

Zur Modellierung nichtlinearer Prozesse durch quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)

M. Jelali

Forschungsbericht Nr. 5/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Dieser Bericht befaßt sich mit der Modellierung nichtlinearer Prozesse durch QLS, die nach den bilinearen Systemen (BLS) die nächst komplexere Unterklasse der analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS) darstellen. Charakteristische Eigenschaften und verschiedene Modelldarstellungen dieser Systemklasse werden ausführlich besprochen. Außerdem liegt ein Schwerpunkt der Untersuchungen in der Behandlung der Volterra-Reihendarstellung zur Beschreibung des dynamischen Übertragungsverhaltens der QLS. Zahlreiche neuere Ergebnisse zur Berechnung des Flusses einiger Teilklassen dieser Systeme werden vorgestellt. Ferner erfolgt die Angabe von zwei Verfahren zur Gewinnung zustandsquadratischer Modelle als Approximation nichtlinearer Systeme.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur	II
1 Einleitende Übersicht	1
2 Grundkonzepte und Modelle für QLS	4
2.1 Zustandsdarstellungen	4
2.2 Charakteristische Eigenschaften	6
2.3 Lösung autonomer quadratischer Differentialgleichungen	9
2.4 Verwandte Riccati-Differentialgleichungen	15
3 Volterra-Reihendarstellung	18
3.1 Berechnung des Flusses	19
3.2 Berechnung der Volterra-Kerne	20
4 QLS-Approximation nichtlinearer Systeme	25
4.1 Taylorreihenentwicklung	25
4.2 Kombination linearer Modelle	26
5 Zusammenfassung und Ausblick	28
6 Literaturverzeichnis	29
Anhang	32
A Rechenregeln zum Kronecker-Produkt	32

Nomenklatur

Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
BLS	Bilineares System
LS	Lineares System
MRG	Matrix-Riccati-Differentialgleichung
VRG	Vektor-Riccati-Differentialgleichung
NLS	Nichtlineares System
QLS	Quadratisches System mit linearer Steuerung
QLS _l	QLS mit linearem Drift-Term
QLS _q	QLS mit quadratischem Drift-Term

Formelzeichen

$\mathbf{a}(\mathbf{x}(t))$	Drift-Term eines ALS bzw. QLS
\mathbf{A}	Systemmatrix
\mathcal{A}	Algebra
\mathbf{A}_d	Systemmatrix eines zeitdiskreten Systems
\mathbf{b}	Eingangsvektor
\mathbf{b}_d	Eingangsvektor eines zeitdiskreten Systems
$\mathbf{b}(\mathbf{x}(t))$	nichtlinearer Eingangsvektor eines ALS bzw. QLS
\mathbf{c}^T	Ausgangsvektor
\mathbf{c}_d^T	Ausgangsvektor eines zeitdiskreten Systems
$c(\mathbf{x}(t))$	analytische Ausgangsfunktion
C_i	Integrationskonstante
$\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$	Definitionsbereich von \mathbf{x}
$e^{(\cdot)}$	Exponentialfunktion
\mathbf{e}_i	Einheitsvektor in der i -ten Koordinatenrichtung
$\mathbf{f}(\mathbf{x}), \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$	analytische Systemfunktionen
$g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i)$	Volterra-Kern
i, j, k, l	Laufindizes
\mathbf{I}_n	Einheitsmatrix
\mathbf{J}	Jacobi-Matrix
k	diskretes Zeitargument, $k = t/T$
$L(\mathbf{x})$	Vektorfunktion
L	Lipschitz-Konstante
n	Systemordnung
m	bewegte Masse
\mathbf{P}	lineare Transformation

r, s	Laufindizes
\mathbf{r}	Rückführungsvektor
t	kontinuierliche Zeit
T	Abtastzeit
$u(t)$	kontinuierliche Eingangsgröße
$u_k, u(k)$	diskrete Eingangsgröße
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor eines kontinuierlichen Systems
\mathbf{x}_0	Zustandsvektor zum Zeitpunkt t_0
$\mathbf{x}_k, \mathbf{x}(k)$	Zustandsvektor eines zeitdiskreten Systems
$x_{i,k}$	i -tes Element des zeitdiskreten Zustandsvektors
$y(t)$	kontinuierliche Ausgangsgröße
$y_k, y(k)$	zeitdiskrete Ausgangsgröße
\mathbf{Y}^+	verallgemeinerte Inverse (Pseudo-Inverse)
$1(t)$	Sprungfunktion
λ_i	Eigenwert
τ, τ_i	Zeitvariable
$\Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}(t))$	Fluß eines Vektorfeldes \mathbf{a}
ω	Winkelgeschwindigkeit

Operatoren und sonstige Zeichen

\times	Multiplikation
\circ	Verkettungsoperator
\otimes	Kronecker-Produkt
$ \cdot $	Betragsbildung
$\ \cdot\ $	Normbildung
$(\cdot)^{-1}$	Inversion
$(\cdot)^T$	Transponieren eines Vektors bzw. einer Matrix
$\mathbf{x} \mathcal{Q} \mathbf{y}$	\mathbf{x} quadratisch äquivalent \mathbf{y}
$(\dot{\cdot})$	Differentiation nach der Zeit
$(\cdot) _k$	Wert an der Stelle k
$\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$	partielle Differentiation
$\tilde{\mathcal{Q}}$	quadratische Äquivalenz-Relation

Indizierung

sym	symmetrisch
schief	schiefsymmetrisch
max	maximal

1 Einleitende Übersicht

In den letzten 10 Jahren wurden im Bereich der mathematischen Systemtheorie für nicht-lineare Systeme (NLS) beachtliche Erfolge erzielt. Insbesondere für die Klasse der analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) + \mathbf{b}(\mathbf{x}(t))u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1.1}$$

ist eine weitgehend geschlossene Theorie entstanden (Isidori 1989, Nijmeijer und van der Schaft 1990, Schwarz 1991 u. a.). Da die neuen Erkenntnisse, Analyse- und Syntheseverfahren zur Entwicklung von Reglern für die ALS überwiegend im Bereich der Mathematik mit zum Teil sehr anspruchsvollen mathematischen Hilfsmitteln entstanden bzw. weiter ausgebaut werden, wird es noch einiger ingenieurmäßiger Arbeit bedürfen, bis für die Lösung praktischer Aufgaben geeignete Teile der Theorie herausgearbeitet und in Simulations- und Laborstudien erprobt sind (Schwarz 1987). Dazu hat es sich bewährt, zunächst einfache Systemstrukturen zu betrachten.

Für die bilinearen Systeme (BLS)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + [\mathbf{N}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1.2}$$

als einfachste, nichtlineare Unterklasse der ALS sind für die regelungstechnische Anwendung wichtige Systemeigenschaften wie Stabilitätsverhalten, Steuer-/Beobachtbarkeit, mathematische Realisierung usw. bereits sehr gut erforscht. Insbesondere zur Regelung hydraulischer Antriebssysteme konnten bilineare Modelle erfolgreich eingesetzt werden (Beater 1987, Dorißen 1990, Guo 1991, Schwarz 1991 u.a.). Diese Erfolge geben Anlaß zur Untersuchung komplexerer Systemklassen bezüglich ihres Potentials zur praktischen Anwendung.

Eine weitere komplexere Unterklasse der ALS stellen die Polynomsysteme (PLS)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \sum_{i=1}^r \mathbf{A}_i \mathbf{x}_{\otimes}^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^s \mathbf{B}_j \mathbf{x}_{\otimes}^{(j)}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{1.3}$$

dar. Für $r = s = 2$ erhält man die *zustandsquadratischen Systeme mit linearer Steuerung* (QLS), die hier untersucht werden sollen. In den Gln. (1.3) bzw. (2.1) wird zur übersichtlichen Darstellung die Kronecker-Potenznotation

$$\mathbf{x}_{\otimes}^{(i)}(t) = \underbrace{\mathbf{x}(t) \otimes \dots \otimes \mathbf{x}(t)}_{i - \text{mal}}\tag{1.4}$$

verwendet. Anhang A enthält die Definition sowie einige Rechenregeln zum Kronecker-Produkt.

Praktische Bedeutung der QLS

QLS kommen oft zur Modellierung nichtlinearer Prozesse in Betracht (Frayman 1974), vor allem dann, wenn die Prozeß-Nichtlinearitäten als Produkt der Zustände auftreten. Zahlreiche natürliche Prozesse weisen solche Nichtlinearitäten auf, wie:

- Ein *frei rotierender Starrkörper* (z. B. ein Satellit) kann durch die nichtlinearen Differentialgleichungen

$$I_1 \dot{\omega}_1(t) = (I_2 - I_3) \omega_2(t) \omega_3(t) + u_1(t)$$

$$I_2 \dot{\omega}_2(t) = (I_3 - I_1) \omega_1(t) \omega_3(t) + u_2(t)$$

$$I_3 \dot{\omega}_3(t) = (I_1 - I_2) \omega_1(t) \omega_2(t) + u_3(t)$$

beschrieben werden (Frayman 1974). Die Eingangsgrößen u_i entsprechen den angreifenden Drehmomenten in Richtung der orthonormalen Achsen $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, I_i den Hauptträgheitsmomenten und ω_i den Winkelgeschwindigkeiten. Die Analyse eines solchen Systems ist z. B. für die Höhenregelung von Raumfahrzeugen von Interesse (Kang und Krener 1991). Mit den Abkürzungen

$$\alpha_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_1}; \quad \alpha_2 = \frac{1}{I_1}; \quad \beta_1 = \frac{I_3 - I_1}{I_2}; \quad \beta_2 = \frac{1}{I_2}; \quad \gamma_1 = \frac{I_1 - I_2}{I_3}; \quad \gamma_2 = \frac{1}{I_3}$$

erhält man das System als Zustandsmodell eines Mehrgrößen-QLS:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \alpha_1 x_2(t) x_3(t) \\ \beta_1 x_1(t) x_3(t) \\ \gamma_1 x_1(t) x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \end{bmatrix} \mathbf{u}(t) . \quad (1.5)$$

- Die *Intensitäten zweier Wellen in einem optischen MASER* erfüllen die dynamischen Beziehungen (Frayman 1974)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= 2\alpha_1 x_1(t) - 2\beta_1 x_1^2(t) - 2\theta_{12} x_1(t) x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= 2\alpha_2 x_2(t) - 2\beta_2 x_2^2(t) - 2\theta_{21} x_1(t) x_2(t) . \end{aligned} \quad (1.6)$$

Dabei stellen x_1, x_2 die Intensitäten I_1, I_2 und $\alpha_i, \beta_i, \theta_{ij}$ die Parameter des Modells dar.

- Die bekannte *Räuber-Beute-Beziehung* stellt ein QLS mit dem Zustandsmodell (Keller 1986)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= cx_1(t)x_2(t) - dx_2(t) - ex_2(t)u(t) \end{aligned} \quad (1.7)$$

dar. Die Zustandsgrößen x_1 und x_2 bezeichnen die normierten Anzahlen von Beute- bzw. Räubertieren, die Koeffizienten a bis d die Geburts- bzw. Todesraten. Dieses System ist bei der Analyse nichtlinearer Systeme ein gern zitiertes Beispiel (u. a. Bestle und Zeitz 1983, Keller 1986, Zeitz 1987). Für $e = 0$ ergibt sich das sog. *Volterra-Lotka-System* (Verhulst 1990).

Gliederung der Arbeit

Im folgenden Abschnitt werden die Zustandsdarstellungen von QLS angegeben. Im Anschluß daran werden Grundbegriffe und charakteristische Eigenschaften der QLS, wie z. B. quadratische Äquivalenz, Koordinatentransformation, zugehörige Algebra sowie die Beziehung zu den BLS angesprochen. Zur Berechnung des zugehörigen Flusses einiger Teilklassen der QLS mit speziellen Strukturen erfolgt eine ausführliche Diskussion über allgemeine Lösungen der entsprechenden Differentialgleichungen. Dazu können u. a. Lösungstechniken der Riccati-Differentialgleichungen von Reid (1972) für eine gewisse Teilklasse der QLS eingesetzt werden.

Abschnitt 3 widmet sich der Beschreibung des Ein-/Ausgangsverhaltens nichtlinearer Systeme mittels Volterra-Reihen. Eine neue Methode zur Berechnung der sog. Volterra-Kerne wird vorgestellt und für die LS, BLS und QLS ausgewertet. Dabei werden die in Abschnitt 2 gefundenen Ergebnisse ausgenutzt.

Der 4. Abschnitt beinhaltet zwei Verfahren zur expliziten Bestimmung von quadratischen Zustandsmodellen zur Approximation des Verhaltens nichtlinearer technischer Prozesse. Zum einen steht die gut bekannte Methode der Taylor-Reihenentwicklung zur Verfügung. Zum anderen können aus der Kombination von linearen Modellen und unter Einbeziehung von regulären Punkten zustandsquadratische Modelle hergeleitet werden. Die linearen Modelle können entweder analytisch oder mit den bekannten Identifikationsverfahren für lineare Systeme gewonnen werden.

Inhalt des letzten Abschnitts bildet eine Zusammenfassung des vorliegenden Berichts sowie ein Ausblick auf mögliche weiterführende Untersuchungen im Bereich der hier behandelten Thematik.

2 Grundkonzepte und Modelle für QLS

2.1 Zustandsdarstellungen

Die Eingrößen-QLS besitzen Zustandsdarstellungen der allgemeinen Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)\end{aligned}\quad (2.1)$$

mit dem Zustandsgrößenvektor $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$, der Ausgangsgröße $y(t)$, der Eingangsgröße $u(t)$ und den konstanten Matrizen \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \mathbf{b}_0 , \mathbf{B}_1 , \mathbf{B}_2 , \mathbf{c}^T angepaßter Dimension. Die Struktur solcher Systeme zeigt Bild 2.1. Die LS und BLS sind als Unterklassen der QLS gekennzeichnet.

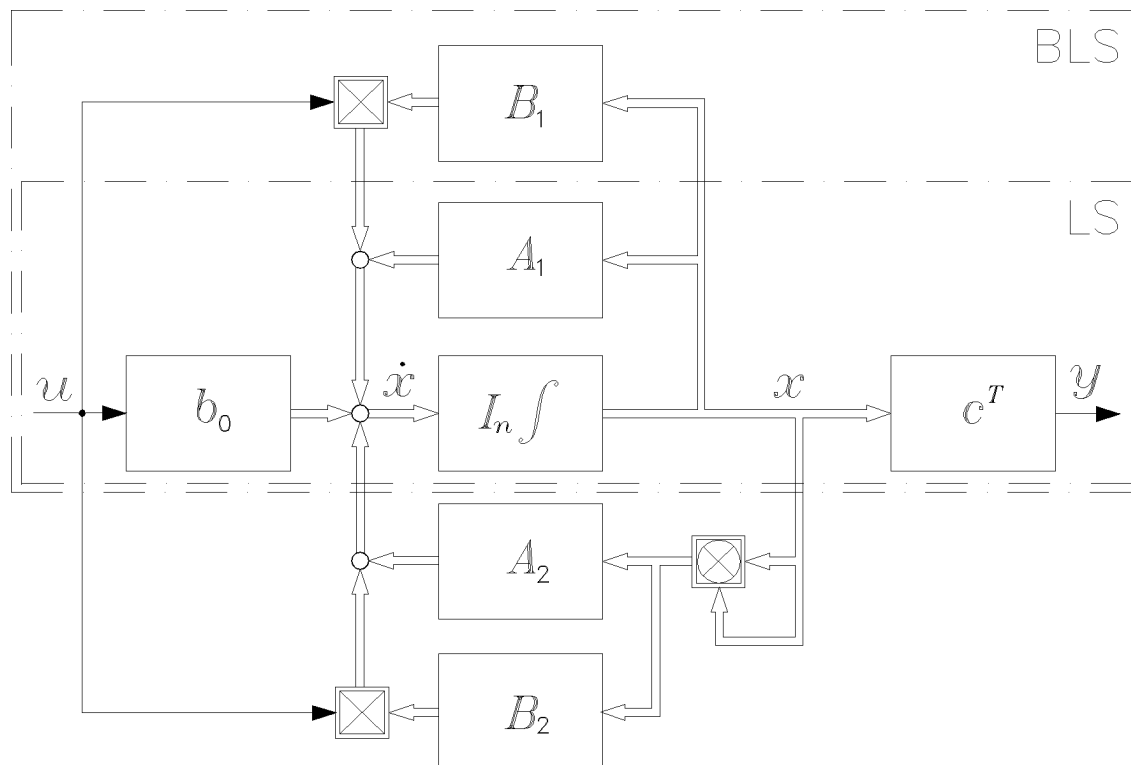


Bild 2.1: Blockschaltbild eines QLS

QLS können auch mittels konventioneller Matrizenschreibweise

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_n \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_1 \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_2 \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_n \mathbf{x}(t) \end{bmatrix}] u(t) \quad (2.2)$$

$$= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n e_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n e_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{R}_i \mathbf{x}(t)] u(t) \quad (2.3)$$

dargestellt werden, wobei \mathbf{e}_i der Einheitsvektor in der i -ten Koordinatenrichtung ist und \mathbf{Q}_i bzw. \mathbf{R}_i die Dimension $n \times n$ haben. Falls \mathbf{Q}_i symmetrisch ist, so heißt $\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x}$ eine *quadratische Form in \mathbf{x}* . \mathbf{Q}_i wird dann als *Formenmatrix* bezeichnet (Bronstein und Semendjajew 1987). Die Symmetrie der Matrizen \mathbf{Q}_i bei den QLS ist i. allg. nicht notwendig. Dennoch kann sie wegen der Redundanz der Terme $x_i x_j \forall i \neq j$ immer erreicht werden. Es gilt nämlich:

$$a_{2,ij}x_i x_j + a_{2,ji}x_j x_i = \left(\frac{a_{2,ij} + a_{2,ji}}{2} \right) x_i x_j + \left(\frac{a_{2,ij} + a_{2,ji}}{2} \right) x_j x_i . \quad (2.4)$$

Untersuchungen des Autors (Jelali 1993a, 1993b und 1994) haben gezeigt, daß innerhalb der QLS die Teilklasse mit linearem Drift-Term bzw. linearer Eigendynamik (QLS_l)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)]u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.5)$$

relativ einfach zu handhaben ist. Für diese Teilklasse wurden Aufgaben der Zustandsbeobachter- und Schätzfilterauslegung bereits gelöst (Jelali 1993a).

Eine weitere interessante, allerdings wesentlich schwieriger zu behandelnde Teilklasse der QLS sind die mit quadratischem Drift-Term bzw. quadratischer Eigendynamik (QLS_q)

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{aligned} \quad (2.6)$$

oder auch

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_1 \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_2 \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_n \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} + \mathbf{b}_0 u(t) \quad (2.7)$$

$$= \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) , \quad (2.8)$$

die überwiegend in dieser Arbeit untersucht werden. Schwarz (1993) bezeichnet diese als Vektor-Riccati-Systeme, da Gl. (2.6) für den eindimensionalen Fall ($n = 1$) eine Art Riccatische Differentialgleichung darstellt, die in der mathematischen Literatur (Collatz 1973, Kamke 1977 u. a.) gut bekannt ist.

Die Darstellungen gemäß Gl. (2.1) bzw. (2.6) und Gl. (2.3) bzw. (2.8) sind grundsätzlich identisch. Es werden nur die Zeilen $\mathbf{a}_{2,i}$ bzw. $\mathbf{b}_{2,i}$, $i = 1, \dots, n$ der Matrizen \mathbf{A}_2 bzw. \mathbf{B}_2

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{2,i} &= \left[a_{2,i1} \quad a_{2,i2} \quad \dots \quad a_{2,in^2} \right] , \\ \mathbf{b}_{2,i} &= \left[b_{2,i1} \quad b_{2,i2} \quad \dots \quad b_{2,in^2} \right] \end{aligned}$$

in die quadratischen Matrizen \mathbf{Q}_i bzw. \mathbf{R}_i

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} a_{2,i1} & a_{2,i2} & \dots & a_{2,in} \\ a_{2,i[n+1]} & a_{2,i[n+2]} & \dots & a_{2,i[2n]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2,i[(n-1)n+1]} & a_{2,i[(n-1)n+2]} & \dots & a_{2,in^2} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} b_{2,i1} & b_{2,i2} & \dots & b_{2,in} \\ b_{2,i[n+1]} & b_{2,i[n+2]} & \dots & b_{2,i[2n]} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{2,i[(n-1)n+1]} & b_{2,i[(n-1)n+2]} & \dots & b_{2,in^2} \end{bmatrix}$$

umgeschrieben. Die Darstellung nach Gl. (2.8) eignet sich besonders zur Bestimmung der allgemeinen Lösung autonomer QLS (vgl. Abschnitt 2.3), die für die Berechnung des Flusses und damit der Volterra-Kerne (vgl. Abschnitt 3) benötigt wird.

2.2 Charakteristische Eigenschaften

Quadratische Äquivalenz

Hier werden die QLS_q nach Gl. (2.8) betrachtet und mit $\{\mathbf{Q}_i, \mathbf{A}_1, \mathbf{b}_0\}$ abgekürzt. Dabei ist der nichtlineare Term eindeutig durch die Matrizen \mathbf{Q}_i bestimmt. Dies ermöglicht folgende Definition:

Definition 2.1 : (Frayman 1974)

- i) Zwei Matrizen \mathbf{M} und \mathbf{N} heißen dann und nur dann *quadratisch äquivalent*, wenn

$$\mathbf{x}^T \mathbf{M} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.9)$$

gilt. Man notiere dann: $\mathbf{M} \overset{Q}{\sim} \mathbf{N}$ und lese: \mathbf{M} quadratisch äquivalent \mathbf{N} .

- ii) Zwei QLS_q $\{\mathbf{Q}_i, \mathbf{A}_1, \mathbf{b}_0\}$ und $\{\mathbf{Q}_i^*, \mathbf{A}_1, \mathbf{b}_0\}$ heißen quadratisch äquivalent, wenn sie die Bedingung

$$\mathbf{Q}_i \overset{Q}{\sim} \mathbf{Q}_i^* \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.10)$$

erfüllen.

□

Die so definierte Äquivalenzrelation ist binär und besitzt die Eigenschaften (Bronstein und Semendjajew 1987):

- Reflexivität: $\mathbf{M} \overset{Q}{\sim} \mathbf{M} \quad \forall \mathbf{M} \in \mathbb{R}^n$
- Symmetrie: $\mathbf{M} \overset{Q}{\sim} \mathbf{N} \implies \mathbf{N} \overset{Q}{\sim} \mathbf{M} \quad \forall \mathbf{M}, \mathbf{N} \in \mathbb{R}^n$

- Transitivität: $M \overset{Q}{\sim} N \wedge N \overset{Q}{\sim} P \implies M \overset{Q}{\sim} P \quad \forall M, N, P \in \mathbb{R}^n$.

Da jede Matrix M als Summe einer symmetrischen und einer schiefsymmetrischen Teilmatrix

$$M = M_{\text{sym}} + M_{\text{schief}} = \frac{M + M^T}{2} + \frac{M - M^T}{2} \quad (2.11)$$

dargestellt werden kann und

$$\mathbf{x}^T M_{\text{schief}} \mathbf{x} = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

gilt, ist allein die symmetrische Teilmatrix für die quadratische Äquivalenz maßgebend. $M \overset{Q}{\sim} N$ gilt dann und nur dann, wenn M_{sym} mit N_{sym} übereinstimmt, d. h.

$$M_{\text{sym}} = N_{\text{sym}} \iff M \overset{Q}{\sim} N \quad (2.13)$$

Der Nachweis der quadratischen Äquivalenz zweier QLS_q reduziert sich demzufolge auf die Überprüfung der Bedingung

$$Q_{\text{sym},i} = Q_{\text{sym},i}^* \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (2.14)$$

Es sei hier angemerkt, daß unter der quadratischen Äquivalenz Rang, Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix nicht invariant sind (Frayman 1974).

Koordinatentransformation

Eine nichtsinguläre, lineare Transformation

$$\mathbf{x}(t) = P \mathbf{z}(t) \longrightarrow \dot{\mathbf{x}}(t) = P \dot{\mathbf{z}}(t) \quad (2.15)$$

überführt das QLS nach Gl. (2.1) in ein QLS der Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_1^* \mathbf{z}(t) + \mathbf{A}_2^* \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t) + [\mathbf{b}_0^* + \mathbf{B}_1^* \mathbf{z}(t) + \mathbf{B}_2^* \mathbf{z}(t) \otimes \mathbf{z}(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^{*T} \mathbf{z}(t) \quad ; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0) = P^{-1} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.16)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1^* &= P^{-1} \mathbf{A}_1 P \\ \mathbf{A}_2^* &= P^{-1} \mathbf{A}_2 P \otimes P \\ \mathbf{b}_0^* &= P^{-1} \mathbf{b}_0 \\ \mathbf{B}_1^* &= P^{-1} \mathbf{B}_1 P \\ \mathbf{B}_2^* &= P^{-1} \mathbf{B}_2 P \otimes P \\ \mathbf{c}^{*T} &= \mathbf{c}^T P \quad . \end{aligned}$$

Alternativ kann für Gl. (2.16) auch

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= P^{-1} \mathbf{A}_1 P \mathbf{z}(t) + \sum_{i=1}^n P^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{z}^T(t) Q_i^* \mathbf{z}(t) + \\ &\quad + [P^{-1} \mathbf{b}_0 + P^{-1} \mathbf{B}_1 \mathbf{z}(t) + \sum_{i=1}^n P^{-1} \mathbf{e}_i \mathbf{z}^T(t) \mathbf{R}_i^* \mathbf{z}(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^{*T} \mathbf{z}(t) \quad ; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0) = P^{-1} \mathbf{x}_0 \end{aligned} \quad (2.17)$$

angegeben werden. Die Matrizen \mathbf{Q}_i^* bzw. \mathbf{R}_i^* in Gl. (2.17) lassen sich aus

$$\mathbf{Q}_i^* = \mathbf{P}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{P} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{R}_i^* = \mathbf{P}^T \mathbf{R}_i \mathbf{P} \quad (2.18)$$

berechnen. Da die Transformation linear ist, beeinflussen sich die linearen und quadratischen Terme keineswegs gegenseitig. Außerdem bleibt die quadratische Äquivalenz unter der Transformation erhalten.

Zugehörige Algebra

Von Markus (1960) wurde eine Algebra für die spezielle Teilklasse der QLS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) \quad (2.19)$$

eingeführt. Dazu betrachtet man die Abbildung

$$\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{z} := \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{z}(t) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad (2.20)$$

als binäre Operation (Multiplikation). Mit dieser erhält der Vektorraum $(V, \mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{z}, F)$ die Struktur einer Algebra \mathcal{A} über dem Körper F mit den Eigenschaften (Frayman 1974)

- i) $\mathbf{x} \mathbf{Q} (\mathbf{z} + \mathbf{w}) = \mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{z} + \mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{A},$
- ii) $(\mathbf{z} + \mathbf{w}) \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{z} \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{w} \mathbf{Q} \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{w}, \mathbf{z} \in \mathcal{A},$
- iii) $a(\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{z}) = (a\mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{z} = \mathbf{x} \mathbf{Q} (a\mathbf{z}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{z} \in \mathcal{A}, \forall a \in F.$

Die Erweiterung dieser Algebra auf die QLS_q nach Gl. (2.6) bzw. (2.8) geht auf Gerber (1972) zurück. Die zugehörige Algebra ist die kommutative, i. allg. nichtassoziative Algebra, die durch die Matrizen \mathbf{Q}_i definiert wird.

Beziehung zu den BLS

Zwischen den BLS und QLS besteht ein Zusammenhang, der im folgenden erklärt wird. Die BLS besitzen die Zustandsgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + [\mathbf{N} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}] v(t) \quad (2.21)$$

mit $v(t)$ als Eingangsgröße. Wählt man eine lineare Zustandsrückführung der Form

$$v(t) = -\mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) + \alpha u(t) \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (2.22)$$

wobei $u(t)$ der neue Eingang ist, und setzt Gl. (2.22) in Gl. (2.21) ein, dann ergibt sich

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{A} - \mathbf{b} \mathbf{r}^T) \mathbf{x}(t) - \mathbf{N} \mathbf{x}(t) \mathbf{r}^T \mathbf{x}(t) + \alpha [\mathbf{N} \mathbf{x}(t) + \mathbf{b}] u(t) . \quad (2.23)$$

Durch Berücksichtigung des Zusammenhangs¹

$$\mathbf{N}\mathbf{x}(t)\mathbf{r}^T\mathbf{x}(t) = (\mathbf{N} \otimes \mathbf{r}^T)(\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)) := \mathbf{A}_2^*\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) , \quad (2.24)$$

wird klar, daß Gl. (2.23) in der Tat ein QLS

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1^*\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2^*\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) + [\mathbf{b}_0^* + \mathbf{B}_1^*\mathbf{x}(t)]u(t) \quad (2.25)$$

mit

$$\mathbf{A}_1^* = \mathbf{A} - \mathbf{b}\mathbf{r}^T , \quad \mathbf{A}_2^* = -\mathbf{N} \otimes \mathbf{r}^T , \quad \mathbf{b}_0^* = \alpha\mathbf{b} , \quad \mathbf{B}_1^* = \alpha\mathbf{N} .$$

darstellt. Um also das Verhalten rückgekoppelter bilinearer Systeme, z. B. bezüglich Stabilität, zu verstehen, ist die Untersuchung des äquivalenten QLS erforderlich.

2.3 Lösung autonomer quadratischer Differentialgleichungen

Dieser Abschnitt gibt einige Methoden zur Lösung der autonomen quadratischer Differentialgleichungen

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2\mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \quad (2.26)$$

$$= \mathbf{A}_1\mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i\mathbf{x}^T(t)\mathbf{Q}_i\mathbf{x}(t) . \quad (2.27)$$

Dabei wird induktiv vorgegangen, indem zunächst die Lösung für den skalaren Fall angegeben und dann auf den vektoriellen Fall verallgemeinert wird. Da in der dem Autor bekannten mathematischen Literatur keine allgemeine Lösung zu finden ist, werden bestimmte Strukturen dieser Gleichungen vorausgesetzt.

Existenz und Eindeutigkeit

Eine wichtige Frage bei der Suche nach Lösungen von $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist zunächst die nach deren Existenz und Eindeutigkeit. Diese legen Definition 2.2 und Satz 2.1 fest.

Definition 2.2 : (Verhulst 1990)

Die Vektorfunktion $\mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^n$ erfüllt die Lipschitz-Bedingung bezüglich \mathbf{x} , wenn die Ungleichung

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| \quad ; \quad \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}} \quad (2.28)$$

gilt. Hierbei ist L die sog. Lipschitz-Konstante.

□

¹Schreibt man beide Seiten von Gl. (2.24) komponentenweise und führt entsprechende Umstellungen durch, dann gelangt man zum gleichen Ausdruck.

Satz 2.1 : (Verhulst 1990)

Sei die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 ; \quad \mathbf{x} \in \mathcal{D}_{\mathbf{x}}, \quad \mathcal{D}_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n / \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \leq d\} \quad (2.29)$$

mit d als positiver Konstanten zu lösen. $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ möge

- i) kontinuierlich in $\mathcal{D}_{\mathbf{x}}$ sein und
- ii) der Lipschitz-Bedingung nach Definition 2.2 genügen.

Dann besitzt Gl. (2.29) eine eindeutige Lösung.

□

Im weiteren wird vorausgesetzt, daß die Bedingungen gemäß Satz 2.1 erfüllt sind. Eine zentrale Rolle bei den Untersuchungen spielt der folgende Satz von Frayman (1974), der die Äquivalenz von Differentialgleichungen bezüglich ihrer Trajektorien-Strukturen zum Ausdruck bringt.

Satz 2.2 :

Die eindeutige Lösung der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.30)$$

in dem offenen Zeitintervall (τ_-, τ_+) sei gegeben zu

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{r}(t, \mathbf{x}_0) . \quad (2.31)$$

Möge $\psi(\mathbf{x}) \neq 0$ eine Abbildung von \mathbb{R}^n in \mathbb{R} sein, die der Lipschitz-Bedingung im gleichen offenen Gebiet $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ wie $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ genügt. \mathcal{R} soll \mathbf{x}_0 enthalten. Dann kann die Lösung von

$$\dot{\mathbf{y}} = \psi(\mathbf{y})\mathbf{f}(\mathbf{y}) ; \quad \mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.32)$$

in einem offenen Intervall (τ_-^*, τ_+^*) , worin t_0 enthalten ist, zu

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{r}(\gamma(t), \mathbf{x}_0) \quad (2.33)$$

angesetzt werden. Dabei bildet $\gamma(t)$ die eindeutige Lösung der skalaren Differentialgleichung

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \psi(\mathbf{r}(\gamma, \mathbf{x}_0)) ; \quad \gamma(t_0) = t_0 . \quad (2.34)$$

□

Anhand dieses Satzes und ausgehend von der bekannten allgemeinen Lösung

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0 \quad (2.35)$$

der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_1 \mathbf{x} ; \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \quad (2.36)$$

können Differentialgleichungen mit gleicher Trajektorien-Struktur elegant gelöst werden.

Struktur 1: $\dot{x}(t) = a_2 x^2(t)$

Betrachtet werden zunächst die skalaren autonomen QLS

$$\dot{x}(t) = a_2 x^2(t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad , \quad (2.37)$$

die auch in der äquivalenten Form

$$\dot{x}(t) = x(t)(a_2 x(t)) := \psi(x)(a_2 x(t)) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (2.38)$$

geschrieben werden können. Gemäß Satz 2.2 muß die Lösung die Gestalt

$$x(t) = r(\gamma(t), x_0) = e^{a_1 \gamma(t)} x_0 \quad (2.39)$$

aufweisen. Dabei hat die Funktion $\gamma(t)$ die Bedingung

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \psi(r(\gamma, x_0)) = e^{a_2 \gamma(t)} x_0 \quad ; \quad \gamma(0) = 0 \quad (2.40)$$

zu erfüllen. Eine Variablentrennung mit anschließender Integration liefert den Zusammenhang

$$e^{a_2 \gamma(t)} = \frac{1}{1 - a_2 x_0 t} \quad (2.41)$$

und damit auch die allgemeine Lösung von Gl. (2.37) zu

$$x(t) = \frac{x_0}{1 - a_2 x_0 t} = (1 - a_2 x_0 t)^{-1} x_0 \quad . \quad (2.42)$$

Struktur 2: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t)$

Die zur skalaren Gl. (2.37) äquivalente Vektor-Differentialgleichung lautet

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) = \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \right) \mathbf{x}(t) \quad . \quad (2.43)$$

Die Ähnlichkeit der Gln. (2.38) und (2.43) kann ausgenutzt werden, indem die der Gl. (2.42) „ähnliche“ Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{I}_n - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}_0^T \mathbf{Q}_i \right) t \right]^{-1} \mathbf{x}_0 =: [\mathbf{I}_n - \mathbf{S}_Q t]^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (2.44)$$

für Gl. (2.43) angesetzt wird. Die Bedingungen, unter denen diese Lösung Gültigkeit hat, werden in Frayman (1974) ausführlich diskutiert, so daß hier nur das Ergebnis angegeben wird:

Satz 2.3 :

Für jede Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$, für die \mathbf{S}_Q

i) symmetrisch und

ii) kommutativ mit jeder Matrix \mathbf{Q}_i ist,

hat die Lösung gemäß Gl. (2.44) der Vektor-Differentialgleichung (2.43) in einem offenen Intervall um $t_0 = 0$ Gültigkeit. Diese Lösung ist dann

- divergent für $t = \frac{1}{\lambda_{\max}}$ und $\lambda_{\max} > 0$,
- definiert für alle t und $\lambda_{\max} = 0$,
- konvergent nach \mathbf{x}_0 für $\lambda_{\max} < 0$.

Hierbei steht λ_{\max} für den maximalen Eigenwert der Matrix $\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}_0^T \mathbf{Q}_i$.

□

Untersuchungen von Gerber (1972) auf der Basis von algebraischen Konzepten führten zu ähnlichen Ergebnissen wie in Satz 2.3. Dort gilt die Lösung nach Gl. (2.44) zwar für alle Anfangszustände \mathbf{x}_0 , dafür müssen jedoch andere Bedingungen erfüllt sein. Das Ergebnis von Gerber (1972) läßt sich im folgenden Satz zusammenfassen.

Satz 2.4 :

Die Vektor-Differentialgleichung (2.43) besitzt die Lösung gemäß Gl. (2.44) für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ dann und nur dann, wenn die Matrizen \mathbf{Q}_i eine sog. multiplikative, assoziative Algebra definieren. Notwendige und hinreichende Bedingungen für eine solche Algebra stellen die Beziehungen

- i) $(\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{x} = \mathbf{x} \mathbf{Q} (\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x})$ und
- ii) $[(\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x}) \mathbf{Q} \mathbf{x}] \mathbf{Q} \mathbf{x} = (\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x}) \mathbf{Q} (\mathbf{x} \mathbf{Q} \mathbf{x})$

dar.

□

Zahlreiche Beispiele in Frayman (1974) zeigen, daß es Fälle gibt, wofür die Kriterien von Satz 2.3 gelten, die von Satz 2.4 jedoch nicht, und umgekehrt. Demzufolge ergänzen sich beide Ergebnisse und müssen bei konkreten Beispielen evtl. sukzessive herangezogen werden.

Beispiel 2.1 :

Für ein QLS der Form (2.43) mit

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Q}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{Q}_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

ergibt sich

$$\mathbf{S}_{\mathbf{Q}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}_0^T \mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} x_{02} & x_{01} \\ -x_{01} & x_{02} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

und damit

$$\mathbf{x}(t) = \left[\mathbf{I}_2 - \begin{bmatrix} x_{02}t & x_{01}t \\ -x_{01}t & x_{02}t \end{bmatrix} \right]^{-1} \mathbf{x}_0 \quad (2.47)$$

$$= \frac{1}{(1 - x_{02}t)^2 + x_{01}^2 t^2} \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} - (x_{01}^2 + x_{02}^2)t \end{bmatrix} . \quad (2.48)$$

Laut Satz 2.3 gilt diese Lösung nur für den Fall $x_{01} = 0$, weil nur dann die Matrix \mathbf{S}_Q symmetrisch ist. Man kann allerdings leicht überprüfen, daß die Matrizen \mathbf{Q}_1 und \mathbf{Q}_2 eine assoziative Algebra generieren, so daß die Lösung gemäß Gl. (2.47) doch für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ Gültigkeit besitzt.

□

Struktur 3: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + L(\mathbf{x}) \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t)$

Läßt sich in einem QLS zwischen dem linearen und dem quadratischen Term einen Zusammenhang der Form

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) = L(\mathbf{x}) \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) \quad ; \quad L(\mathbf{x}) = l_1 x_1 + l_2 x_2 + \dots + l_n x_n \quad (2.49)$$

angeben, so kann die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = [1 + L(\mathbf{x})] \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) := \psi(\mathbf{x}) \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) \quad (2.50)$$

mit Hilfe von Satz 2.2 gelöst werden. Die Funktion $\gamma(t)$ ergibt sich durch

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = 1 + L(e^{\mathbf{A}_1 \gamma} \mathbf{x}_0) \quad , \quad (2.51)$$

was zu

$$\int_0^\gamma \frac{d\beta}{1 + L(e^{\mathbf{A}_1 \beta} \mathbf{x}_0)} = t \quad (2.52)$$

führt. Die allgemeine Lösung von Gl. (2.49) lautet dann

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}_1 \gamma(t)} \mathbf{x}_0 \quad . \quad (2.53)$$

Gl. (2.52) kann nicht immer in geschlossener Form angegeben werden. Für spezielle Vektorfunktionen $L(\mathbf{x})$ läßt sich diese jedoch lösen. Andernfalls kann man versuchen, eine numerische Lösung zu berechnen.

Struktur 4: $\dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t)$

Die skalaren autonomen QLS

$$\dot{x}(t) = a_1 x(t) + a_2 x^2(t) \quad ; \quad x(0) = x_0 \quad (2.54)$$

$$= \left(x(t) + \frac{a_1}{a_2} \right) a_2 x(t) := \psi(x) a_2 x(t) \quad (2.55)$$

müssen gemäß Satz 2.2 die Lösung

$$x(t) = r(\gamma(t), x_0) = x_0 e^{a_2 \gamma(t)} \quad (2.56)$$

aufweisen. Dabei hat die Funktion $\gamma(t)$ die Bedingung

$$\frac{d\gamma(t)}{dt} = \psi(r(\gamma, x_0)) = x_0 e^{a_2 \gamma(t)} + \frac{a_1}{a_2} \quad ; \quad \gamma(0) = 0 \quad (2.57)$$

zu erfüllen. Eine Variablentrennung mit anschließender Integration von Gl. (2.57) führt auf

$$e^{a_2 \gamma(t)} = \frac{a_1 e^{a_1 t}}{a_1 + a_2 (1 - e^{a_1 t}) x_0} \quad . \quad (2.58)$$

Damit folgt die allgemeine Lösung von Gl. (2.54) zu

$$x(t) = \frac{a_1 x_0}{(a_1 + a_2 x_0) e^{-a_1 t} - a_2 x_0} = \frac{e^{a_1 t} x_0}{1 + \frac{a_2}{a_1} (1 - e^{a_1 t}) x_0} \quad . \quad (2.59)$$

Struktur 5: $\dot{\mathbf{x}}(t) = \text{diag}\{\mathbf{A}_1\} \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2^\square \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)$

hat die Matrix \mathbf{A}_1 nur auf der Hauptdiagonale von Null verschiedene Elemente

$$\text{diag}\{\mathbf{A}_1\} = (a_{1,ij}) / \begin{cases} a_{1,ij} = 0 & \text{für } i \neq j \\ a_{1,ij} \neq 0 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (2.60)$$

und ist der nichtlineare Term $\mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)$ rein quadratisch²

$$\mathbf{A}_2^\square = (a_{2,ij}) / \begin{cases} a_{2,ij} x_i x_j = 0 & \text{für } i \neq j \\ a_{2,ij} x_i x_j \neq 0 & \text{für } i = j \end{cases} \quad , \quad (2.61)$$

dann erhält man ein System von n entkoppelten Differentialgleichungen, die jeweils die Form von Gl. (2.54) aufweisen. Die Gesamtlösung läßt sich dann einfach aus den einzelnen Lösungen angeben.

Bisher ist es doch gelungen, allgemeine analytische Lösungen für eine recht große Anzahl von autonomen quadratischen Differentialgleichungen mit speziellen Strukturen herzuleiten. Darüber hinaus gibt es eine Teilklasse der QLS, die eng verwandt ist mit den sog. Riccati-Differentialgleichungen. Der nächste Abschnitt geht der Frage nach, welche Struktur diese Teilklasse haben muß und inwieweit dafür bei Riccati-Differentialgleichungen verwendete Lösungstechniken (Reid 1972) eingesetzt werden können.

²D. h. auch: $\mathbf{Q}_i = (q_{i,jk}) / \begin{cases} q_{i,jk} = 0 & \text{für } j \neq k \\ q_{i,jk} \neq 0 & \text{für } j = k \end{cases} \quad .$

2.4 Verwandte Riccati-Differentialgleichungen

Die Matrix-Riccati-Differentialgleichung (MRG) vom Typ³

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}(t) &= \mathbf{C}\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{D} + \mathbf{P}(t)\mathbf{S}\mathbf{P}(t) \quad ; \quad \mathbf{P}(t_0) = \mathbf{P}_0 \quad ; \quad (2.62) \\ \mathbf{P}(t) &\in \mathbb{R}^{n \times m} \quad ; \quad \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad ; \quad \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad ; \quad \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m \times n} \end{aligned}$$

findet bei der Lösung vieler Aufgaben der Systemtheorie Anwendung. Zu nennen sind z. B. die Optimalregelung linearer Systeme, die lineare Filterung und Prädiktionstheorie sowie die dynamische Programmierung (Reid 1972). Ansätze für die Lösung dieser MRG werden in Reid (1972) angegeben. Da die MRG –wie unten noch gezeigt wird– ein Spezialfall der QLS darstellen, können diese Lösungsansätze auf bestimmte Teilklassen der QLS übertragen werden.

Zur Lösung der MRG (2.62) muß zunächst das entsprechende lineare Matrix-Differentialgleichungssystem

$$\dot{\mathbf{V}}(t) = -\mathbf{D}\mathbf{V}(t) - \mathbf{S}\mathbf{W}(t) \quad ; \quad \mathbf{V}(t_0) = \mathbf{V}_0 \quad ; \quad \mathbf{V}(t) \in \mathbb{R}^{m \times m} \quad (2.63)$$

$$\dot{\mathbf{W}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{W}(t) \quad ; \quad \mathbf{W}(t_0) = \mathbf{W}_0 \quad ; \quad \mathbf{W}(t) \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (2.64)$$

gelöst werden. Wenn die Matrix $\mathbf{V}(t)$ nichtsingulär ist, dann ergibt sich die gesuchte Lösung zu (Reid 1972):

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{V}^{-1}(t) \quad . \quad (2.65)$$

Im Sinne einer induktiven Vorgehensweise erfolgt zuerst die Behandlung der MRG für den Fall $m = 1$ (Vektor-Riccati-Differentialgleichung VRG).

QLS als Vektor-Riccati-Differentialgleichungen

Für $m = 1$ geht die MRG (2.62) in die VRG

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{p}(t) + \mathbf{p}(t)\mathbf{s}^T\mathbf{p}(t) \quad ; \quad \mathbf{p}(t_0) = \mathbf{p}_0 \quad (2.66)$$

über. Aus den Gln. (2.63) und (2.64) werden

$$\dot{v}(t) = -\mathbf{s}^T\mathbf{w}(t) \quad ; \quad v(t_0) = v_0 \quad (2.67)$$

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{w}(t) \quad ; \quad \mathbf{w}(t_0) = \mathbf{w}_0 \quad . \quad (2.68)$$

Damit folgt

$$\mathbf{w}(t) = e^{\mathbf{C}t}\mathbf{w}_0 \quad (2.69)$$

$$v(t) = -\mathbf{s}^T \int_0^t e^{\mathbf{C}\tau} d\tau \mathbf{w}_0 + v_0 \quad (2.70)$$

³In der Systemtheorie interessiert meistens der Sonderfall: $n = m$ und $\mathbf{D} = \mathbf{C}^T$.

sowie die Lösung der VRG

$$\mathbf{p}(t) = \frac{e^{Ct} \mathbf{p}_0}{1 - \mathbf{s}^T \int_0^t e^{C\tau} d\tau \mathbf{p}_0} . \quad (2.71)$$

Handelt es sich bei C um eine nichtsinguläre Matrix, dann folgt aus Gl. (2.71)

$$\mathbf{p}(t) = \frac{e^{Ct} \mathbf{p}_0}{1 + \mathbf{s}^T C^{-1} (\mathbf{I}_n - e^{Ct}) \mathbf{p}_0} . \quad (2.72)$$

Betrachtet man die VRG (2.66) genauer und schreibt den nichtlinearen Term komponentenweise mit

$$\mathbf{p}(t) \mathbf{s}^T \mathbf{p}(t) = \begin{bmatrix} s_1 p_1^2 + s_2 p_1 p_2 + \dots + s_n p_1 p_n \\ s_1 p_2 p_1 + s_2 p_2^2 + \dots + s_n p_2 p_n \\ \vdots \\ s_1 p_n p_1 + s_2 p_2 p_n + \dots + s_n p_n^2 \end{bmatrix} \quad (2.73)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{s}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{s}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T & & \mathbf{s}^T \end{bmatrix} \mathbf{p}(t) \otimes \mathbf{p}(t) , \quad (2.74)$$

so ergibt sich tatsächlich ein QLS mit einer speziellen Struktur. Damit kann der folgende Satz formuliert werden:

Satz 2.5 :

Eine autonome quadratische Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T(t) \mathbf{Q}_i \mathbf{x}(t) \quad (2.75)$$

mit

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{q}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{q}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \dots & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & \dots & \mathbf{0}^T & & \mathbf{q}^T \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\mathbf{Q}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{0}^T \\ \mathbf{q}^T \\ \mathbf{0}^T \\ \vdots \\ \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \leftarrow i\text{-te Zeile} ; \mathbf{0}, \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$$

besitzt die allgemeine Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0}{1 - \mathbf{q}^T \int_0^t e^{\mathbf{A}_1 \tau} d\tau \mathbf{x}_0} \quad (2.76)$$

bzw. bei nichtsingulärer Matrix \mathbf{A}_1

$$\mathbf{x}(t) = \frac{e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0}{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{I}_n - e^{\mathbf{A}_1 t}) \mathbf{x}_0} \quad (2.77)$$

□

Bemerkenswert ist hier wieder die „Ähnlichkeit“ zwischen den Lösungen nach Gl. (2.77) und nach Gl. (2.59), also dem skalaren und dem vektoriellen Fall. Liegt das QLS nicht direkt in der speziellen Form von Satz 2.5 vor, so kann versucht werden, eine Transformation zu finden, die das System in diese Form überführt.

QLS als Matrix-Riccati-Differentialgleichungen

Schreibt man die MRG (2.62) komponentenweise, dann ist unmittelbar zu erkennen, daß jede Komponente \dot{p}_{ij} ($i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$) der Matrix $\dot{\mathbf{P}}(t)$ ein skalares QLS darstellt. Demzufolge kann die MRG durch Aufstapeln der Komponenten p_{ij} in einem Vektor \mathbf{x} der Dimension nm in ein Vektor-QLS umgewandelt werden.

Frayman (1974) leitete zwar eine spezielle Struktur der Matrizen $\{\mathbf{Q}_i\}$ und \mathbf{A}_1 her, bei der das QLS nach Gl. (2.27) einer MRG entspricht. Das Ergebnis ist allerdings nur von theoretischer Bedeutung, da für die MRG keine allgemeinen analytischen Lösungen existieren, so daß man dabei auf eine numerische Lösung angewiesen ist (vgl. z. B. Davison und Maki 1973, Choi und Laub 1990 u. a.). Deshalb wird dieser Ansatz an dieser Stelle nicht weiterverfolgt.

3 Volterra-Reihendarstellung

Im Rahmen der Funktionaltheorie ist es möglich, eine geschlossene mathematische Darstellung in der Form eines Funktionals zur Abbildung des Eingangssignals in ein Ausgangssignal für eine große Klasse NLS anzugeben. Besonders geeignet ist die *Volterra-Reihendarstellung*, die für QLS nach Gl. (2.1) unter hier nicht diskutierten Voraussetzungen (Isidori 1989, Nijmeijer und van der Schaft 1990) angegeben werden kann zu

$$y(t) = g_0(t) + \sum_{i=0}^{\infty} \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{i-1}} g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) u(\tau_1) \dots u(\tau_i) d\tau_i \dots d\tau_1 \quad (3.1)$$

Die $g_i(\cdot)$ werden die Kerne der Volterra-Darstellung (auch Volterra-Kerne) genannt und können als Verallgemeinerung der für lineare Systeme (LS) definierten Gewichtsfunktion angesehen werden. Es gibt aber auch nichtlineare Systeme und damit auch – weiter unten noch diskutierte – spezielle, für die Anwendung sehr wichtige QLS, die durch endliche Volterra-Reihen exakt beschrieben werden. Hier verschwinden alle Kerne g_i mit $i > \nu$ (und ggf. auch für $i < \nu$) identisch Null. Außerdem existieren unterschiedliche, aber gleichwertige Kerndarstellungen für Gl. (3.1), die in Rugh (1981) und Schwarz (1991) ausführlich angegeben sind.

Die Volterra-Kerne – insbesondere die regulären– bilden die Grundlage für die Ableitung von Korrelationsverfahren (Dorißen 1990). Schetzen (1980) u. a. verwenden die Volterra-Reihendarstellung zur Identifikation und entwickelten Algorithmen zur Schätzung der Volterra-Kerne. Ferner kann diese Darstellung zur Herleitung zeitdiskreter Ersatzsysteme für QLS benutzt werden (vgl. Dorißen 1991 und Ingenbleek 1991).

Die Bestimmung der Volterra-Kerne wird in Schwarz (1991) für BLS über den Weg der stückweisen Integration der Zustands-Differentialgleichung vorgenommen. Dieser Weg kann für QLS i. allg. nicht eingeschlagen werden, da er komplizierte und unüberschaubare Ausdrücke für die Volterra-Reihendarstellung liefert. In dieser Arbeit wird ein Verfahren vorgestellt, das eine relativ einfache Berechnungsformel bietet, die direkt ausgewertet werden kann. Sie liefert die Volterra-Kerne, die dann in Gl. (3.1) eingesetzt werden, um die Volterra-Darstellung für die betrachteten Systeme zu erhalten.

Kern des Verfahrens ist der Satz

Satz 3.1 : (Isidori 1989)

Wenn

- i) $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ und $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ in Gl. (1.1) analytische Vektorfelder sind und
- ii) $\max |u(\tau)| < 1$; $0 \leq \tau \leq T$ mit T hinreichend klein,

dann hat das QLS nach Gl. (2.1) eine Volterra-Reihendarstellung nach Gl. (3.1) mit den Volterra-Kernen

$$\begin{aligned}
g_0(t) &= \mathbf{c}^T \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} , \\
g_1(t, \tau_1) &= L_{P_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\
g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= L_{P_{\tau_2}} L_{P_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} \\
&\vdots \\
g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= L_{P_{\tau_i}} \dots L_{P_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Hierbei gilt:

$$P_t(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi_{-t}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b} \circ \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi_{-t}^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})) \tag{3.3}$$

$$L_{P_{\tau_i}}(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{x}} P_{\tau_i}(\mathbf{x}) . \tag{3.4}$$

□

Wesentliche Voraussetzung dazu ist die Kenntnis des Flusses $\Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$:

Definition 3.1 : (Isidori 1989)

Mit dem *Fluß* $\Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ eines Vektorfeldes $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ wird die glatte Funktion von t und \mathbf{x} bezeichnet, welche die Eigenschaft hat, daß $\mathbf{x}(t) = \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}_0)$ die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) \tag{3.5}$$

löst. Die Abbildung $\Phi_t^{\mathbf{a}}: \mathbf{x} \mapsto \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ ist somit für alle \mathbf{x} aus einer Umgebung \mathcal{U}_0 von \mathbf{x}_0 definiert.

□

3.1 Berechnung des Flusses

Aus Definition 3.1 folgt unmittelbar, daß die Ermittlung des Flusses konkret in folgenden Schritten durchzuführen ist (Jelali 1994):

1. Lösen der Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{a}(\mathbf{x}(t)) \tag{3.6}$$

zunächst allgemein. Daraus ergibt sich

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t, C_i) \tag{3.7}$$

als Funktion der Zeit t und der Integrationskonstanten C_i .

2. Eliminieren der Integrationskonstanten C_i durch Einsetzen der Anfangsbedingung $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ in Gl. (3.7). Es folgt die gesuchte Lösung

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_0) \quad . \quad (3.8)$$

3. Festlegen des Flusses durch

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}(t) \quad \text{bzw.} \quad \Phi_t^a(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \quad . \quad (3.9)$$

Nach den Ausführungen in Abschnitt 2 kann der Fluß für die jeweiligen betrachteten Strukturen berechnet werden. Eine Zusammenstellung gibt Tabelle 3.1.

Drift-Term $\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Fluß $\Phi_t^a(\mathbf{x}_0)$
$\mathbf{A}_1 \mathbf{x}$	$e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0$
$a_2 x^2$	$\frac{x_0}{1 - a_2 x_0 t}$
$\mathbf{A}_2 \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}^T \mathbf{Q}_i \mathbf{x}$	$\left[\mathbf{I}_n - \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{e}_i \mathbf{x}_0^T \mathbf{Q}_i \right) t \right]^{-1} \mathbf{x}_0$
$\mathbf{A}_1 \mathbf{x} + L(\mathbf{x}) \mathbf{A}_1 \mathbf{x}$	$e^{\mathbf{A}_1 \gamma(t)} \mathbf{x}_0 \quad ; \quad \int_0^\gamma \frac{d\beta}{1 + L(e^{\mathbf{A}_1 \beta} \mathbf{x}_0)} = t$
$a_1 x + a_2 x^2$	$\frac{a_1 x_0}{(a_1 + a_2 x_0) e^{-a_1 t} - a_2 x_0}$
$\text{diag}\{\mathbf{A}_1\} \mathbf{x} + \mathbf{A}_2^\square \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$	$\Phi_{t,i}^a(x_{0i}) = \frac{a_{1,ii} x_{0i}}{(a_{1,ii} + a_{2,ii} x_{0i}) e^{-a_{1,ii} t} - a_{2,ii} x_{0i}} \quad ; \quad i = 1, \dots, n$
Gl. (2.75), \mathbf{A}_1 nichtsingulär	$\frac{e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0}{1 + \mathbf{q}^T \mathbf{A}_1^{-1} (\mathbf{I}_n - e^{\mathbf{A}_1 t}) \mathbf{x}_0}$

Tabelle 3.1: Fluß einiger QLS mit speziellen Strukturen

3.2 Berechnung der Volterra-Kerne

Um zu zeigen, wie schnell und einfach dieses Verfahren ist, wird Gl. (3.2) zunächst für LS und BLS ausgewertet.

Lineare und bilineare Systeme

Für die LS ergibt sich mit $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A} \mathbf{x}$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}$ sowie den Gln. (3.2) und (3.3)

$$\Phi_t^a(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A} t} \mathbf{b} \quad ,$$

und damit

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A} t} \mathbf{x}_0 \\ g_1(t, \tau_1) &= L_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{b} \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= L_{\mathbf{P}_{\tau_i}} \dots L_{\mathbf{P}_{\tau_1}} \mathbf{c}^T \Phi_t^a(\mathbf{x}_0) = 0 \quad ; \quad i \geq 2 \quad . \end{aligned}$$

Dies ist das bekannte Ergebnis, was besagt, daß sich LS exakt durch den Volterra-Kern 1. Ordnung (Gewichtsfunktion) darstellen lassen. Analog folgt für BLS mit $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{b}$ und den Gln. (3.2) und (3.3)

$$\Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}t}(\mathbf{N}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x} + \mathbf{b}) \quad .$$

Hieraus ergibt sich

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}\tau_1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{b} \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}\tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{b} \\ &\vdots \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{N} \dots \mathbf{N} e^{\mathbf{A}\tau_i} \mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{N} \dots \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_{i-1}-\tau_i)} \mathbf{b} \\ &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_j-\tau_{j+1})} \right] \mathbf{N} e^{\mathbf{A}\tau_i} \mathbf{x}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}(t-\tau_1)} \left[\prod_{j=1}^{i-1} \mathbf{N} e^{\mathbf{A}(\tau_j-\tau_{j+1})} \right] \mathbf{b} \quad , \end{aligned}$$

was mit den Ausdrücken für die Volterra-Kerne übereinstimmt, die in Schwarz (1991) und Dorißen (1991) zu finden sind.

QLS mit linearem Drift-Term

Bevor die Volterra-Kerne für QLS bestimmt werden, sei diese wichtige Definition angegeben:

Definition 3.2 : (Schwarz 1987)

Unter *homogenen* nichtlinearen Systemen – und hier auch speziell den QLS – *vom Grade ν* versteht man Systeme, bei denen in der Volterra-Reihendarstellung des Ein-/Ausgangsverhaltens

$$y(t) = g_0(t) + \int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{\nu-1}} g_{\nu}(t, \tau_1, \dots, \tau_{\nu}) u(\tau_1) \dots u(\tau_{\nu}) d\tau_{\nu} \dots d\tau_1 \quad (3.10)$$

alle Glieder außer dem ν -ten identisch Null verschwinden. Für die Kerne eines homogenen Systems der Ordnung ν bedeutet dies:

$$g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = \begin{cases} \neq 0, & i = \nu, \\ 0, & \forall i \neq \nu, \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots \quad . \quad (3.11)$$

□

Für die QLS₁ ergibt sich mit $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}$, $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_2 \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0$ und den Gln. (3.2) und (3.3)

$$\Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x} \quad ; \quad \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) = e^{-\mathbf{A}_1 t} (\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 t} \otimes e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x} + \mathbf{b}_0) \quad . \quad (3.12)$$

Dafür ist der Zwischenschritt gemäß Gl. (A.5)

$$(e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}) \otimes (e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}) = e^{\mathbf{A}_1 t} \otimes e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x} \otimes \mathbf{x}$$

notwendig. Es folgt nun

$$g_0(t) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1 t} \mathbf{x}_0 \quad (3.13)$$

$$g_1(t, \tau_1) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \left[\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^0 \Big|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_0 \right] \quad (3.14)$$

$$g_2(t, \tau_1, \tau_2) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \left[\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^1 \Big|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \right] \times \\ \times e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \left[\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^0 \Big|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_0 \right] \quad (3.15)$$

$$g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) = \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \left\{ \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \otimes \left[e^{-\mathbf{A}_1} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^0 \Big|_{\mathbf{x}_0} \right] + \right. \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^1 \Big|_{\mathbf{x}_0} e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^1 \Big|_{\mathbf{x}_0} + \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \mathbf{I}_n \otimes \left[e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{x}_0 \right] + \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^1 \Big|_{\mathbf{x}_0} e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} + \\ + \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \mathbf{I}_n \otimes \left[e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{b}_0 \right] + \\ \left. + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1(\tau_1-\tau_1)} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^1 \Big|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \right\} \times \\ \times e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \left[\mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathcal{K}_{\otimes}^0 \Big|_{\mathbf{x}_0} + \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{x}_0 + \mathbf{b}_0 \right] \quad (3.16)$$

⋮

$$g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} g_{i-1}(t, \tau_1, \dots, \tau_{i-1}) \Big|_{\mathbf{x}_0} \mathbf{P}_{\tau_i} \quad . \quad (3.17)$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_{\otimes}^0 &= \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n^2} \\ \mathcal{K}_{\otimes}^1 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{K}_{\otimes}^0 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n} \\ \mathcal{K}_{\otimes}^2 &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{K}_{\otimes}^1 = \text{const.} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathcal{K}_{\otimes}^2 \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2} \quad . \end{aligned} \quad (3.18)$$

Für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ kann notiert werden:

$$\begin{aligned} g_0(t) &= 0 \\ g_1(t, \tau_1) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \mathbf{b}_0 \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{b}_0 \\ g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \mathbf{B}_2 e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \otimes e^{\mathbf{A}_1 \tau_1} \mathcal{K}_{\otimes}^2 \mathbf{I}_n \otimes \left[e^{-\mathbf{A}_1 \tau_2} \mathbf{b}_0 \right] e^{-\mathbf{A}_1 \tau_3} \mathbf{b}_0 + \\ &\quad + \mathbf{c}^T e^{\mathbf{A}_1(t-\tau_1)} \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1(\tau_1-\tau_2)} \mathbf{B}_1 e^{\mathbf{A}_1(\tau_2-\tau_3)} \mathbf{b}_0 \\ &\quad \vdots \quad . \end{aligned}$$

Die Berechnung der Volterra-Kerne höherer Ordnungen kann schematisch anhand Gl. (3.2) beliebig fortgesetzt werden. Die Ausdrücke werden allerdings immer unübersichtlicher. Deshalb ist es sinnvoll, die Untersuchung auf homogene QLS niedriger Ordnung zu beschränken. Dies wird bei der Berechnung zeitdiskreter Ersatzsysteme noch deutlicher und dringender, um die Übersichtlichkeit der theoretischen Untersuchungen zu bewahren und den Rechenaufwand in Grenzen zu halten. Dies bedeutet bei der Anwendung die Vernachlässigung der Volterra-Kerne höherer Ordnungen, deren Zulässigkeit im Einzelfall anhand der Simulation zu prüfen ist.

Beispiel 3.1 :

Für das QLS nach Gl. (2.5) mit den Systemmatrizen

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1 &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{b}_0^T &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{c}^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ergibt sich mit Gl. (3.12):

$$\begin{aligned} \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t}x_1 \\ e^{-t}x_2 \end{bmatrix} \\ \mathbf{P}_t(\mathbf{x}) &= \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t}x_1 + e^{-2t}x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t \\ x_1 + e^{-t}x_2^2 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Damit lassen sich die Volterra-Kerne mit Hilfe der Gl. (3.17) folgendermaßen bestimmen:

$$\begin{aligned} g_0(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \Phi_t^{\mathbf{a}}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} = e^{-t}x_2|_{\mathbf{x}_0} = e^{-t} \\ g_1(t, \tau_1) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(e^{-t}x_2) \mathbf{P}_{\tau_1}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} = e^{-t}x_1 + e^{-(t+\tau_1)}x_2^2|_{\mathbf{x}_0} = e^{-(t+\tau_1)} \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(e^{-t}x_1 + e^{-(t+\tau_1)}x_2^2) \mathbf{P}_{\tau_2}(\mathbf{x})|_{\mathbf{x}_0} = e^{-(t-\tau_2)} + 2e^{-(t+\tau_1+\tau_2)} \\ g_3(t, \tau_1, \tau_2, \tau_3) &= 2e^{-(t+\tau_1-\tau_3)} + 6e^{-(t+\tau_1+\tau_2+\tau_3)} . \end{aligned}$$

Für einen Anfangszustandsvektor $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} g_0(t) &= 0 \\ g_1(t, \tau_1) &= 0 \\ g_2(t, \tau_1, \tau_2) &= e^{-(t-\tau_2)} \\ g_i(t, \tau_1, \dots, \tau_i) &= 0 \quad \forall i > 2 . \end{aligned}$$

Das betrachtete QLS ist damit für $\mathbf{x}_0 = \mathbf{0}$ ein homogenes System vom Grade 2, dessen Klemmenübertragungsverhalten durch

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} g_2(t, \tau_1, \tau_2) u(\tau_1) u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \\ &= \int_0^t \int_0^{\tau_1} e^{-(t-\tau_2)} u(\tau_1) u(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 \end{aligned}$$

beschrieben wird. Die Systemantwort auf $u(t) = 1(t)$ lautet:

$$y(t) = (e^{-1} - e^{-t} + te^{-t}) 1(t) \quad .$$

□

QLS mit quadratischem Drift-Term

Zur Berechnung des Flusses für QLS mit einem quadratischen Drift-Term $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)$ muß zunächst die Differentialgleichung

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \quad ; \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (3.19)$$

gelöst werden. Wie bereits erwähnt, gibt es hierfür keine allgemeine Lösung, so daß die Volterra-Kerne nicht explizit angegeben werden können. Dies kann jedoch für die speziellen Strukturen von Abschnitt 2.3 und 2.4 mit Hilfe der in Tabelle 3.1 angegebenen Ausdrücke für den Fluß völlig analog zu der Vorgehensweise bei den QLS₁ geschehen.

4 QLS-Approximation nichtlinearer Systeme

Die der Systemtheorie zugrundeliegenden Modelle können grundsätzlich auf zwei Wegen gewonnen werden:

- *Experimentelle Systemanalyse (Identifikation):*

Hier wird der technische Prozeß als *schwarzer Kasten* aufgefaßt und durch geeignete Testsignale erregt. Das dynamische Verhalten des Systems kann dann durch Anpassung der Meßdaten an ein vorgegebenes Modell approximiert werden. Dazu wurden in den letzten Jahren ingenieurmäßige Verfahren entwickelt, die auf der Parameterschätzung basieren (z. B. Beater 1987, Dorißen 1990). Die meisten dieser Verfahren benutzen allerdings bilineare Modelle als Näherung für das nichtlineare dynamische Verhalten technischer Systeme. In einer neueren Arbeit von Yin (1994) werden Identifikationsverfahren vorgeschlagen, die es auch gestatten könnten, technische Systeme durch spezielle quadratische Modelle zu approximieren. Einige Probleme bezüglich der Konvergenz und der Startparameter müssen allerdings zuvor gelöst werden.

- *Theoretische Systemanalyse:*

Durch Aufstellen geeigneter *Bilanzgleichungen* (z. B. Bilanzierungen für Kräfte, Momente, allgemeine Erhaltungssätze für Masse, Energie, Impuls, usw.) wird ein mathematisches, häufig nichtlineares Modell des Prozesses abgeleitet. Man wird auf Zustandsmodelle der Form

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{X}(t), U(t)) \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{X}(t_0) \quad ; \quad \mathbf{X}(t) \in \mathbb{R}^n \quad (4.1)$$

geführt. Es müssen dann entsprechende Vereinfachungen der exakten Zusammenhänge vorgenommen werden.

4.1 Taylorreihenentwicklung

Ein nützliches mathematisches Werkzeug dazu ist die Taylorreihenentwicklung um einen Arbeitspunkt \mathbf{x}_0 der Zustandsvariablen und u_0 der Eingangsgröße, mit deren Hilfe lineare, bilineare, aber auch zustandsquadratische Modelle hergeleitet werden können. Liegt eine nichtlineare Systembeschreibung der Form von Gl. (4.1) vor, dann kann ein quadratisches Modell abgeleitet werden, indem die *Taylorreihenentwicklung* von Gl. (4.1) nach dem dritten Glied (ohne quadratische Terme in u) abgebrochen wird:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) & (4.2) \\ &\simeq \mathbf{f}(\mathbf{x}_0, u_0) + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)}{\partial U} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} (u - u_0)}_{\text{lineare Terme}} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}_{\text{rein quadratischer Term}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \underbrace{\frac{\partial^2 \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)}{\partial \mathbf{X} \partial U} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(u - u_0)}_{\text{bilinearer Term}} + \\
& + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^3 \mathbf{f}(\mathbf{X}, U)}{\partial \mathbf{X}^2 \partial U} \Big|_{\mathbf{x}_0, u_0} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \otimes (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)(u - u_0)}_{\text{Term 3. Ordnung}} . \tag{4.3}
\end{aligned}$$

Hierbei werden die über den gesamten Arbeitsbereich definierten Größen mit Großbuchstaben und die lokal gültigen mit Kleinbuchstaben gekennzeichnet. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \mathbf{X}(t) - \mathbf{x}_0 \\
u(t) &= U(t) - u_0 .
\end{aligned}$$

Durch eine Koordinatentransformation der Art $\mathbf{z} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_0$ bzw. $v = u - u_0$ kann Gl. (4.3) in eine Form gebracht werden, in der die Terme einer Zustandsquadratischen Näherung unmittelbar zu erkennen sind.

Anmerkung:

Gl. (4.3) gilt nur für hinreichend oft differenzierbare (glatte) Vektorfelder $\mathbf{f}(\mathbf{X}, U)$. Deshalb können unstetige Nichtlinearitäten wie Lose, tote Zone usw. prinzipiell nicht exakt durch ein QLS beschrieben werden. Für solche Kennlinien kann man aber eine hinreichend genaue Approximation durch Polynome höherer Ordnungen erreichen.

4.2 Kombination linearer Modelle

Hier erfolgt die Behandlung einer Methode zur Gewinnung quadratischer Modelle, die von Frelek (1985) vorgeschlagen wurde. Gegeben seien zwei Arbeitspunkte (\mathbf{x}_{01}, u_0) und (\mathbf{x}_{02}, u_0) , in deren Umgebungen die linearen Modelle

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}_1(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{01}) + \mathbf{b}(u(t) - u_0) \tag{4.4}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{J}_2(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{02}) + \mathbf{b}(u(t) - u_0) \tag{4.5}$$

gelten. \mathbf{J}_i bezeichnet die Jacobi-Matrix des jeweiligen Modells. Diese Modelle können entweder analytisch durch die Taylor-Linearisierung oder anhand von Identifikationsverfahren für lineare Systeme, die gut erforscht sind, gewonnen worden sein.

Gesucht wird ein QLS der Form

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{Q}(\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{01}) \otimes (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{02}) + \mathbf{b}(u(t) - u_0) , \tag{4.6}$$

das das betrachtete NLS approximiert und das Verhalten der linearen Modelle in den jeweiligen Arbeitspunkten exakt wiedergibt:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_{01}} = \mathbf{J}_1 \quad , \quad \mathbf{J}_{\mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_{02}} = \mathbf{J}_2 . \tag{4.7}$$

Mit

$$\mathbf{J}_x = \mathbf{Q}[\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{02}) + (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_{01}) \otimes \mathbf{I}_n] \quad (4.8)$$

folgt das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}\mathbf{Y}_{12} &= \mathbf{J}_{12} ; \\ \mathbf{Y}_{12} &= \left[\mathbf{I}_n \otimes (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}) \quad (\mathbf{x}_{02} - \mathbf{x}_{01}) \otimes \mathbf{I}_n \right] , \quad \mathbf{J}_{12} = \left[\mathbf{J}_1 \quad \mathbf{J}_2 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

zur Bestimmung der unbekanntenen Matrix $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n^2}$. Da $\mathbf{Y}_{12} \in \mathbb{R}^{n^2 \times 2n}$ eine rechteckige⁴ konstante Matrix darstellt, ist deren Inverse nicht eindeutig. Einen Ausweg stellt die verallgemeinerte Inverse⁵ nach Barnett (1971) –auch Pseudo-Inverse genannt– dar, die lautet (Frelek 1985)

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{12}^\dagger &= \frac{1}{(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})} \left[\frac{(\mathbf{I}_n - 0,5\mathbf{Z}_{12}) \otimes (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T}{-(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T \otimes (\mathbf{I}_n - 0,5\mathbf{Z}_{12})} \right] ; \\ \mathbf{Z}_{12} &= \frac{(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T}{(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})} . \end{aligned} \quad (4.10)$$

Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Auflösbarkeit von Gl. (4.9) unter Verwendung von \mathbf{Y}_{12}^\dagger ist (Barnett 1971)

$$\mathbf{J}_{12}(\mathbf{I}_{n,2n} - \mathbf{Y}_{12}^\dagger \mathbf{Y}_{12}) = \mathbf{0} , \quad (4.11)$$

was durch Einsetzen von Gl. (4.10) zu

$$(\mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2)(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02}) = \mathbf{0} \quad (4.12)$$

vereinfacht werden kann.

Unter der Voraussetzung, daß die beiden linearen Modelle der Bedingung nach Gl. (4.12) genügen, läßt sich die gesuchte Matrix \mathbf{Q} aus

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 \quad (4.13)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \frac{1}{(\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})} \left[\mathbf{J}_1 \otimes (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T - (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T \otimes \mathbf{J}_2 - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\mathbf{J}_1 - \mathbf{J}_2}{2} \mathbf{Z}_{12} \otimes (\mathbf{x}_{01} - \mathbf{x}_{02})^T \right] \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{W}(\mathbf{I}_n - \mathbf{Z}_{12}) \otimes (\mathbf{I}_n - \mathbf{Z}_{12}) \quad (4.15)$$

bestimmen. Dabei ist \mathbf{W} eine prinzipiell willkürliche Matrix mit derselben Dimension wie die Matrix \mathbf{Q} , die auch zu Null gesetzt werden kann. Frelek (1985) schlägt vor, \mathbf{W} durch die Kenntnis von regulären Punkten, z. B. aus Messungen, festzulegen, um in der Praxis eine höhere Genauigkeit des Modells zu erzielen.

⁴„Rechteckig“ bedeutet hier „nicht quadratisch“.

⁵Das Gleichungssystem (4.9) wird also im Sinne eines kleinsten quadratischen Fehlers gelöst.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Die vorliegende Arbeit⁶ befaßt sich mit der Modellierung nichtlinearer Prozesse durch quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS). Die gewählte Vorgehensweise sowie die wesentlichen Ergebnisse lassen sich dabei wie folgt zusammenfassen:

- Ausgangspunkt der Arbeit sind die in Abschnitt 2 eingeführten Grundkonzepte und Zustandsdarstellungen der QLS. Diese wurden in Teilklassen eingeteilt. Es ist gelungen, für eine große Anzahl dieser Teilklassen die allgemeinen Lösungen der jeweiligen Eigendynamik-Differentialgleichungen zu finden. U. a. werden die Lösungstechniken der Riccati-Differentialgleichungen ausgenutzt.
- Aufbauend auf diese Ergebnisse können der Fluß und damit auch die Volterra-Kerne für diese Systemklassen explizit berechnet werden. Dazu ist auf eine schematische Vorgehensweise zurückzugreifen. Die Volterra-Kerne wiederum ermöglichen die Darstellung der QLS in Form von Volterra-Reihen, die sich zur Beschreibung des Signalübertragungsverhaltens dieser Systeme gut eignen. In der Praxis sollte man sich auf die Untersuchung von homogenen QLS niedrigen Grades beschränken.
- Schließlich werden in Abschnitt 4 zwei Wege zur Bestimmung von quadratischen Modellen zur Approximation nichtlinearer technischer Systeme angegeben. Diese sind zum einen die bekannte Methode der Taylorreihenentwicklung und zum anderen die Kombination von linearen Modellen. Während die erste Methode ein gegebenes analytisches Modell voraussetzt, kann die zweite auch genutzt werden, wenn zwei lineare Modelle zur Verfügung stehen, die mit Hilfe von Identifikationsverfahren linearer Systeme gewonnen wurden.

Zukünftige Arbeiten können sich einerseits mit der Verifizierung der Methode der Kombination linearer Modelle bezüglich ihrer praktischen Anwendbarkeit beschäftigen. Andererseits wird die Identifikation quadratischer Modelle, z. B. mit Hilfe der in Yin (1994) entwickelten Identifikationsverfahren, ein Schwerpunkt der nächsten Untersuchungen sein. Die praktische Anwendung soll sich auf einen im Labor des Fachgebietes vorhandenen elektro-hydraulischen Translationsantrieb beziehen. Dies soll ein aufbereitender Schritt zur Implementierung von QLS-Beobachtern und -Filtern für diesen Antrieb sein.

⁶Die Arbeit entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes „Zustands- und Parameterschätzung bei analytischen Systemen mit linearer Steuerung“.

6 Literaturverzeichnis

- Barnett, S.** 1971. *Matrices in Control Theory*. London: Van Nostrand Reinhold Company.
- Beater, P.** 1987. *Zur Regelung nichtlinearer Systeme mit Hilfe bilinearer Modelle*. Diss. Universität -GH- Duisburg. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 143. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Bestle, D. und M. Zeitz.** 1983. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *International Journal of Control* 38, 419-431.
- Brewer, J. W.** 1978. Kronecker products and matrix calculus in system theory. *IEEE Transactions on Circuit Systems* CAS-25. 772-781.
- Bronstein, I. N. und K. A. Semendjajew.** 1987. *Taschenbuch der Mathematik*. Leipzig: Teubner Verlagsgesellschaft.
- Choi, C. H. und A. J. Laub.** 1990. Efficient matrix-valued algorithms for solving stiff Riccati differential equations. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-35. 770-776.
- Collatz, L.** 1973. *Differentialgleichungen*. Stuttgart: Teubner.
- Davison, E. J. und M. C. Maki.** 1973. The numerical solution of the matrix Riccati differential equation. *IEEE Transactions on Automatic Control* AC-18. 71-73.
- Dorißen, H. T.** 1990. *Zur Minimalrealisierung und Identifikation bilinearer Systeme durch Markovparameter*. Diss. Universität -GH- Duisburg. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 221. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Dorißen, H. T.** 1991. *Statistische Ausgangssignalanalyse bilinearer Systeme und Anwendungen*. Forschungsbericht 7/91 MSRT. Universität -GH- Duisburg.
- Frayman, M.** 1974. *Quadratic Differential Systems: A Study in Nonlinear Systems Theory*. Ph. D. Thesis. University of Maryland. College Park, Maryland.
- Frelek, B.** 1985. Über die quadratische Näherung zur Beschreibung nichtlinearer dynamischer Systeme. *Automatisierungstechnik* at 33. 184-189.
- Gerber, P. D.** 1972. Left alternative algebras and quadratic differential equations I. *IBM Research Report RC 4011*.
- Ingenbleek, R.** 1991. *Zustandsbeobachter und Schätzfilter für eine Klasse analytisch linearer Systeme*. Forschungsbericht 14/91 MSRT. Universität -GH- Duisburg.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin u. a.: Springer.

- Jelali, M.** 1993a. *Beobachter und Filter für im Zustand quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Diplomarbeit MSRT. Universität -GH- Duisburg.
- Jelali, M.** 1993b. *Zur Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 11/93 MSRT. Universität -GH- Duisburg.
- Jelali, M.** 1994. *Zur Berechnung des Flusses eines Vektorfeldes*. Forschungsnotiz MSRT (unveröffentlicht). Universität -GH- Duisburg.
- Kamke, E.** 1977. *Differentialgleichungen - Lösungsmethoden und Lösungen*. Stuttgart: Teubner.
- Kang, W. und A. J. Krener.** 1991. Observation of a rigid body from measurement of a principal axis. *Journal of Mathematical Systems, Estimation and Control* 2. 197-207.
- Keller, H.** 1986. Entwurf nichtlinearer, zeitinvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. *Automatisierungstechnik* at 34. 271-274 und 326-331.
- Markus, L.** 1960. Quadratic differential equations and non-associative algebras. *Cont. to the Theory of Nonlinear Osc.* Vol. V. Princeton: Princeton University Press.
- Nijmeijer, H. und A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. New York u. a.: Springer.
- Reid, W. T.** 1972. *Riccati Differential Equations*. New York, London: Academic Press.
- Rugh, W. J.** 1981. *Nonlinear System Theory: The Volterra/Wiener Approach*. Baltimore, London: The Johns Hopkins University Press.
- Schetzen, M.** 1980. *The Volterra and Wiener Theory of Nonlinear Systems*. New York u. a.: John Wiley.
- Schwarz, H.** 1987. Homogene bilineare Systeme. *Automatisierungstechnik* at 35. 262-269.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme*. München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1993. *Quadratische Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht 12/93. MSRT. Universität - GH - Duisburg.
- Verhulst, F.** 1990. *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*. Berlin u. a.: Springer.
- Yang, K. und X. Bao.** 1986. *Matrix Analysis* (in chinesisich). Harbin/China: HIT Verlag.

-
- Yin, X.** 1994. Zur Identifikation zeitkontinuierlicher nichtlinearer Systeme. Diss. Universität -GH- Duisburg. VDI Fortschrittsberichte Reihe 8, Nr. 385. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Zeitz, M.** 1987. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 9. 149-156.

A Rechenregeln zum Kronecker-Produkt

Zur Berechnung der Voltterra-Kerne (vgl. Abschnitt 3) werden einige Definitionen und Rechenregeln zum Kronecker-Produkt sowie zur Differentiation von Vektorfeldern und Tensoren benötigt, die im folgenden ohne Beweis aufgeführt werden. Hierzu sei auf Brewer (1978) sowie Yang und Bao (1986) verwiesen.

Definition A.1 :

- a) Unter dem Kronecker-Produkt $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ zweier Matrizen $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ und $\mathbf{B} = [b_{kl}]$ der Dimension $m \times n$ bzw. $p \times q$ wird die Matrix

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \triangleq \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{mp \times nq} \quad (\text{A.1})$$

verstanden.

- b) Für zwei Vektoren $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = [a_1\mathbf{b}^T, a_2\mathbf{b}^T, \dots, a_m\mathbf{b}^T]^T \in \mathbb{R}^{mn} \quad (\text{A.2})$$

□

Satz A.1 :

Gegeben seien die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{r \times s}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{k \times h}$.

- a) Für $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\lambda(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = (\lambda\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\lambda\mathbf{B}) \quad (\text{A.3})$$

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T \quad (\text{A.4})$$

- b) Für $n = r$ und $q = k$ gilt:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{AC}) \otimes (\mathbf{BD}) \quad (\text{A.5})$$

- c) Für $nq = rk$ gilt das Assoziativgesetz

$$\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \quad (\text{A.6})$$

- d) Für $p = m$ und $q = n$ gelten die Distributivgesetze

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{C} \otimes (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \mathbf{C} \otimes \mathbf{A} + \mathbf{C} \otimes \mathbf{B} \quad (\text{A.8})$$

und damit auch:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes (\mathbf{C} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{D} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{D} \quad (\text{A.9})$$

e) Falls $m = n$, $p = q$ und \mathbf{A}^{-1} , \mathbf{B}^{-1} existieren, dann gilt:

$$(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1} \quad , \quad (\text{A.10})$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{B}^{-1}) &= (\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}) \otimes (\mathbf{B}\mathbf{B}^{-1}) \\ &= \mathbf{I}_n \otimes \mathbf{I}_p = \mathbf{I}_{np} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

□

Definition A.2 :

Ist $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^m$ ein für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbares Vektorfeld, dann kann die *Jacobi-Matrix* zu $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ gebildet werden mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \dots\dots\dots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_1 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} f_2 & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_m & \frac{\partial}{\partial x_2} f_m & \dots & \frac{\partial}{\partial x_n} f_m \end{bmatrix} \quad . \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

□

Definition A.2 kann für Tensoren in folgender Weise erweitert werden:

Definition A.3 :

Ist $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ein für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbarer Tensor, dann ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{G}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \begin{bmatrix} g_{11}(x_1, \dots, x_n) & g_{12}(x_1, \dots, x_n) & \dots & g_{1l}(x_1, \dots, x_n) \\ g_{21}(x_1, \dots, x_n) & g_{22}(x_1, \dots, x_n) & \dots & g_{2l}(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{m1}(x_1, \dots, x_n) & g_{m2}(x_1, \dots, x_n) & \dots & g_{ml}(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} \\ &\triangleq \left[\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_1} \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_2} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_n} \right] \in \mathbb{R}^{m \times ln} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

$$\text{mit} \quad \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_i} g_{11} & \frac{\partial}{\partial x_i} g_{12} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_i} g_{1l} \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{21} & \frac{\partial}{\partial x_i} g_{22} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_i} g_{2l} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_i} g_{m1} & \frac{\partial}{\partial x_i} g_{m2} & \dots & \frac{\partial}{\partial x_i} g_{ml} \end{bmatrix} \quad .$$

□

Satz A.2 :

Gegeben seien zwei für jedes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ differenzierbare Tensoren $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $\mathbf{H}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$. Es gilt die Differentiationsregel

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}[\mathbf{G}(\mathbf{x})\mathbf{H}(\mathbf{x})] = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{H}) + \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{x}} . \quad (\text{A.14})$$

□

Definition A.4 :

Ist $\mathbf{G}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$ ein für jedes $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ differenzierbares Tensor, dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}\mathbf{G}(\mathbf{X}) \triangleq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^p \mathbf{E}_{ik}^{n \times p} \otimes \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial x_{ik}} \quad (\text{A.15})$$

mit der Elementarmatrix $\mathbf{E}_{ik}^{n \times p} \triangleq \mathbf{e}_i \mathbf{e}_k^T$

und den Einheitsvektoren $\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k$.

$$(\text{A.16})$$

□

Satz A.3 :

Gegeben seien zwei für jedes $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ differenzierbare Tensoren $\mathbf{G}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{m \times l}$, $\mathbf{H}(\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{l \times k}$. Dann gilt die Differentiationsregel

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}}[\mathbf{G}(\mathbf{X})\mathbf{H}(\mathbf{X})] = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}}(\mathbf{I}_p \otimes \mathbf{H}) + (\mathbf{I}_n \otimes \mathbf{H}) \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{X}} . \quad (\text{A.17})$$

□