension ρ_1 von \mathcal{E}_1 um 2 größer geworden. Dieser Zuwachs entspricht offensichtlich der Anzahl m der Ein- und Ausgänge. Das Abbruchkriterium (5.9) ist also erfüllt und man kann daher auf eine Bestimmung des Raumes $\mathcal{E}_n = \mathcal{E}_3$ verzichten. Die Indizes σ_i (vgl. Definition 5.1) berechnen sich damit zu

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \rho_1 - \rho_0 = 1, \\ \sigma_2 &= \rho_2 - \rho_1 = 2, \\ \sigma_3 &= \rho_2 - \rho_2 = 0, \end{aligned}$$

so daß sich 2 Nullstellen im Unendlichen der Ordnung 1 und 2 ergeben. Die Struktur im Unendlichen dieses Systems wird dann durch die Liste

$$\{ \mu_1, \mu_2 \} = \{ 1, 2 \}$$

dieser Ordnungen festgelegt. Grundsätzlich erfolgt die Bestimmung der Vektorraum-Dimensionen ρ_k nur in bezug auf die in \mathcal{K} enthaltenen Variablen. Die von diesen Variablen angenommenen Zahlenwerte bleiben demgegenüber unberücksichtigt. Daher ist für das vorliegende Beispiel die genannte Struktur im Unendlichen $\{1, 2\}$ auch für den Fall u_1, x_1 oder $x_2 = 0$ eindeutig definiert [27].

Offensichtlich entspricht die Anzahl der unendlichen Nullstellen der Anzahl der Ein- und Ausgänge. Damit ist wie bei den linearen Systemen eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Invertierbarkeit des betrachteten nichtlinearen Systems (Fliess 1986b) erfüllt.

Mit Hilfe dieser algebraischen Charakterisierung der Struktur im Unendlichen lassen sich nun weitere wesentliche Systemeigenschaften wie z.B. die *Ein-/Ausgangsentkoppelbarkeit* näher untersuchen.

5.1 Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem

Beim Entwurf einer nichtlinearen Regelung für Systeme mit einer gleichen Anzahl von Ein- und Ausgangsgrößen hat sich folgende Zweischritt-Philosophie bewährt: Mit Hilfe einer nichtlinearen Rückführung wird das Problem zunächst in der Form vereinfacht, daß das rückgeführte System beispielsweise ein-/ausgangsentkoppelt und linear ist. Anschließend kann dann das dynamische Verhalten der unabhängigen Eingrößen-Regelkreise durch weitere lineare Regler gezielt beeinflusst werden. Das im ersten Schritt zu lösende *Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem* läßt sich dabei wie folgt formulieren (Schwarz 1991): Gegeben sei ein nichtlineares System mit m Ein- und Ausgängen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x})u_i(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) \\ y_1(t) &= c_1(\mathbf{x}) \\ &\vdots \\ y_m(t) &= c_m(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad . \quad (5.10)$$

Gesucht ist eine reguläre Zustandsrückführung:

$$\left. \begin{aligned} u_i(t) &= r_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m v_{ij}(\mathbf{x})w_j(t) \quad ; \quad i = 1, 2, \dots, m \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \end{aligned} \right\} \quad , \quad (5.11)$$

die – definiert für alle \mathbf{x} in einer Umgebung des Arbeitspunktes \mathbf{x}_0 – bewirkt, daß bei dem rückgekoppelten System:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x})r_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x})v_{ij}(\mathbf{x})w_j(t) \\ &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \\ \mathbf{y}(t) &= \mathbf{c}(\mathbf{x}) \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

jeder Ausgang $y_i(t)$ nur von einem zugeordneten Eingang $w_i(t)$ mit $i = 1, 2, \dots, m$, aber nicht von $w_j(t)$ für $j \neq i$ beeinflußt wird. Mit Hilfe der zuvor definierten Nullstellen im Unendlichen erhält man folgende einfache Bedingung für die Existenz einer entkoppelnden Rückführung: Seien

$$\tilde{\mu}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (5.13)$$

die Ordnungen der unendlichen Nullstellen der Teilsysteme

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^m \mathbf{b}_i(\mathbf{x})u_i(t) \\ y_i &= c_i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

und

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m \quad (5.15)$$

die Ordnungen der Nullstellen im Unendlichen des Gesamtsystems (5.10), so ist das Entkopplungsproblem dann und nur dann lösbar (Moog 1988), wenn

$$\{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2, \dots, \tilde{\mu}_m\} = \{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m\} \quad (5.16)$$

gilt. Die Ordnungen der Nullstellen im Unendlichen des Gesamtsystems (5.10) müssen also mit den Ordnungen der unendlichen Nullstellen² der verschiedenen Teilsysteme (5.14) übereinstimmen.

Ist diese Bedingung erfüllt, so lassen sich die gesuchten $\mathbf{r}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ in dem Regelgesetz (5.11) direkt zu

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (5.17)$$

mit

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1^{(\tilde{\mu}_1)}}{\partial u_1} & \frac{\partial y_1^{(\tilde{\mu}_1)}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial y_1^{(\tilde{\mu}_1)}}{\partial u_m} \\ \frac{\partial y_2^{(\tilde{\mu}_2)}}{\partial u_1} & \frac{\partial y_2^{(\tilde{\mu}_2)}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial y_2^{(\tilde{\mu}_2)}}{\partial u_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial y_m^{(\tilde{\mu}_m)}}{\partial u_1} & \frac{\partial y_m^{(\tilde{\mu}_m)}}{\partial u_2} & \dots & \frac{\partial y_m^{(\tilde{\mu}_m)}}{\partial u_m} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1^{(\tilde{\mu}_1)} \\ y_2^{(\tilde{\mu}_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(\tilde{\mu}_m)} \end{bmatrix}_{\mathbf{u}=0} = \begin{bmatrix} y_1^{(\tilde{\mu}_1)} \\ y_2^{(\tilde{\mu}_2)} \\ \vdots \\ y_m^{(\tilde{\mu}_m)} \end{bmatrix} - \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{u} \quad (5.19)$$

angeben. Die sonst übliche Darstellungsweise (Isidori 1989, Schwarz 1991) der *Entkopplungsmatrix* $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ und des Vektors $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit Hilfe von Lie-Operatoren kann leicht in die hier verwendete Form überführt werden, wenn man von der von Schwarz (1991:362) abgeleiteten Darstellung der $\tilde{\mu}_i$ -ten Ableitung der Ausgangsgröße $y_i(t)$ Gebrauch macht.

²Die Ordnungen der Nullstellen im Unendlichen der Teilsysteme geben an, wie oft das jeweilige Ausgangssignal zu differenzieren ist, bis in der Ableitung erstmals die Steuergröße $\mathbf{u}(t)$ explizit auftaucht. Isidori (1989) und Schwarz (1991) nennen diese Ordnungen daher auch *relative degrees* bzw. *Differenzgrade* des Systems.

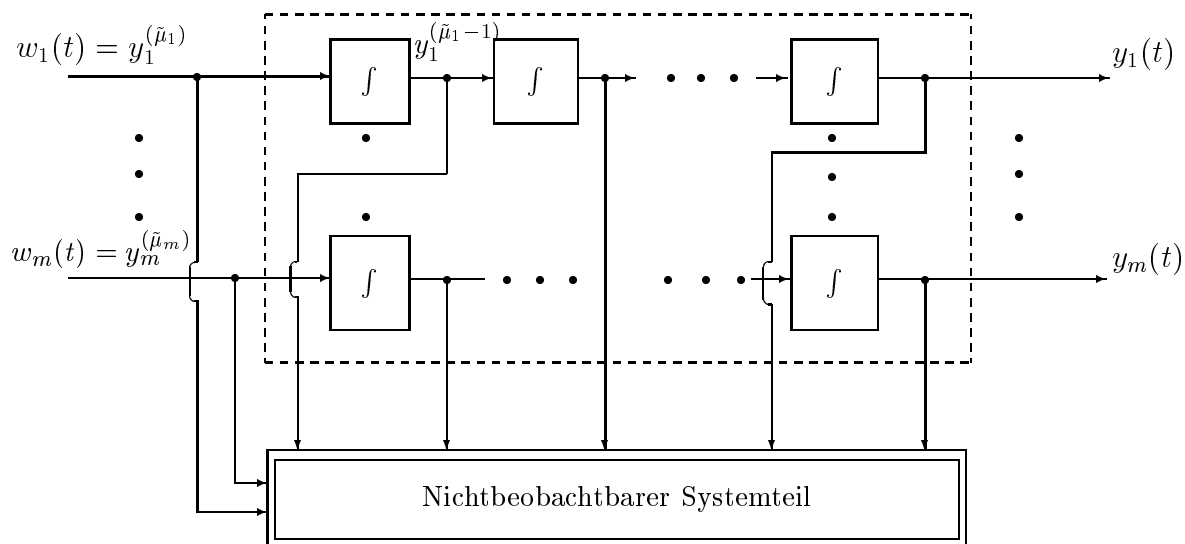


Bild 5.2: Struktur des entkoppelten Systems

Das entkoppelte System mit den Zustandsgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}(\mathbf{x})\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \quad (5.20)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{c}(\mathbf{x}) \quad (5.21)$$

besteht dann für $n_\mu = \sum_{i=1}^m \tilde{\mu}_i < n$ aus zwei Teilen:

hbt

- i) Einem entkoppelten Teilsystem der Ordnung n_μ , dessen Ein-/Ausgangsverhalten linear ist. Die interne Dynamik wird dabei in der Regel weiterhin *nichtlinear* sein.
- ii) Einem *nicht* beobachtbaren Teilsystem der Ordnung $n - n_\mu$.

Der entkoppelte Teil des geregelten Systems besteht dann, wie in Bild 5.2 dargestellt, aus m Ketten von jeweils $\tilde{\mu}_i$ Integratoren. Betrachtet man die hinter den Integratoren auftretenden Ableitungen der Ausgangsgrößen und wählt diese als Zustände $z_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, n_\mu$ mit $\mathbf{z}(t) = [y_1, \dots, y_1^{(\mu_1-1)}, \dots, y_m, \dots, y_m^{(\mu_m-1)}]^T$ eines transformierten Systems, so ist das entkoppelte Teilsystem in diesen neuen Koordinaten nicht nur *linear*, sondern es verfügt dann auch über eine besonders einfach strukturierte Übertragungsmatrix:

$$\mathbf{F}(s) = \begin{bmatrix} s^{-\mu_1} & & & \\ & s^{-\mu_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & s^{-\mu_m} \end{bmatrix}. \quad (5.22)$$

5.2 Dynamische Entkopplung

Erfüllt ein System die Entkopplungsbedingungen (5.16) nicht, so kann es mit Hilfe einer *statischen* Zustandsrückführung (5.11) *nicht* linearisiert und entkoppelt werden. Zur

Lösung dieses Problems soll im weiteren eine allgemeinere, dynamische Zustandsrückführung der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}_e(t) &= \mathbf{q}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e) + \mathbf{P}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e)\mathbf{w}(t), \\ \mathbf{u}(t) &= \mathbf{r}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e) + \mathbf{V}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_e)\mathbf{w}(t)\end{aligned}\tag{5.23}$$

eingesetzt werden. Sei n_e die Anzahl der zusätzlichen Zustände $x_{e_1}, x_{e_2}, \dots, x_{e_{n_e}}$, so nennt man ein Rückführgesetz dieser Art für $n_e > 0$ einen *dynamischen Kompensator*. Ist der Einsatz eines derartigen Kompensators erforderlich, so wird man bestrebt sein, dessen Ordnung n_e so klein wie möglich zu halten. Für den Fall $n_e = 0$ geht (5.23) in die bereits behandelte statische Zustandsrückführung (5.11) über.

Die Antwort auf die Frage, ob ein dynamischer Kompensator (5.23) zur Lösung des Entkopplungsproblem existiert, ist eng mit der Invertierbarkeit des Systems (5.1,5.2) verknüpft. Eine derartige dynamische Zustandsrückführung kann dann und nur dann gefunden werden (Descusse und Moog 1987), wenn das nichtlineare System (5.1,5.2) *rechtsinvertierbar* ist. Mit anderen Worten, wenn die Anzahl q der Nullstellen im Unendlichen gleich der Anzahl der Ausgangsvariablen p ist. Aus dieser Bedingung folgt unmittelbar, daß sich das Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem nur lösen läßt, wenn die Anzahl der Ausgangsgrößen kleiner oder gleich der Anzahl der Eingangsgrößen ist.

Erfüllt ein System diese Bedingung, so stellt sich die Frage, welche Ordnung und welchen Aufbau ein derartiger Kompensator hat. Die folgende einfache Vorgehensweise liefert einen Kompensator, dessen Ordnung nicht unbedingt minimal sein muß:

- i) Den Eingängen der zu entkoppelnden Regelstrecke wird zunächst eine geeignete Zahl von Integratoren vorgeschaltet, so daß das erweiterte System die Bedingungen der statischen Entkoppelbarkeit erfüllt.
- ii) Mit Hilfe von (5.17) – (5.19) wird dann für das erweiterte System eine statische Rückführung berechnet, die die gewünschte Entkopplung bewirkt.

Durch das Vorschalten der Integratoren verändern sich die Differenzengrade (Ordnungen der unendlichen Nullstellen der Teilsysteme) und unter Umständen auch die gesamte Systemstruktur im Unendlichen. Für die praktische Realisierung der entkoppelnden Regelung sollte allerdings die Anzahl der eingesetzten Integratoren, d.h. die Ordnung des dynamischen Kompensators, minimal sein.

Für den linearen Fall konnte Cremer (1971) bereits Anfang der siebziger Jahre eine Lösung angeben. Das dabei eingeführte Konzept der rangbestimmenden (rank-essential) Vektoren ist auch für den nichtlinearen Fall von Bedeutung. Einen Zeilen- bzw. Spaltenvektor einer Matrix nennt man *rangbestimmend*, wenn er von allen anderen Zeilen- bzw. Spaltenvektoren linear unabhängig ist. Dieses Konzept kommt dann zum Tragen, wenn eine Matrix nicht regulär ist, also z.B. mehr Zeilen als Spalten besitzt. Entfernt man aus dieser

Matrix eine *rangbestimmende* Zeile, die im weiteren auch *essentielle Zeile* genannt wird, so verringert sich sofort der Rang der Matrix. Im Gegensatz dazu ändert sich der Rang nicht, wenn man eine *nicht* essentielle Zeile streicht.

Ausgehend von diesem Konzept prägten Commault u.a. (1986) dann im Zusammenhang mit dem linearen Entkopplungsproblem den Begriff der *essentiellen Ordnungen* (essential orders). Dieser Begriff läßt sich auch auf die betrachteten nichtlinearen Systeme übertragen.

Definition 5.2 (Glumineau und Moog 1989)

Für $i = 1, 2, \dots, p$ ist die unbedingt erforderliche Ordnung (essentielle Ordnung) μ_{e_i} des Ausgangs y_i durch

$$\mu_{e_i} = \min \{k \geq 1 \mid dy_i^{(k)} \notin \text{span} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(k-1)}, dy_{j \neq i}^{(k)}, d\mathbf{y}^{(k+1)}, \dots, d\mathbf{y}^{(n)}\}\} \quad (5.24)$$

gegeben.

Das Differential $dy_i^{(k)}$ in (5.24) ist dann *essentiell* für die Dimension des Vektorraumes $\text{span} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(n)}\}$. Wenn kein k existiert, das der rechten Seite von (5.24) genügt, so wird $\mu_{e_i} = \infty$ gesetzt. Die essentiellen Ordnungen $\mu_{e_1}, \mu_{e_2}, \dots, \mu_{e_p}$ beschreiben die *minimale* Struktur im Unendlichen eines Systems, die mit einer statischen Zustandsrückführung entkoppelbar ist.

Liegen die Listen der soeben definierten essentiellen Ordnung $\{\mu_e\}$ und die Ordnungen der unendlichen Nullstellen $\{\mu\}$ des Gesamtsystems vor, so wird durch diese Ordnungen auch die minimale Ordnung $n_{e_{\min}}$ des Kompensators (5.23), d.h. die minimale Anzahl der notwendigen Integratoren, festgesetzt (Huijberts u.a. 1992):

$$n_{e_{\min}} = \sum_{i=1}^m \mu_{e_i} - \sum_{i=1}^m \mu_i. \quad (5.25)$$

Im folgenden Abschnitt wird die hier dargestellte algebraische Methode zur Analyse und Synthese auf das nichtlineare Benchmarkproblem des "Rührkesselreaktors" angewendet und die damit erzielbaren Ergebnisse diskutiert.

6 Nichtlinearer Reglerentwurf für das Benchmarkproblem "Rührkesselreaktor"

6.1 Bestimmung der Struktur im Unendlichen

Für die Berechnung der Struktur im Unendlichen des nichtlinearen Modells des Rührkesselreaktors müssen zunächst die Dimensionen der Vektorräume

$$\mathcal{E}_k := \text{span} \{d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, d\dot{\mathbf{y}}, \dots, d\mathbf{y}^{(k)}\} \quad (6.1)$$

bestimmt werden. Betrachtet man die Ausgangsgleichungen (1.13), so lassen sich die vollständigen Differentiale der Ausgangsgrößen sofort angeben:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= x_2(t) & \Rightarrow & & dy_1 &= dx_2 \\ y_2(t) &= x_3(t) & & & dy_2 &= dx_3 \end{aligned} \quad (6.2)$$

Die Dimension

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \dim \mathcal{E}_0 = \dim (\text{span} \{d\mathbf{x}, d\mathbf{y}\}) \\ &= \dim (\text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dy_1, dy_2\}) \\ &= \dim (\text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dx_2, dx_3\}) \\ &= \dim (\text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4\}) \\ &= 4 \end{aligned} \quad (6.3)$$

des Raumes \mathcal{E}_0 entspricht der Ordnung des Modells, da alle vier Zustandsgrößen voneinander unabhängig sind. Für die Berechnung der Dimension

$$\rho_1 = \dim \mathcal{E}_1 = \dim (\text{span} \{d\mathbf{x}, d\mathbf{y}, d\dot{\mathbf{y}}\}) = \dim (\text{span} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}\}) \quad (6.4)$$

ist eine nähere Betrachtung der Differentiale von

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 = k_1(x_3)x_1 - k_2(x_3)x_2 - x_2u_1 \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_3 = -\alpha_1\Delta H_{R_{AB}}k_1(x_3)x_1 - \alpha_1\Delta H_{R_{BC}}k_2(x_3)x_2 - \\ &\quad -\alpha_1\Delta H_{R_{AD}}k_3(x_3)x_1^2 + (\vartheta_0 - x_3)u_1 + \alpha_2(x_4 - x_3) \end{aligned} \quad (6.5)$$

erforderlich:

$$\begin{aligned} dy_1 &= -x_2du_1 + \dots \\ dy_2 &= (\vartheta_0 - x_3)du_1 + \dots \end{aligned} \quad (6.6)$$

Da die Dimension des Vektorraums \mathcal{E}_1 nur durch Terme, die Differentiale der Eingangsgrößen enthalten, anwachsen kann, werden der Übersichtlichkeit halber in (6.6) lediglich diese Ausdrücke explizit angegeben. Betrachtet man den sich daraus ergebenden Vektorraum

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2\} \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2du_1, (\vartheta_0 - x_3)du_1\} \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2du_1\}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

so erkennt man, daß dessen Dimension unabhängig von \mathbf{x} und \mathbf{u} immer

$$\rho_1 = \dim \mathcal{E}_1 = \dim (\text{span} \{d\mathbf{x}, d\dot{\mathbf{y}}\}) = 5 \quad (6.8)$$

ist, da der Vektorraum über dem Körper \mathcal{K} gebildet wird. Lediglich in einem Arbeitspunkt mit $x_2 = 0$ und $x_3 = \vartheta_0$ würde die Dimension ρ_1 des zugehörigen linearisierten Systems um eins kleiner sein. Die Differenz σ_1 der Dimensionen ρ_1 und ρ_0

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \dim(\text{span } \mathcal{E}_1) - \dim(\text{span } \mathcal{E}_0) \\ &= \rho_1 - \rho_0 = 5 - 4 = 1\end{aligned}\tag{6.9}$$

entspricht also nicht der Anzahl der Ein- und Ausgänge. Die Abbruchbedingung (5.9) ist demnach nicht erfüllt, und eine Bildung des nächsten Vektorraumes \mathcal{E}_2 ist somit erforderlich. Die hierzu notwendigen zweiten Ableitungen der Ausgangsgrößen nach der Zeit sind bereits relativ komplex, so daß folgende Vorüberlegung hilfreich ist: Zu einer Vergrößerung der Dimension des Vektorraumes \mathcal{E}_2 können lediglich die Terme von $\ddot{\mathbf{y}}(t)$ beitragen, die erste zeitliche Ableitungen der Eingangsgrößen oder die bisher noch nicht aufgetauchte zweite Eingangsgröße enthalten. Das bedeutet, in den zweiten Ableitungen der Ausgangsgrößen sind nur folgende Ausdrücke von Bedeutung:

$$\begin{aligned}\ddot{y}_1 &= -x_2\dot{u}_1 + \dots \\ \ddot{y}_2 &= (v_0 - x_3)\dot{u}_1 + \alpha_2\alpha_3u_2 + \dots\end{aligned}\tag{6.10}$$

Der Vektorraum

$$\mathcal{E}_2 = \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dy_1, dy_2, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2\},\tag{6.11}$$

der sich aus (6.10) zu

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2du_1, (\vartheta_0 - x_3)du_1, -x_2d\dot{u}_1, (\vartheta_0 - x_3)d\dot{u}_1 + \alpha_2\alpha_3du_2\}, \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2du_1, -x_2d\dot{u}_1, \alpha_2\alpha_3du_2\}\end{aligned}\tag{6.12}$$

ergibt, hat die Dimension $\rho_2 = 7$. Die Differenz

$$\sigma_2 = \rho_2 - \rho_1 = 7 - 5 = 2\tag{6.13}$$

der Dimensionen von \mathcal{E}_2 und \mathcal{E}_1 stimmt jetzt mit der Anzahl der Ein- und Ausgänge überein, so daß sich die Untersuchung der Vektorräume \mathcal{E}_3 und \mathcal{E}_4 erübrigt. Aus σ_1 und σ_2 und der Definition der Nullstellen im Unendlichen im letzten Abschnitt ergibt sich die gesuchte Struktur im Unendlichen zu

$$\{\mu_1, \mu_2\} = \{1, 2\}.\tag{6.14}$$

Die durchgeführte Analyse führt auf das Ergebnis, daß das nichtlineare Modell des Rührkesselreaktors *invertierbar* ist, da die Anzahl der unendlichen Nullstellen mit der Anzahl m der Ein- und Ausgänge übereinstimmt. Daher existiert zumindest eine dynamische Lösung für das Ein-/Ausgangsentkopplungsproblem (Descusse und Moog 1988). Die Frage, ob dieses Problem mit Hilfe einer statischen Rückführung der Form (5.10) lösbar ist, kann erst nach Ermittlung der Ordnungen der unendlichen Nullstellen der Teilsysteme (5.14) beantwortet werden.

6.2 Überprüfung der statischen Entkoppelbarkeit

Für die Überprüfung der Entkoppelbarkeit sind die m Teilsysteme von Interesse, die sich ergeben, wenn jeweils alle Ausgänge bis auf den i -ten gestrichen werden. Die Ordnungen $\tilde{\mu}_i$, $i = 1, 2, \dots, m$ der unendlichen Nullstellen dieser m Teilsysteme sind dann mit der niedrigsten Ableitung der Ausgangsgröße y_i identisch, die erstmalig eine der Eingangsgrößen enthält und daher auch *Differenzengrade* genannt werden. Wie ein Blick auf die ersten Ableitungen (6.5) der Ausgangsgrößen zeigt, ist sowohl $\dot{y}_1(t)$ als auch $\dot{y}_2(t)$ bereits von der Eingangsgröße $u_1(t)$ abhängig. Die Liste $\{\tilde{\mu}\}$ der Ordnungen der unendlichen Nullstellen der beiden Teilsysteme läßt sich also direkt zu

$$\{\tilde{\mu}\} = \{\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2\} = \{1, 1\} \quad (6.15)$$

angeben. Offensichtlich stimmen die Listen der Nullstellen im Unendlichen des Gesamtsystems (6.14) und der Teilsysteme (6.15) *nicht* überein, d.h.

$$\{\mu\} \neq \{\tilde{\mu}\}. \quad (6.16)$$

Ein statisches Regelgesetz der Form (5.11), das das Ein-/Ausgangsverhalten des Rührkesselreaktor entkoppelt, existiert demnach nicht. Im nächsten Abschnitt wird daher der Frage nachgegangen, wie das Entkopplungsproblem mit Hilfe eines möglichst einfachen dynamischen Reglers gelöst werden kann.

6.3 Lösung des dynamischen Entkopplungsproblems

Im letzten Abschnitt wurde dargestellt, wie nach Vorschalten von Integratoren das Ein-/Ausgangsverhalten eines statisch nicht entkoppelbaren System dennoch entkoppelt werden kann. Hierbei ist die Anordnung der Integratoren so zu wählen, daß das erweiterte System die Bedingungen der statischen Entkoppelbarkeit erfüllt. Von besonderem Interesse ist dabei eine Anordnung, die eine möglichst geringe Anzahl von Integratoren aufweist. Eine Antwort auf die Frage nach der minimal notwendigen Anzahl von Integratoren ist mit Hilfe des zuvor bereits erläuterten Konzeptes der *essentiellen Ordnungen* möglich, die die minimale entkoppelbare Struktur im Unendlichen eines Systems angeben.

Zur Bestimmung dieser essentiellen Ordnungen wird zunächst noch einmal der Vektorraum

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dy_1, dy_2\} \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2 du_1, (\vartheta_0 - x_3) du_1\} \end{aligned} \quad (6.17)$$

betrachtet. Offensichtlich ist weder dy_1 noch dy_2 für die Dimension dieses Vektorraumes essentiell, d.h. unbedingt erforderlich, da sich diese nicht ändert, wenn dy_1 oder dy_2 entfernt wird. Aus (5.24) folgt dann, daß für die essentiellen Ordnungen μ_{e_1} und μ_{e_2} des Rührkesselreaktors die Abschätzungen $\mu_{e_1} > 1$ und $\mu_{e_2} > 1$ gelten müssen.

Wie eine Untersuchung des Vektorraumes

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_2 &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2, d\ddot{y}_1, d\ddot{y}_2\} \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2 du_1, (\vartheta_0 - x_3) du_1, -x_2 d\dot{u}_1, (\vartheta_0 - x_3) d\dot{u}_1 + \alpha_2 \alpha_3 du_2\} \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2 du_1, -x_2 d\dot{u}_1, \alpha_2 \alpha_3 du_2\}\end{aligned}\quad (6.18)$$

zeigt, sind die Verhältnisse bei den Differentialen $d\dot{y}_1$ und $d\dot{y}_2$ völlig anders. Streicht man in (6.18) $d\ddot{y}_1$ oder $d\ddot{y}_2$, so reduziert dies sofort die Dimension dieses Vektorraums. Mit andern Worten ist sowohl $d\ddot{y}_1$ als auch $d\ddot{y}_2$ essentiell. Das nichtlineare Modell des Rührkesselreaktors hat somit (vgl. (5.24)) die *essentiellen Ordnungen*

$$\mu_{e_1} = \mu_{e_2} = 2. \quad (6.19)$$

Aus (5.25), den Ordnungen der unendlichen Nullstellen (6.14) und den essentiellen Ordnungen (6.19) bestimmt sich die minimale Anzahl der vorzuschaltenden Integratoren zu

$$n_{e_{\min}} = \mu_{e_1} + \mu_{e_2} - \mu_1 - \mu_2 = 2 + 2 - 1 - 2 = 1. \quad (6.20)$$

Nach der Ermittlung der Anzahl der erforderlichen Integratoren stellt sich nur noch die Frage, vor welchem der beiden Eingänge der Integrator anzuordnen ist. Zu einer Antwort gelangt man mit Hilfe der folgenden Überlegungen: Die essentiellen Ordnungen μ_{e_1} und μ_{e_2} geben die Struktur im Unendlichen des erweiterten Gesamtsystems vor. Damit dieses System entkoppelbar ist, muß der Integrator so plaziert werden, daß die Differenzgrade $\tilde{\mu}_1, \tilde{\mu}_2$ des erweiterten Systems mit den essentiellen Ordnungen übereinstimmen. Mit anderen Worten, die beiden Differenzgrade – die zuvor beide gleich 1 waren – müssen durch Vorschalten des Integrators auf 2 angehoben werden. Der Integrator ist also dem Eingang vorzuschalten, der die Differenzgrade des ursprünglichen Systems festlegte. Ein kurzer Blick auf die ersten Ableitungen (6.5) der Ausgangsgrößen zeigt, daß dies der Eingang $u_1(t)$ war, so daß der Integrator dem ersten Eingang vorzuschalten ist. Dem Modell des Rührkesselreaktors wird also eine weitere Zustandsgröße

$$x_e(t) = u_1(t) \quad (6.21)$$

mit der einfachen Zustandsgleichung

$$\dot{x}_e(t) = v(t) \quad (6.22)$$

hinzugefügt, wobei $v(t)$ den *neuen* ersten Eingang repräsentiert. Das erweiterte Modell der Ordnung 5 des Rührkesselreaktors hat dann folgendes Aussehen

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -k_1(x_3)x_1 - k_3(x_3)x_1^2 + (c_{A_0} - x_1)x_5 \\ \dot{x}_2 &= k_1(x_3)x_1 - k_2(x_3)x_2 - x_2x_5 \\ \dot{x}_3 &= -\alpha_1\Delta H_{R_{AB}}k_1(x_3)x_1 - \alpha_1\Delta H_{R_{BC}}k_2(x_3)x_2 - \\ &\quad -\alpha_1\Delta H_{R_{AD}}k_3(x_3)x_1^2 + (\vartheta_0 - x_3)x_5 + \alpha_2(x_4 - x_3) \\ \dot{x}_4 &= \alpha_3u_2 + \alpha_4(x_3 - x_4) \\ \dot{x}_5 &= v,\end{aligned}\quad (6.23)$$

wenn man zur Vereinfachung der Notation

$$x_5(t) = x_e(t) \quad (6.24)$$

setzt.

6.4 Entwurf der entkoppelnden Zustandsrückführung

Für dieses um einen Integrator erweiterte Modell sollte nun eine statische Zustandsrückführung existieren, die eine Entkopplung und Linearisierung des Ein-/Ausgangsverhaltens bewirkt. Zur Überprüfung dieser Aussage wird zunächst die Struktur im Unendlichen des erweiterten Modells berechnet. Zur Bestimmung der hierzu notwendigen ersten Ableitungen der Ausgangsgrößen des erweiterten Systems (6.23) muß in (6.5) lediglich $u_1(t)$ durch $x_5(t)$ ersetzt werden:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_2 = k_1(x_3)x_1 - k_2(x_3)x_2 - x_2x_5, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_3 = -\alpha_1\Delta H_{R_{AB}}k_1(x_3)x_1 - \alpha_1\Delta H_{R_{BC}}k_2(x_3)x_2 - \\ &\quad -\alpha_1\Delta H_{R_{AD}}k_3(x_3)x_1^2 + (\vartheta_0 - x_3)x_5 + \alpha_2(x_4 - x_3). \end{aligned} \quad (6.25)$$

Wie beabsichtigt sind diese Ableitung von $u_2(t)$ und dem neuen Eingang $v(t)$ unabhängig, so daß für die Dimension des Vektorraums \mathcal{E}_1 des erweiterten Systems (6.23) gilt:

$$\rho_1 = \dim \mathcal{E}_1 = \dim \mathcal{E}_0 = n = 5. \quad (6.26)$$

Erst in den zweiten Ableitungen der Ausgangsgrößen kommen nun die Eingangsgrößen erstmalig explizit vor. Die für die Berechnung der Dimension des Vektorraumes \mathcal{E}_2 relevanten Anteile dieser Ableitungen ergeben sich, indem man in (6.10) \dot{u}_1 durch v ersetzt

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1 &= -x_2v + \dots \\ \ddot{y}_2 &= (v_0 - x_3)v + \alpha_2\alpha_3u_2 + \dots \end{aligned} \quad (6.27)$$

Der gesuchte Vektorraum

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dx_5, d\dot{y}_1, d\dot{y}_2, d\ddot{y}_1, d\ddot{y}_2\}, \\ &= \text{span} \{dx_1, dx_2, dx_3, dx_4, dx_5, d\ddot{y}_1, d\ddot{y}_2\}, \end{aligned} \quad (6.28)$$

der sich aus (6.27) zu

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2 &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2dv, (\vartheta_0 - x_3)dv + \alpha_2\alpha_3du_2\}, \\ &= \text{span} \{d\mathbf{x}, -x_2dv, \alpha_2\alpha_3du_2\} \end{aligned} \quad (6.29)$$

bestimmt, hat die Dimension $\rho_2 = 7$. Wie bei dem Originalmodell ist sowohl $d\ddot{y}_1$ als auch $d\ddot{y}_2$ für die Dimension dieses Raumes essentiell. Aus der Differenz

$$\sigma_2 = \rho_2 - \rho_1 = 7 - 5 = 2 \quad (6.30)$$

und der Definition 5.1 folgt dann, daß die Ordnungen

$$\{\mu_1, \mu_2\} = \{2, 2\} \quad (6.31)$$

der Nullstellen im Unendlichen des erweiterten Modells des Rührkesselreaktors tatsächlich mit den essentiellen Ordnungen und den Differenzgraden übereinstimmen. Dieses Modell kann daher mit einer statischen Zustandsrückführung der Form

$$\begin{bmatrix} v(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \mathbf{r}(\mathbf{x}) + \mathbf{V}(\mathbf{x})\mathbf{w}(t) \quad (6.32)$$

mit

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = -\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x})\mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{V}(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) \quad (6.33)$$

entkoppelt werden.

Der in (6.27) angegebene Teil der zweiten Ableitungen der Ausgangsgrößen reicht völlig aus, um die für die Realisierung des Regelgesetzes (6.32) benötigte Entkopplungsmatrix $\mathbf{D}(\mathbf{x})$ (siehe Gl. (5.18)) aufzustellen:

$$\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1^{(\bar{\mu}_1)}}{\partial v} & \frac{\partial y_1^{(\bar{\mu}_1)}}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y_2^{(\bar{\mu}_2)}}{\partial v} & \frac{\partial y_2^{(\bar{\mu}_2)}}{\partial u_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial v} & \frac{\partial \ddot{y}_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial v} & \frac{\partial \ddot{y}_2}{\partial u_2} \end{bmatrix} \quad (6.34)$$

$$= \begin{bmatrix} -x_2 & 0 \\ (\vartheta_0 - x_3) & \alpha_2 \alpha_3 \end{bmatrix}. \quad (6.35)$$

So wie die Dimension des Vektorraums \mathcal{E}_2 ist auch der Rang dieser Entkopplungsmatrix nur von dem Zustand x_2 abhängig. Mit anderen Worten ist (6.35) nur für $x_2(t) = 0$, d.h. beim Start des Reaktionsprozesses nicht invertierbar. Mit Hilfe der Inversen

$$\mathbf{D}^{-1}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{-x_2} & 0 \\ \frac{(\vartheta_0 - x_3)}{x_2 \alpha_2 \alpha_3} & \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

und

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} y_1^{(\bar{\mu}_1)} \\ y_2^{(\bar{\mu}_2)} \end{bmatrix}_{v=0, u_2=0} = \begin{bmatrix} \ddot{y}_1 \\ \ddot{y}_2 \end{bmatrix}_{v=0, u_2=0} \quad (6.37)$$

läßt sich nun das – eine Entkopplung des erweiterten Modells bewirkende – Rückführgesetz (6.32) explizit angeben:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{1}{x_2} \ddot{y}_1 \Big|_{v=0, u_2=0} - \frac{1}{x_2} w_1(t), \\ u_2(t) &= -\frac{(\vartheta_0 - x_3)}{x_2 \alpha_2 \alpha_3} \ddot{y}_1 \Big|_{v=0, u_2=0} - \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} \ddot{y}_2 \Big|_{v=0, u_2=0} + \frac{(\vartheta_0 - x_3)}{x_2 \alpha_2 \alpha_3} w_1 + \frac{1}{\alpha_2 \alpha_3} w_2. \end{aligned} \quad (6.38)$$

Die entkoppelnde Wirkung dieses Regelgesetzes dokumentieren die Bilder 6.1 bis 6.4. In diesen Bildern sind die simulierten Verläufe der Zustandsgrößen für den Fall dargestellt, daß sich der Rührkesselreaktor im Hauptarbeitspunkt befindet (vgl. Abschnitt 1) und eine sprungförmige Führungsgröße nach 30 Minuten nur auf den ersten (Bild 6.1 und 6.2) bzw. nur auf den zweiten Eingang (Bild 6.3 und 6.4) einwirkt.

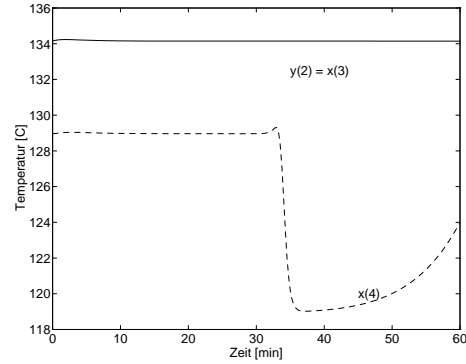
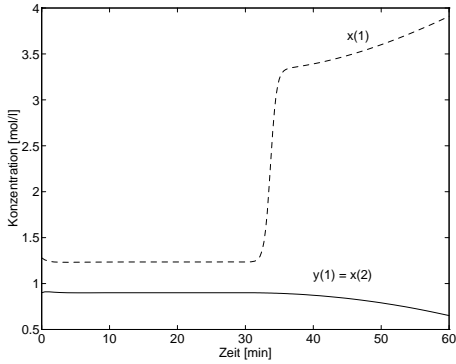


Bild 6.1: Führungsverhalten für $w_1(t) \neq 0$ **Bild 6.2:** Führungsverhalten für $w_1(t) \neq 0$

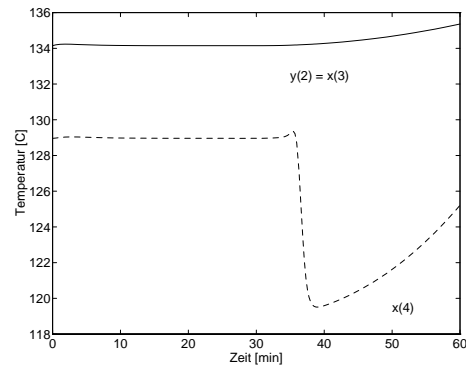
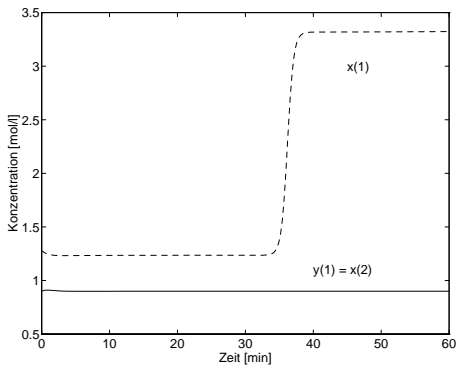


Bild 6.3: Führungsverhalten für $w_2(t) \neq 0$ **Bild 6.4:** Führungsverhalten für $w_2(t) \neq 0$

Neben der Entkopplung des Ein-/Ausgangsverhaltens ist in diesen Bildern deutlich das doppelt-integrale Verhalten der sprungförmig erregten Ausgangsgrößen zu erkennen.

Durch die Anwendung des Regelgesetzes (6.32) auf das System des Rührkesselreaktors entsteht allerdings ein *nicht* beobachtbarer Raum der Dimension 1 (vgl. Bild 5.2), da die Summe der Ordnungen der Nullstellen im Unendlichen um eins kleiner ist als die Systemordnung. Die Dynamik dieses Unterraumes, die sogenannte *Nulldynamik* des Systems³ (Schwarz 1991:309), ist im Gegensatz zur restlichen Dynamik durch eine weitere Ausgangsrückführung nicht mehr beeinflussbar. Ein stabiles Verhalten des geschlossenen Regelkreises läßt sich daher nur dann erzielen, wenn die Nulldynamik des Rührkesselreaktors asymptotisch stabil ist.

³Im linearen Fall wird diese durch die Lage der endlichen Nullstellen charakterisiert.

Betrachtet man den Verlauf der Zustandsgrößen $x_1(t)$ und $x_4(t)$ in den Bildern 6.1 bis 6.4, so erkennt man eine fast sprunghafte Änderung dieser Zustände in dem Augenblick, wo eine von Null verschiedene Führungsgröße auf das System einwirkt. Der Rührkesselreaktor besitzt also im betrachteten Hauptarbeitspunkt eine Nulldynamik, die nicht asymptotisch stabil ist. Diese Aussage wird bestätigt, wenn man die endlichen Nullstellen des um den Hauptarbeitspunkt

$$\mathbf{x}_A = [1, 235 \ 0, 9 \ 134, 14 \ 128, 96 \ 18, 83]^T \quad (6.39)$$

linearisierten Zustandsmodells

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -86,0975 & 0 & -4,2078 & 0 & 3,865 \\ 50,6159 & -69,4459 & 0,9975 & 0 & -0,9 \\ 172,18 & 197,92 & -34,23 & 30,82 & -4,14 \\ 0 & 0 & 86,688 & -86,688 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0,1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

berechnet.

Die endlichen Nullstellen dieses linearen Mehrgrößensystems ergeben sich aus (vgl. Svaricek 1994)

$$\det \begin{bmatrix} s\mathbf{I} - \mathbf{A} & -\mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = 0 \quad (6.41)$$

und lassen sich mit Hilfe der in RASP (Grübel 1983) oder der in der MATLAB Control Toolbox enthaltenen Programme leicht berechnen. Eine Durchführung dieser Berechnung liefert, daß das lineare Modell (6.40) – wie erwartet – eine endliche Nullstelle bei $s = 131,3$, d.h. in der rechten s -Halbebene besitzt.

Die Nulldynamik des Rührkesselreaktors ist allerdings (siehe Bild 6.3) nicht über dem gesamten Arbeitsbereich instabil, da $x_1(t)$ und $x_4(t)$ offenbar nach dem Aufschalten der Führungsgröße in einen neuen Arbeitspunkt bei $x_1 \approx 3,3$ und $x_4 \approx 120$ gelangen, an dem sie das erwartete stabile bzw. integrale Verhalten zeigen. Zum Erreichen dieser Ruhelage sind aber, wie in den Bildern 6.5 und 6.6 dargestellt, Stellgrößen erforderlich, die außerhalb des zulässigen Bereichs

$$5 \text{ h}^{-1} \leq u_1(t) \leq 35 \text{ h}^{-1} \quad (6.42)$$

und

$$-8500 \frac{\text{kJ}}{\text{h}} \leq u_2(t) \leq 0 \frac{\text{kJ}}{\text{h}} \quad (6.43)$$

liegen.

Aufgrund der instabilen Nulldynamik und der vorliegenden Stellgrößenbeschränkungen kann daher eine exakte Entkopplung und Linearisierung des Ein-/Ausgangsverhalten in der Praxis nicht realisiert werden.

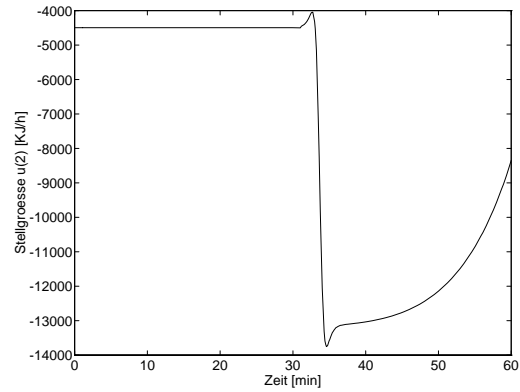
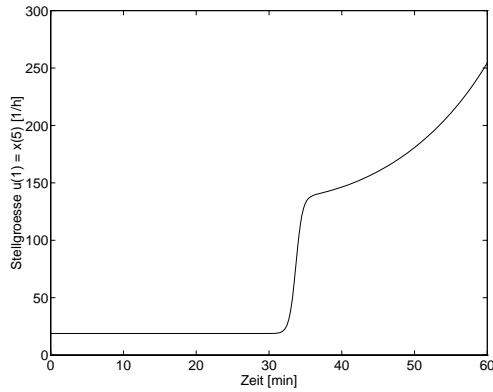


Bild 6.5: Stellgrößenverlauf für $w_1(t) \neq 0$ **Bild 6.6:** Stellgrößenverlauf für $w_1(t) \neq 0$

hbt

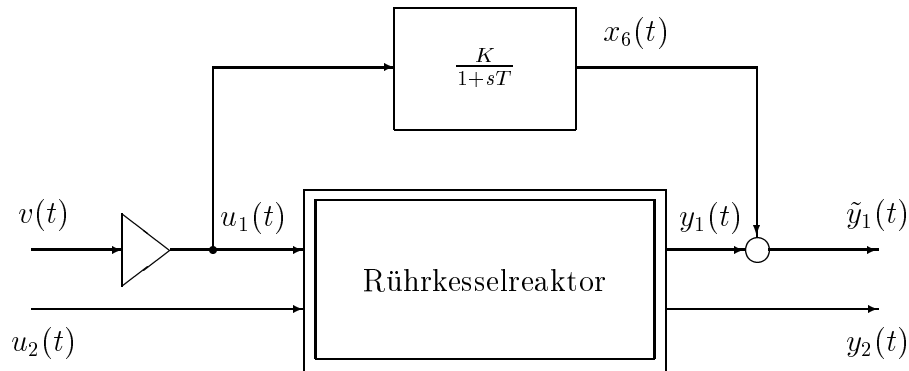


Bild 6.7: Blockschaltbild

6.5 Entwurf einer Regelung zur näherungsweise Entkopplung

Ist eine exakte – stabile – Entkopplung aufgrund einer instabilen Nulldynamik nicht zu realisieren, so können die Eigenschaften dieser Nulldynamik durch Parallelschaltung eines weiteren dynamischen Gliedes gezielt verändert werden. Das Ausgangssignal dieses Korrekturgliedes wird den ursprünglichen Ausgangssignalen überlagert und hebt damit teilweise die Entkopplung dieser Ausgangsgröße von den anderen Eingangsgrößen auf.

Bei dem Modell des Rührkesselreaktors bietet es sich an, zwischen dem ersten Eingang (Raumgeschwindigkeit) und dem ersten Ausgang (Konzentration des Stoffes B) einen weiteren Integrator, der hier allerdings rückgeführt werden soll, einzufügen (vergleiche Bild 6.7).

Dieser rückgeführte Integrator, der ein P_{T_1} -Glied darstellt, läßt sich durch eine weitere

lineare Differentialgleichung der Form

$$\dot{x}_6(t) = \frac{K}{T}x_5(t) - \frac{1}{T}x_6(t) \quad (6.44)$$

beschreiben, wobei K die Verstärkung und T die Zeitkonstante des P_{T_1} -Systems ist. Für die fiktive Ausgangsgröße $\tilde{y}_1(t)$ des neuen Gesamtsystems gilt dann:

$$\tilde{y}_1(t) = x_2(t) + x_6(t). \quad (6.45)$$

Die Nulldynamik, deren Ordnung sich durch diese Erweiterung um Eins erhöht, kann nun durch Wahl der Parameter K und T gezielt beeinflußt werden. Untersucht man das Nullstellenpolynom des linearisierten, erweiterten Modells, so können folgende notwendigen Bedingungen für die Stabilität der Nulldynamik am Arbeitspunkt gefunden werden:

$$\frac{K}{T} > x_2(t), \quad \text{und} \quad T > \frac{1}{k_1(\vartheta)}. \quad (6.46)$$

Setzt man für $x_2(t)$ und $k_1(\vartheta)$ die Werte am Arbeitspunkt ein, so ergibt sich:

$$\frac{K}{T} > 0,9, \quad \text{und} \quad T > \frac{1}{50,6} = 0,0197 \text{ h}. \quad (6.47)$$

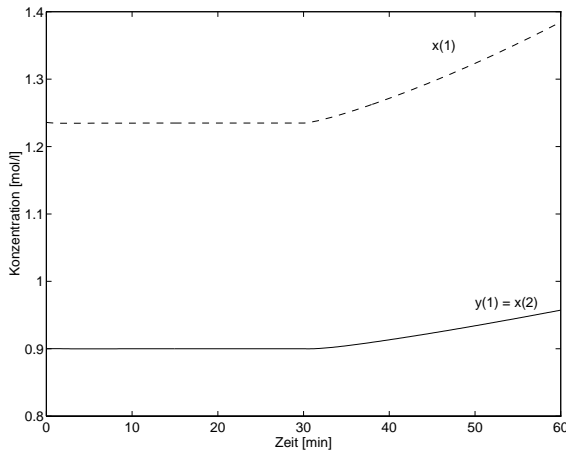
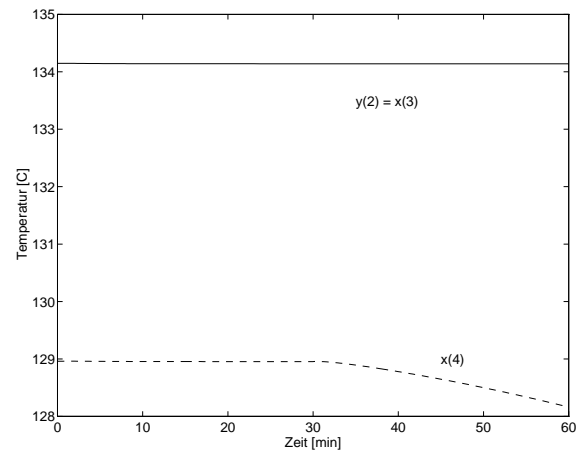
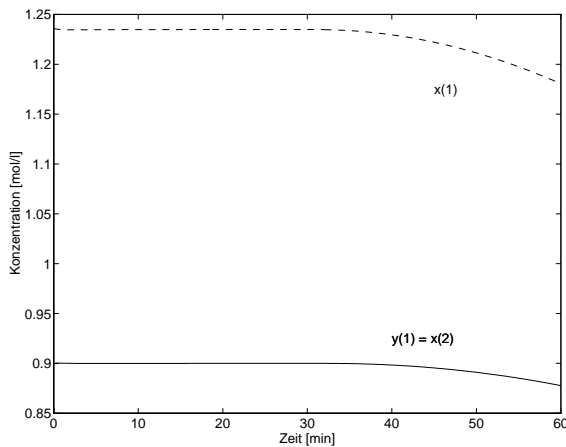
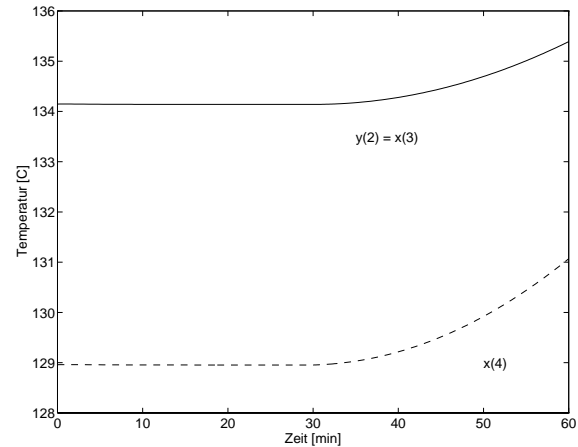
Durch dieses parallelgeschaltete P_{T_1} -Glied verändern sich die Differenzengrade nicht. Damit ist auch das erweiterte System 6-ter Ordnung statisch entkoppelbar und die zugehörige Rückführung (6.48) unterscheidet sich nicht wesentlich von dem zuvor bereits berechneten Rückführgesetz (6.38).

$$\begin{aligned} v(t) &= -\frac{1}{K/T - x_2} \tilde{y}_1 \Big|_{\substack{v=0 \\ u_2=0}} + \frac{1}{K/T - x_2} w_1(t), \\ u_2(t) &= \frac{(\vartheta_0 - x_3)}{(K/T - x_2)\alpha_2\alpha_3} \tilde{y}_1 \Big|_{\substack{v=0 \\ u_2=0}} - \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} \ddot{y}_2 \Big|_{\substack{v=0 \\ u_2=0}} - \frac{(\vartheta_0 - x_3)}{(K/T - x_2)\alpha_2\alpha_3} w_1 + \frac{1}{\alpha_2\alpha_3} w_2. \end{aligned} \quad (6.48)$$

Wählt man das Verhältnis K/T entsprechend Gl. (6.46), so hat das nicht nur günstige Auswirkungen auf die Nulldynamik, sondern es ist damit auch sichergestellt, daß die durch Gl. (6.48) generierten Stellgrößen im gesamten Arbeitsbereich endliche Werte annehmen. Dies ist offensichtlich bei der ursprünglichen Rückführung (6.38) nicht der Fall, da hier sowohl $u_1(t)$ als auch $u_2(t)$ für $x_2(t) = 0$ unendlich groß werden.

Die Bilder 6.8 und 6.9 zeigen wiederum die simulierten Verläufe der vier Zustandsgrößen des Rührkesselreaktors für den Fall, daß auf den am Hauptarbeitspunkt befindlichen Reaktor nach 30 Minuten eine sprunghafte Erregung auf den ersten Eingang des erweiterten Systems einwirkt, wobei die Parameter des P_{T_1} -Gliedes zu $T = 0,5$ h und $K = 1$ gewählt wurden.

Der Einfluß des parallelgeschalteten P_{T_1} -Gliedes auf die Nulldynamik ist in diesen Bildern deutlich zu erkennen. Anders als in den Bildern 6.1 und 6.2 treten nach dem Aufschalten der Führungsgröße keine sprunghaften Änderungen im Verlauf der Zustandsgrößen auf.

Bild 6.8: Führungsverhalten für $w_1(t) \neq 0$ Bild 6.9: Führungsverhalten für $w_1(t) \neq 0$ Bild 6.10: Führungsverhalten für $w_2(t) \neq 0$ Bild 6.11: Führungsverhalten für $w_2(t) \neq 0$

Das gewünschte entkoppelte Verhalten der zweiten Ausgangsgröße in Bild 6.9 ist dabei erhalten geblieben.

Wenn nach 30 Minuten nur auf den 2. Eingang ein Sprung aufgeschaltet wird, hat dies auch Auswirkungen auf die Ausgangsgröße $y_1(t) = x_2(t)$ in Bild 6.10, da die mit Hilfe des erweiterten Systems entworfene Rückführung nur dafür sorgt, daß die fiktive Ausgangsgröße $\tilde{y}_1(t) = x_2(t) + x_6(t)$ durch die Führungsgröße $w_2(t)$ nicht gestört wird. Allerdings ist der Einfluß von $w_2(t)$ auf den Ausgang $y_1(t)$ nicht besonders groß. Dies ist darauf zurückzuführen, daß die Stellgröße $v(t)$ lediglich über dem vorgeschalteten Integrator auf das P_{T_1} -Glied und somit auf den Ausgang $y_1(t)$ einwirken kann.

6.6 Führungs- und Störverhalten

Abschließend werden einige Ergebnisse für den Fall vorgestellt, daß die beiden näherungsweise entkoppelten Eingrößensysteme jeweils über einen PD-Regler mit der Übertragungsfunktion

$$F_R(s) = K_R[1 + T_V s] \quad (6.49)$$

hbt

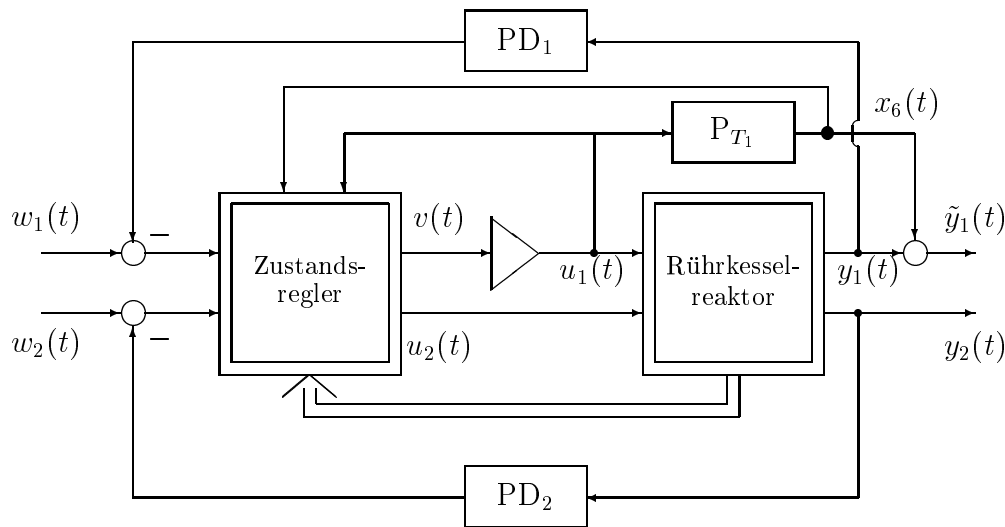


Bild 6.12: Struktur der vollständigen Rührkesselreaktor-Regelung

geschlossen werden (Bild 6.12). Diese PD-Regler werden nach der Vorgabe von T_V so eingestellt, daß sich für eine Stecke mit doppelt-integralen Verhalten der aperiodische Grenzfall mit einer Dämpfung $D = 1$ ergibt.

Die Bilder 6.13 und 6.14 zeigen das Führungsverhalten des geschlossenen Regelkreises. Dabei wurde die Führungsgröße w_1 zum Zeitpunkt $t = 9$ Minuten auf den minimalen Wert ($w_{\min} = 0,7$) und zum Zeitpunkt $t = 21$ Minuten auf den maximalen Wert ($w_{\max} = 0,95$) des Arbeitsbereiches gesetzt.

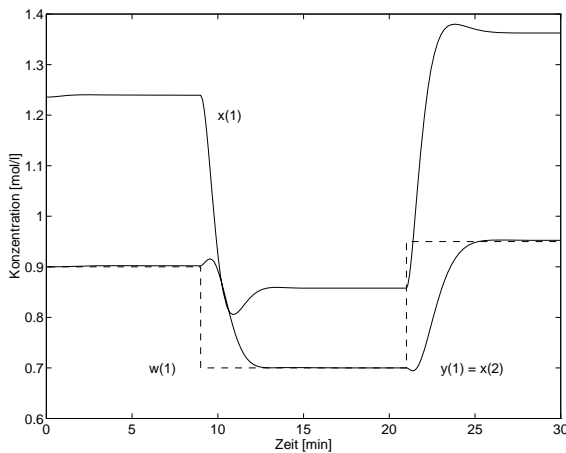


Bild 6.13: Führungsverhalten x_1, x_2

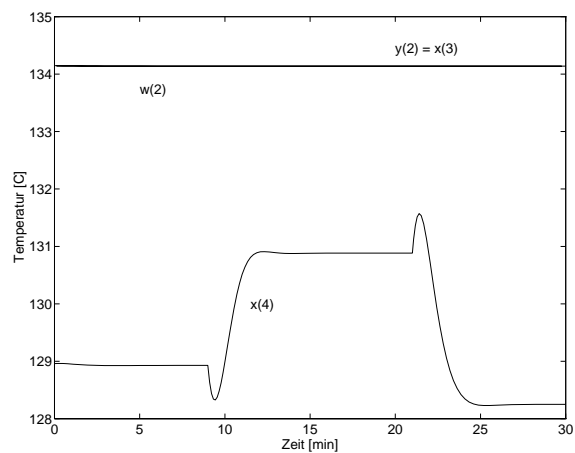


Bild 6.14: Führungsverhalten x_3, x_4

Die Parameter des parallelgeschalteten P_{T_1} -Systems, die zu $T = 1$ h und $K = 2$ gewählt wurden, haben auf das dynamischen Verhalten des Regelkreises keinen starken Einfluß.

Durch eine entsprechende Wahl der Zeitkonstanten der beiden PD-Regler zu $T_{V_1} = 0,022$ h und $T_{V_2} = 0,03$ h wird der erste Regelkreis etwas schneller eingestellt als der zweite. Die zugehörigen Verstärkungen K_{R_i} , $i = 1, 2$ ergeben sich für den aperiodischen Grenzfall aus der Gleichung

$$K_{R_i} = \frac{4}{T_{V_i}^2}. \quad (6.50)$$

Die Ausgangsgröße $y_1(t)$ in Bild 6.13 zeigt ein typisches Allpaßverhalten. Dabei ist der gesamte Verlauf dieser Ausgangsgröße fast identisch mit dem Ergebnis, das von Che und Köhne (1993) vorgestellt wurde. Im Gegensatz zu Che und Köhne mußte hierzu allerdings nicht der gesamte untere Stellgrößenbereich ausgenutzt werden (vgl. Bild 6.15).

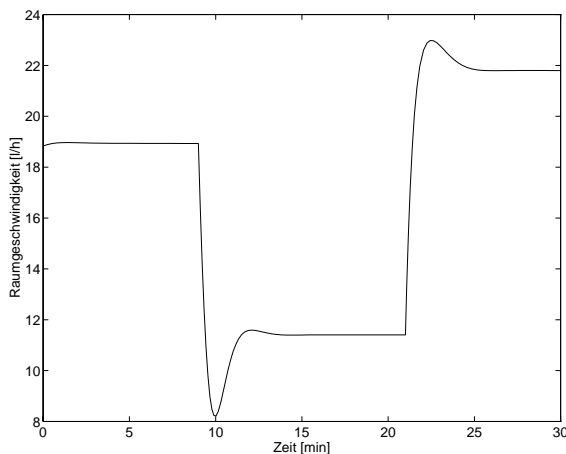


Bild 6.15: Stellgröße $u_1(t)$

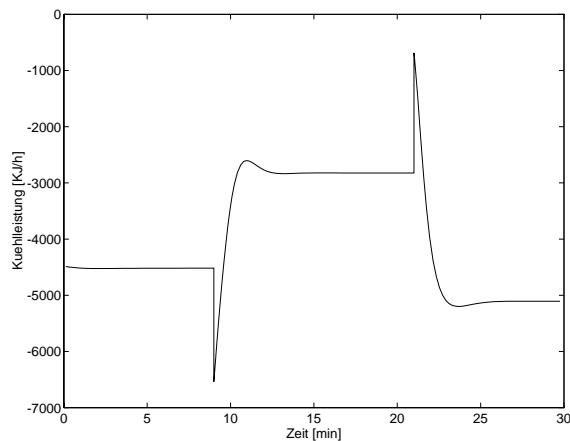
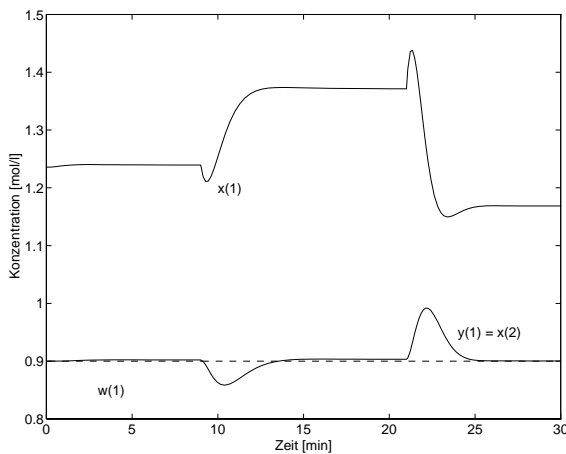
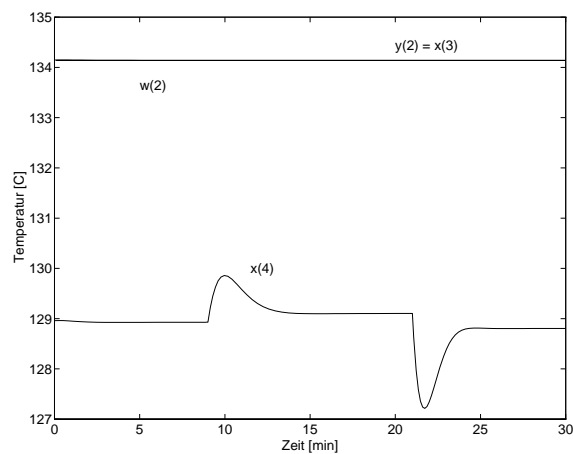
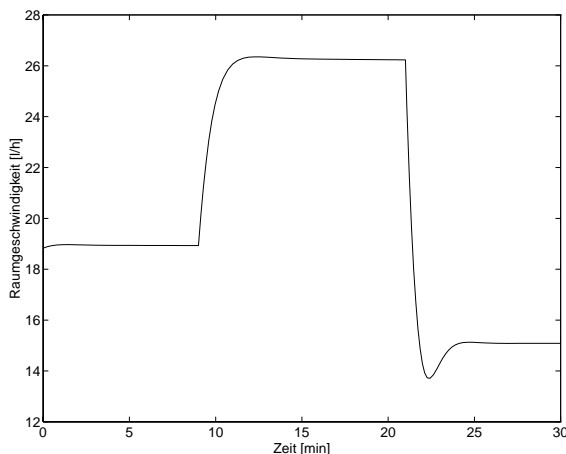
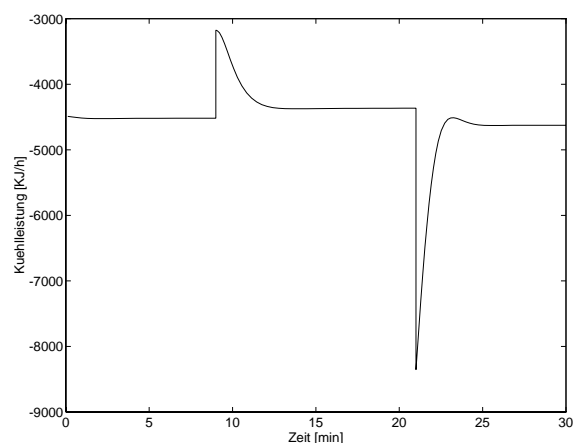


Bild 6.16: Stellgröße $u_2(t)$

Den positiven Einfluß der entkoppelnden Zustandsrückführung auf das Verhalten der zweiten Ausgangsgröße kann man in Bild 6.14 deutlich erkennen. Aufgrund der vollständigen Entkopplung, die mit Hilfe der Zustandsregelung von Che und Köhne nicht erreicht werden konnte, liegt der maximale Betrag der in Bild 6.16 dargestellten Stellgröße $u_2(t)$ etwas über dem entsprechenden Wert von Che und Köhne.

Die Bilder 6.17 und 6.18 zeigen das Störverhalten des Regelkreises für sprungförmige Änderungen der Zulaufkonzentration c_{A_0} , die im Arbeitspunkt 5,1 mol/l beträgt. Nach 9 Minuten wird diese auf den unteren zulässigen Wert von 4,5 mol/l und zum Zeitpunkt $t = 21$ Minuten auf den oberen Wert von 5,7 mol/l gesetzt. Abgesehen von einer kleinen bleibenden Regelabweichung nach dem ersten Störsprung im Bild 6.17 zeigt der Regelkreis ein gutes Störverhalten. Interessant ist, daß auch hier die zweite Ausgangsgröße in Bild 6.18 einen vollständig ungestörten Verlauf zeigt. Wie die Bilder 6.19 und 6.20 dokumentieren, bewegen sich beide Stellgrößen im zulässigen Bereich.

In diesem Abschnitt wurde auf das Beispiel des Rührkesselreaktors ein nichtlineares Reglerentwurfverfahren angewendet, das auch für viele weitere praktische Problemstellungen geeignet erscheint (Isidori 1989, Schwarz 1991, Allgöwer und Gilles 1993, Wolfmüller

Bild 6.17: Störverhalten x_1, x_2 Bild 6.18: Störverhalten x_3, x_4 Bild 6.19: Stellgröße $u_1(t)$ Bild 6.20: Stellgröße $u_2(t)$

1993, Benvenuti u.a. 1993). Es zeichnet sich dadurch aus, daß der Entwurf dabei in mehrere überschaubare Teilprobleme zerlegt wird. In Abhängigkeit von den Eigenschaften (Entkoppelbarkeit, Nulldynamik) der zu regelnden Strecke kann die Anzahl der Teilprobleme variieren. Mit seiner instabilen Nulldynamik stellt das Benchmarkproblem „Rührkesselreaktor“ allerdings schon den ungünstigsten Fall dar.

Wie bei allen Verfahren, die eine Zustandsrückführung einsetzen, müssen für die Realisierung der Regelung alle Zustandsgrößen bekannt sein. In dem Fall des Rührkesselreaktors werden von den vier Zustandsgrößen lediglich zwei gemessen, so daß die restlichen beiden mit Hilfe eines Beobachters, wie z.B. von Köhne und Che (1993) oder Schlacher und Kugi (1993) angegeben, zu ermitteln sind.

Anmerkung:

Die Forschungsarbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Projektes Schw 120/49 „Qualitative Analyse nichtlinearer Systeme mittels Digraphen“ unterstützt. Darüber hinaus danken die Autoren Herrn Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz für die

Anregungen zur Behandlung der instabilen Nulldynamik nichtlinearer Systeme.

7 Literaturverzeichnis

- Allgöwer, F.** und **E.D. Gilles.** 1993. Nichtlinearer Reglerentwurf auf der Grundlage exakter Linearisierungstechniken: In Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.) 1993. 209–234.
- Benvenuti, L.;** **M.D. Di Benedetto** und **J.W. Grizzle.** 1993. Trajectory Control of an Aircraft Using Approximate Output Tracking. *Proc. Second European Control Conference.* Groningen. 1638–1643.
- Böhme, G.** 1990. *Algebra: Anwendungsorientierte Mathematik.* 6. Auflage. Berlin: Springer.
- Bronstein, I.N.** und **K.A. Semendjajew.** 1987. *Taschenbuch der Mathematik.* Leipzig: Teubner.
- Che, G.** und **M. Köhne.** 1993. Entwurf nichtlinearer Zustandsregler und –beobachter für das Testbeispiel Rührkesselreaktor: In Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.) 1993. 235–250.
- Commault, C.;** **J. Descusse;** **J.M. Dion;** **J.F. Lafay** und **M. Malabre.** 1986. About New Decoupling Invariants: The Essential Orders. *Int. J. Control* 44. 689–700.
- Cremer, M.** 1971. A Precompensator of Minimal Order for Decoupling a Linear Multi-Variable System. *Int. J. Control* 14. 1089–1103.
- Descusse, J.** und **C.H. Moog.** 1987. Dynamic Decoupling for Right-invertible Nonlinear Systems. *Systems & Control Letters* 8. 345–349.
- Di Benedetto, M.D.,** **J.W. Grizzle** und **C.H. Moog.** 1989. Rank Invariants of Nonlinear Systems. *SIAM J. Control and Optimization* 27. 658–672.
- Diop, S.** und **M. Fliess.** 1991. On Nonlinear Observability. *Proc. First European Control Conference.* Grenoble.
- Engell, S.** 1988. *Optimale lineare Regelung.* Berlin: Springer.
- Fliess, M.** 1986a. A New Approach to the Structure at Infinity of Nonlinear Systems. *Systems & Control Letters* 7. 419–421.
- Fliess, M.** 1986b. A Note on the Invertibility of Nonlinear Input–Output Differential Systems. *Systems & Control Letters* 8. 147–151.

- Fliess, M.** 1987. Nonlinear Control Theory and Differential Algebra: Some Illustrative Examples. *Proc. 10th IFAC World Congress*. München.
- Fliess, M.** 1989. Generalized Linear Systems with Lumped or Distributed Parameters and Differential Vector Spaces. *Int. J. Control* 49. 1989–1999.
- Fliess, M.** 1990. Generalized Controller Canonical Forms for Linear and Nonlinear Dynamics. *IEEE Trans. Automat. Control* 35. 994–1001.
- Fliess, M.** und **T. Glad.** 1993. An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control: in Trentelman, H.L. und J.C. Willems, (Hrsg.). *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*. Boston: Birkhäuser. 223–267.
- Fliess, M.;** **L. Lévine** und **P. Rouchon.** 1991a. Index of a General Linear Time-Varying Implicit System. *Proc. First European Control Conference*. Grenoble. 768–772.
- Fliess, M.;** **L. Lévine** und **P. Rouchon.** 1991b. A Simplified Approach of Crane Control Via a Generalized State–Space Model. *Proc. 30th IEEE Conf. on Decision and Control*. Brighton. 736–741.
- Fliess, M.;** **L. Lévine** und **P. Rouchon.** 1993. Index of an Implicit Time–Varying Linear Differential Equation: A Noncommutative Linear Algebraic Approach. *Linear Algebra and its Applications* 186. 59–71.
- Glumineau, A.** und **C.H. Moog.** 1989. The Essential Orders and the Nonlinear Decoupling Problem. *Int. J. Control* 50. 1825–1834.
- Grübel, G.** 1983. Die regelungstechnische Programmbibliothek RASP. *Regelungstechnik* 31. 75–81.
- Hermann, R.** und **A.J. Krener.** 1977. Nonlinear Controllability and Observability. *IEEE Trans. Automat. Control* 22. 728–740.
- Hirschorn, R.M.** 1979. Invertibility of Multivariable Nonlinear Control Systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 24. 855–865.
- Huijberts, H.J.C.;** **H. Nijmeijer** und **L.L.M. van der Wegen.** 1992. Minimality of Dynamic Input–Output Decoupling for Nonlinear Systems. *Systems & Control Letters* 18. 435–443.
- Isidori, A.** 1983. Nonlinear Feedback, Structure at Infinity and the Input–Output Linearization Problem. *Proc. of the Int. Symposium MTNS–83*. Beer–Sheva. 473–493.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer.

- Kalman, M.** 1960. On the General Theory of Control Systems. *Proc. First IFAC World Congress*. Moskau.
- Kaplansky, I.** 1976. *An Introduction to Differential Algebra*. Paris: Hermann.
- Klatt, K.-U. und S. Engell.** 1993. Rührkesselreaktor mit Parallel- und Folgereaktion: In Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.) 1993. 101–108.
- Meyberg, K.** 1976. *Algebra. Teil 2*. München: Hanser.
- Moog, C.H.** 1988. Nonlinear Decoupling and Structure at Infinity. *Math. Control Signals Systems* 1. 257–268.
- Nijmeijer, H.** 1986. Right-invertibility for a Class of Nonlinear Control Systems: A Geometric Approach. *Systems & Control Letters* 7. 125–132.
- Nijmeijer, H. und J.M. Schumacher.** 1985. Zeros at Infinity for Affine Nonlinear Control Systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 30. 566–573.
- Nijmeijer, H. und A.J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York: Springer.
- Ritt, J.F.** 1950. *Differential Algebra*. New York: Amer. Math. Soc.
- Rosenbrock, H.H. und C. Storey.** 1971. *Mathematik Dynamischer Systeme*. München: Oldenbourg.
- Rouchon, P.; M. Fliess; L. Lévine und P. Martin.** 1993. Flatness and Motion Planning: The Car with n Trailers. *Proc. Second European Control Conference*. Groningen. 1518–1522.
- Schlacher, K. und A. Kugi.** 1993. Zustandsregler mit Beobachter für einen Rührkesselreaktor: In Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.) 1993. 251–266.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.
- Shapiro, L.** 1975. *Introduction to Abstract Algebra*. New York: McGraw-Hill.
- Sira-Ramirez, H. und P. Lischinsky-Arenas.** 1991. Differential Algebraic Approach in Non-Linear Dynamical Compensator Design for the D.C.-to-D.C. Power Converters. *Int. J. Control.* 54. 111–133.
- Singh, S.N.** 1981. A Modified Algorithm for Invertibility in Nonlinear Systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 26. 595–598.
- Silverman, L.M.** 1969. Inversion of Multivariable Linear Systems. *IEEE Trans. Automat. Control* 14. 270–276.

- Sontag, E.D.** 1979. On the Observability of Polynomial Systems, I: Finite-Time Problems. *SIAM J. Control and Optimization* 17. 139–151.
- Sussmann, H.** und **V. Jurdjevic.** 1972. Controllability of Nonlinear Systems. *J. Diff. Eqs.* 12. 95–116.
- Svaricek, F.** 1993. Algebraische Methoden zur Analyse und Synthese nichtlinearer Regelungssysteme: In Verein Deutscher Ingenieure (Hrsg.) 1993. 293–317.
- Svaricek, F.** 1994. *Zur rechnergestützten Analyse linearer Regelungssysteme.* Habilitationsschrift. Universität –GH– Duisburg.
- Verein Deutscher Ingenieure.** 1993. *Nichtlineare Regelung: Methoden, Werkzeuge, Anwendungen.* Tagung Langen 13./14. Mai 1993. VDI Berichte 1026. VDI/VDE–Gesellschaft Meß- und Automatisierungstechnik. Düsseldorf: VDI–Verlag.
- Vidyasagar, M.** 1993. *Nonlinear Systems Analysis.* 2. Auflage. Englewood Cliffs: Prentice–Hall.
- Wey, T.** 1992. *Einführung in die Differentialalgebra und ihre Anwendung auf nichtlineare Systeme.* Forschungsbericht Nr. 10/92, MSRT, Universität –GH– Duisburg.
- Williamson, D.** 1977. Observation of Bilinear Systems with Application to Biological Control. *Automatica* 13. 243–254.
- Wolfmüller, K.** 1993. Nichtlineare Entkopplungsregelung einer H₂/O₂–Momentanreserveanlage eines thermischen Dampfkraftwerks. *Automatisierungstechnik* 41. 259–265.