

# Zur Nulldynamik von ALS mit parallelgeschaltetem LS

Helmut Schwarz

Forschungsbericht Nr. 13/94

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Die Nulldynamik eines analytischen Systems mit linearer Steuerung (ALS) ist invariant gegenüber Rückkopplungen. In diesem Beitrag wird gezeigt, daß sich die Nulldynamik aber durch Parallelschalten eines Systems – vorzugsweise eines linearen Systems (LS) – verändern läßt.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

---

# Inhaltsverzeichnis

Formelzeichen und Bezeichnungen	II
1 Einleitung	1
2 Veränderung der Nulldynamik linearer Systeme durch Parallelkompensation	2
3 Kompensation der Nulldynamik von ALS	5
4 Zusammenfassung und Ausblick	9
5 Literatur	10

# Formelzeichen und Bezeichnungen

## Abkürzungen

AS	Analytisches System
ALS	Analytisches System mit linearem Eingang
BLS	Bilineares System
LS	Lineares System
NLS	Nichtlineares System

## Formelzeichen

$a_{k,i}$	reelle Polynomkoeffizienten
$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Drift Term eines AS
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{b}, \mathbf{B}$	Eingangsmatrix
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	nichtlineare Eingangsmatrix
$b_{k_1, \dots, k_i}$	reelle Polynomkoeffizienten
$\mathbf{c}^T, \mathbf{C}$	Ausgangsmatrix
$C(\lambda)$	charakteristisches Polynom einer Matrix
$c(\mathbf{x})$	nichtlineare Ausgangsfunktion
$\mathbf{c}(\mathbf{x})$	nichtlineare Ausgangsspaltenmatrix
$f(t)$	Zeitfunktion
$\mathbf{F}$	Systemmatrix
$\mathbf{F}(s)$	rationale Übertragungsfunktion
$N(s)$	Nennerpolynom
$N^+(s)$	Hurwitzpolynom: alle Wurzeln sind stabil
$N^-(s)$	Polynom mit nur instabilen Wurzeln
$n$	Grad eines Polynoms, Dimension des Zustandsvektors
$n^+$	Grad eines Hurwitzpolynoms
$Z(s)$	Zählerpolynom
$Z^+(s)$	Hurwitzpolynom
$Z^-(s)$	Polynom mit nur instabilen Wurzeln
$\delta\{\cdot\}$	Grad eines Polynoms

# 1 Einleitung

Für die erfolgreiche Lösung von regelungstechnischen Aufgaben sind die Kenntnisse über die Eigendynamik wie auch über die Nulldynamik der zu regelnden Strecke wesentlich. Ist die Nulldynamik eines Systems instabil – im Falle der linearen Systeme existieren Nullstellen der Überlagerungsfunktion mit positiven Realteilen – ist die erfolgreiche Lösung einer Regelungsaufgabe sehr erschwert: Viele durchaus bewährte Ansätze zur Synthese eines Reglers sind dann nicht anwendbar. Dazu gehören adaptive Regelungsstrukturen (Hahn u. a. 1982), die Methode der exakten Linearisierung, der exakten Folgeregelung, der exakten Entkopplung bei Mehrgrößenregelungssystemen und manches mehr (Isidori 1989, Schwarz 1991).

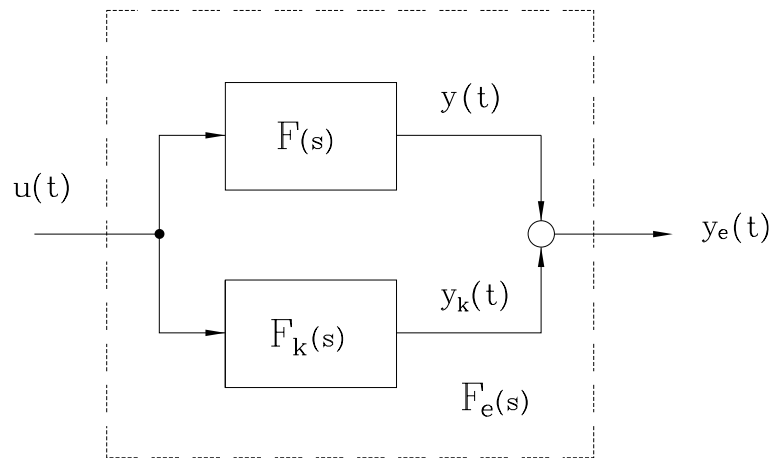
Die entsprechende Problematik wird dadurch erschwert, daß zwar die Eigendynamik eines Systems durch Rückkopplung veränderbar ist (ein wesentlicher Grundsatz der System- und Regelungstheorie), aber die Nulldynamik *invariant* gegenüber Rückführungen ist (Kailath 1980, Schwarz 1992). Um die durch instabile Nulldynamik verursachten Probleme zu umgehen, sind unterschiedliche Vorgehensweisen bekannt geworden. Für die adaptive Regelung linearer Nichtphasenminimumsysteme schlagen (Hahn und Unbehauen 1982) vor, das Zählerpolynom des zu regelnden Systems dadurch zu verändern, daß der Regelstrecke ein lineares Phasenminimumsystem parallel geschaltet wird, so daß das dadurch entstandene Ersatzsystem nur Nullstellen mit negativen Realteilen hat. Das adaptive Regelungssystem wird nun für dieses Ersatzsystem entworfen, und der Gesamtregler besteht dann aus dem parallelgeschalteten Kompensator und dem adaptiven Regelungsgesetz.

Eine andere Vorgehensweise, die für Zustandsregelungen anwendbar ist, schlagen (Benvenuti u. a. 1993) vor. Hier wird für analytische Systeme mit linearer Steuerung (ALS) die nichtlineare algebraische Gleichung, die das Ausgangssignal  $\mathbf{y}(t)$  mit den Systemzuständen verknüpft, in mehreren Teilschritten so modifiziert, daß bezüglich des modifizierten Ausgangs  $\hat{\mathbf{y}}(t)$  das System eine stabile Nulldynamik hat. Instabile Nullstellen des Jacobi-linearisierten Streckenmodells werden dabei eliminiert. Für das modifizierte Streckenmodell wird dann das in Frage stehende Regelungsgesetz entworfen und anschließend auf das ursprüngliche Systemmodell angewendet.

In diesem Forschungsbericht wird dargestellt, daß auch für allgemeine nichtlineare Systeme des Typs ALS durch lineare Parallelkompensatoren sowohl der Differenzengrad verringert als auch die Nulldynamik verändert werden kann. Die hier vorgestellten Ergebnisse stellen dabei eine Verallgemeinerung der von (Hahn u. a. 1982) für lineare Systeme entwickelten Idee dar. In Abschnitt 2 wird als Referenz zunächst knapp der lineare Fall dargestellt und auf die Form von Zustandsmodellen gebracht. Die Darstellung der Nulldynamikveränderung durch lineare Parallelmodelle für ALS wird dann in Abschnitt 3 ausführlicher diskutiert.

## 2 Veränderung der Nulldynamik linearer Systeme durch Parallelkompensation

Wie von (Hahn u. a. 1982) vorgeschlagen und in (Schwarz 1994) knapp zusammengefaßt dargestellt, läßt sich die Nulldynamik eines linearen Systems – also die Lage der Nullstellen in der  $s$ -Ebene – durch Parallelkompensation verändern. In Bild 2.1 ist die hier zu diskutierende Parallelkompensation als Blockschaltbild dargestellt.



**Bild 2.1:** Zur Parallelkompensation eines linearen Systems

Das gegebene System werde durch die Übertragungsfunktion  $F(s)$  und der Kompensator durch  $F_k(s)$  als echt gebrochen rationale Funktion charakterisiert:

$$\left. \begin{aligned} F(s) &= \frac{Z(s)}{N(s)} = \frac{Z^+(s) \cdot Z^-(s)}{N^+(s) \cdot N^-(s)} \quad , \\ \delta\{Z(s)\} &= m = m^+ + m^- \\ \delta\{N(s)\} &= n = n^+ + n^- \quad , \quad m < n \quad , \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

mit

$$\left. \begin{aligned} Z^-(s) &= (s - N_1^-) \dots (s - N_m^-) \quad ; \quad R_e\{N_i^-\} \geq 0 \\ N^-(s) &= (s - P_1^-) \dots (s - P_n^-) \quad ; \quad R_e\{P_i\} \geq 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

sowie:

$$F_k(s) = \frac{Z_k(s)}{N_k(s)} = \frac{Z^+(s)Z_{k_1}(s)}{N^+(s)N_{k_1}(s)} \quad . \quad (2.3)$$

Für das Ersatzsystem  $F_e(s)$  in Bild 2.1 gilt dann:

$$\begin{aligned} F_e(s) &= F(s) + F_k(s) = \frac{Z_e(s)}{N_e(s)} = \frac{Z^+(s) \cdot Z_{e_1}(s)}{N^+(s)N^-(s)N_{k_1}(s)} \\ &= \frac{Z^+(s)[Z^-(s)N_{k_1}(s) + Z_{k_1}(s)N^-(s)]}{N^+(s)N^-(s)N_{k_1}(s)} \quad . \end{aligned} \quad (2.4)$$

War das gegebene System instabil, dann muß auch das Ersatzsystem durch Rückführung stabilisiert werden. Die noch frei wählbaren Polynome  $Z_{k_1}(s)$ ,  $N_{k_1}(s)$  in (2.3) sind so zu bestimmen, daß für  $F_k(s)$  gilt:

$$\left. \begin{aligned} \delta\{Z_k(s)\} &= m_k \\ \delta\{N_k(s)\} &= n_k \end{aligned} \right\} m_k \leq n_k \quad . \quad (2.5)$$

In der Anwendung kann dabei  $m_k = n_k$ , also  $F_K(s)$  ist keine echt gebrochen rationale Funktion, zugelassen werden, da der Kompensator als Algorithmus zusammen mit dem überlagerten Regelungsalgorithmus als Rechnerprogramm realisiert wird. Darüberhinaus ist das Hauptauslegungskriterium, daß in (2.4) das Zählerpolynom nur Nullstellen mit negativen Realteilen hat.

In (Schwarz 1994) wurde darauf hingewiesen, daß bei der Systemrepräsentation in Form von Zustandsmodellen die Verhältnisse dann besonders übersichtlich werden, wenn sowohl das gegebene lineare System als auch der Kompensator jeweils Regelungsnormalform haben, und im Falle eines stabilen Systems für beide Systeme exakt die gleiche Dynamik (Systemmatrix  $\mathbf{A}$ ) angesetzt wird.

Ist in einem praktischen Anwendungsfall – wie sicherlich häufig – das charakterisierte Polynom der Regelstrecke nicht exakt bekannt, kann kein Parallelkompensator mit gleicher Dynamik entworfen werden. Unter Bezug auf Bild 2.1 wird dem gegebenen System  $F(s)$  ein Zustandsmodell mit  $\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^{n_1}$  und dem Kompensator mit  $\mathbf{x}_k(t) \in \mathbb{R}^{n_k}$  zugeordnet. Ohne Verlust an Allgemeingültigkeit kann aus Gründen der Übersichtlichkeit für beide Teilsysteme Regelungsnormalform angenommen werden, so daß für das Ersatzsystem dieses Zustandsmodell existiert:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_k(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \mathbf{0} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_{20} & \cdots & \cdots & -a_1 n_1 & -1 \\ & & & & & 0 & 1 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & & & & & \mathbf{0} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & -a_{k_0} & \cdots & \cdots & -a_{k_2} n_k & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ K_1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ K_2 \end{bmatrix} u(t) \quad (2.6) \\ y(t) &= [c_{10} \ \cdots \ \cdots \ c_{1m_1-1} \ 1 \ 0 \ c_{k_1} \ \cdots \ c_k m_k \ -1 \ 1 \ 0] \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

Hierin ist  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_1+n_k}$  und für die Differenzengrade der beiden Teilsysteme gilt:

$$\begin{aligned} d_1 &= n_1 - m_1 \\ d_k &= n_k - m_k \quad . \end{aligned} \quad (2.7)$$

Wird nun das Gesamtsystem untersucht, dann wird mit

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k \end{bmatrix}$$

für den Differenzegrad des Gesamtsystems (2.6) gefunden

$$\begin{aligned} \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-2} \mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}^{d-1} \mathbf{b} &\neq 0 \\ d &= \min(d_1, d_k) \quad . \end{aligned} \tag{2.8}$$

Die Nulldynamik des Ersatzsystems hat die Dimension:

$$\mu = n_1 + n_k - d \quad . \tag{2.9}$$

Bei geeigneter Wahl des Parallelkompensators sind hinreichend viele Parameter vorzugeben, um eine stabile Nulldynamik des Ersatzsystems zu erzeugen.

### Beispiel 2.1

Gegeben sei ein Nichtphasenminimumsystem

$$F(s) = k \frac{s - b}{a_0 + a_1 s + s^2} \quad .$$

Mit dem Kompensator

$$F_k(s) = \frac{\beta}{\alpha_0 + s}$$

hat das Ersatzsystem diese Form

$$F_e(s) = F(s) + F_\gamma(s) = \frac{K(s - b_0)(\alpha_0 + s) + \beta(a_0 + a_1 s + s^2)}{(a_1 + a_1 s + s^2)(\alpha_0 + s)}$$

Wird  $\beta = -K$  gewählt, ist

$$Z_e(s) = -K(\alpha_0 b_0 + a_0) + K(\alpha + b_0 - a_1)s \quad .$$

Mit  $(\alpha_0 b_0 + a_0) > 0$  und  $(\alpha + b_0 - a_1) < 0$  ist mittels des noch freien Parameters  $\alpha_0$  zu erreichen, daß  $Z_e(s)$  eine Nullstelle mit negativem Realteil hat.  $\square$

### Beispiel 2.2

Als Überleitung zum nächsten Abschnitt soll für das System  $F(s)$  und den Kompensator  $F_k(s)$  aus Beispiel 2.1 die Nulldynamikveränderung im Zustandsmodell dargestellt werden:

$$\begin{aligned} \sum_{F_k(s)} \quad \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \begin{bmatrix} 0 \\ K \end{bmatrix} u(t) \\ y_1(t) &= [b_0 \ 1] \mathbf{x}_1(t) \\ \sum_{F_k(s)} \quad \dot{x}_2(t) &= -\alpha_0 x_2(t) + \beta u(t) \\ y_2(t) &= x_2(t) \quad . \end{aligned}$$

Es werden diese Systemmodelle in (2.6) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha_0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ K \\ \beta \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [b_0 \ 1 \ 1] \mathbf{x}(t) \quad . \end{aligned}$$

Eine Transformation auf Isidori–Normalform liefert mit

$$\left. \begin{aligned} z_1(t) &= z_d(t) = y(t) \\ z_2(t) &= x_1(t) \\ z_3(t) &= x_2(t) \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y(t) = z_1(t) &= b_0 x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \\ x_3(t) &= z_1(t) - b_0 z_2(t) - z_3(t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{c}^T \mathbf{b} u(t) \\ &= [-a_0 \ : \ b_0 - a_1 \ : \ -\alpha_0] \mathbf{x}(t) + [K + \beta] u(t) \\ \dot{z}_2(t) &= \dot{x}_1(t) = x_2(t) = z_3(t) \\ \dot{z}_3(t) &= \dot{x}_2(t) = -a_0 x_1(t) - a_1 x_2(t) + K u(t) \\ &= a_0 z_2(t) - a_1 z_3(t) + K u(t) \quad . \end{aligned}$$

Die Nulldynamik hat mit  $d = 1$  die Dimension  $\mu = n - d = 2$  und wird nun durch „Ausgangsnullung“ näher untersucht. Mit

$$\begin{aligned} y(t) &= z_1(t) = z_2(t) = 0 \quad ; \\ u(t) &= \frac{1}{K + \beta} [a_0 z_2(t) + (a_1 - b_0) z_3(t)] - \alpha_0 [b_0 z_2(t) + z_3(t)] \end{aligned}$$

$$\text{und damit } \dot{\mathbf{y}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{z}_2(t) \\ \dot{z}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ K_0 & K_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\text{worin } K_0 = -\frac{K}{K + \beta} [a_0 - \alpha_0 b_0] - a_0$$

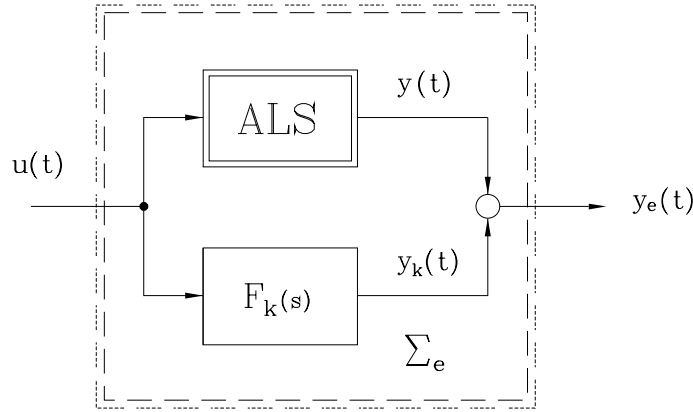
$$K_1 = \frac{K}{K + \beta} [a_1 - b_0 - \alpha_0] - a_1$$

ist. □

### 3 Kompensation der Nulldynamik von ALS

Die bisher für gegebene lineare Systeme besprochene Änderung der Nulldynamik durch Parallelkompensation ist auch für nichtlineare Systeme der Klasse ALS anzuwenden (Bild 3.1). Mittels eines parallel angeordneten linearen Systems kann einmal der Differenzegrad verändert, genauer verkleinert werden.





**Bild 3.1:** Zur Beeinflussung der Nulldynamik von ALS

Sei  $d$  der Differenzgrad des ALS und  $d_k$  der des linearen Kompensators, dann gilt für den Differenzgrad des Ersatzsystems

$$d_e = \min(d, d_k) \quad . \quad (3.1)$$

Behmenburg (1994) benutzt die Parallelkompensation für die Auslegung eines „sliding mode“-Reglers, für dessen praktischen Einsatz ein vorgegebener (relativ kleiner) Differenzgrad zweckmäßig ist. Zumindest in der Umgebung eines Arbeitspunktes kann die für diesen Punkt Jacobi-linearisierte Nulldynamik eines ALS mit instabiler Nulldynamik so beeinflusst werden, daß die Nulldynamik des Ersatzsystems (lokal) stabil ist. Ohne Verlust an Allgemeingültigkeit sei angenommen, daß ein gegebenes ALS in Isidori-Normalform vorliegt:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{d-1}(t) &= x_d(t) \\ \dot{x}_d(t) &= a(x) + b(x)u(t) \\ \dot{x}_{d+1}(t) &= \dot{\eta}_1(t) = q_1(x) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n(t) &= \dot{\eta}_m(t) = q_m(x) \\ y(t) &= x_1(t) \\ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad ; \quad \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Diese Normalform wird im folgenden verkürzt notiert zu:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}_N(\mathbf{x}) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ b(\mathbf{x}) \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ \dots \ 0] \mathbf{x}(t) \quad . \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Für den Kompensator wird Regelungsnormalform angenommen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}_k &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & \cdots & \cdots & -a_{nk} - 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}_k(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [b_0 \ b_1 \ \dots \ b_{m_k-1} \ 1 \ \mathbf{0}] \mathbf{x}_k(t) \end{aligned} \right\} . \quad (3.4)$$

Mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= [x_1, \dots, x_n]^T \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{x}_k(t) &= [x_{k_1}, \dots, x_{kn_k}]^T \in \mathbb{R}^{n_k} \end{aligned}$$

erhält das Zustandsmodell des Ersatzsystems diese Form:

$$\left. \begin{aligned} \sum_e \quad \dot{\mathbf{x}}_e(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{x}(t) \\ \mathbf{x}_k(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_N(\mathbf{x}) \\ \mathbf{A}_k \mathbf{x}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ b(\mathbf{x}) \\ \mathbf{0} \\ K \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ \mathbf{0} \ b_0 \ \dots \ b_{m_k} \ 1 \ \mathbf{0}] \mathbf{x}_e(t) ; \mathbf{x}_e \in \mathbb{R}^{n+n_k} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

Im Anwendungsfall muß dann in einem weiteren Schritt das System (3.5) auf Isidori-Normalform transformiert werden.

**Beispiel 3.1** In (Isidori 1989, Beispiel 4.1.4, S. 154) ist dieses ALS gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= x_4 = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \mathbf{x}(t) \quad . \end{aligned}$$

Es ist leicht zu prüfen mit

$$\begin{aligned} \dot{y}(t) &= \dot{x}_4 = 2x_1^2 + x_2 \\ \ddot{y}(t) &= 4x_1 - \dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 4x_1[x_1 x_2 + x_1^3] + x_1 + (2 + 2x_3)u(t) \quad , \end{aligned}$$

daß das System den Differenzegrad  $d = 2$  hat.

Es wird nun mit dem Parallelkompensator:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k(t) &= -\alpha x_k(t) + K u(t) \\ y_k(t) &= x_k(t) \end{aligned}$$

das Ersatzsystem

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 x_2 + x_1^3 \\ x_1 \\ -x_3 \\ x_1^2 + x_2 \\ -\alpha x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 + 2x_3 \\ 1 \\ 0 \\ K \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = x_4 + x_2 = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1] \mathbf{x}_e(t)$$

bestimmt. Dieses System hat mit

$$\dot{y}(t) = \dot{x}_4 + \dot{x}_k = x_1^2 + x_2 - \alpha x_k + k \cdot u(t)$$

den Differenzegrad  $d = 1$ , und damit hat die Nulldynamik des Ersatzsystems die Dimension  $m = 4$ .

Mit der Koordinatenwahl:

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_d(t) = x_4(t) + x_k(t) = [0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1] \mathbf{x}_e(t) \\ z_2(t) &= z_{d+1}(t) = x_1(t) \\ z_3(t) &= x_2(t) \\ z_4(t) &= x_3(t) \\ z_5(t) &= x_4(t) \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} z_2(t) \\ z_3(t) \\ z_4(t) \\ z_5(t) \end{aligned}} \right\} \begin{aligned} x_1(t) &= z_2(t) \\ x_2(t) &= z_3(t) \\ x_3(t) &= z_4(t) \\ x_4(t) &= z_5(t) \\ x_k(t) &= z_1(t) - x_4(t) = z_1(t) - z_5(t) \end{aligned}$$

erhält das Ersatzsystem diese Normalform:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1(t) &= z_2(t) + z_3(t) + \alpha(z_1(t) - z_5(t)) + Ku(t) \\ \dot{z}_2(t) &= z_2(t) \cdot z_3(t) + z_2^2(t) \\ \dot{z}_3(t) &= z_2(t) + (2 + 2z_4(t))u(t) \\ \dot{z}_4(t) &= -z_4(t) + u(t) \\ \dot{z}_5(t) &= z_2^2(t) + z_3(t) \\ y(t) &= z_1(t) \end{aligned}$$

Über die „Ausgangsnullung“

$$\begin{aligned} y(t) &= \dot{z}_1(t) = z_1(t) = 0 = z_2(t) + z_3(t) + \alpha z_5(t) + Ku(t) \\ u(t) &= -\frac{z_2(t) + z_3(t) + \alpha z_5(t)}{K} \end{aligned}$$

ist die Nulldynamik des Ersatzsystems bestimmt zu

$$\begin{aligned} \dot{z}_2(t) &= z_2(t)z_3(t) + z_2^2(t) \\ \dot{z}_3(t) &= z_2(t) - \frac{\alpha z_5(t) + z_2(t) + z_3(t)}{K}(2 + 2z_4(t)) \\ \dot{z}_4(t) &= -z_4(t) - \frac{\alpha z_5(t) + z_2(t) + z_3(t)}{K} \\ \dot{z}_5(t) &= z_2^2(t) + z_3(t) \end{aligned}$$

Die Jacobi–Linearisierung der Nulldynamik lautet

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-2}{K} & \frac{-2}{K} & 0 & \frac{-\alpha}{K} \\ \frac{-1}{K} & \frac{-1}{K} & -1 & \frac{-\alpha}{K} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Diese Matrix hat die Eigenwerte  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = -1$ ,  $\lambda_3(\alpha, K)$  und  $\lambda_4(\alpha, K)$ ;  $\lambda_3$  und  $\lambda_4$  lassen sich damit geeignet festlegen.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Bericht wurde dargestellt, daß die Methode zur Veränderung der Nulldynamik mittels Parallelkompensatoren, die vor etwa 10 Jahren für lineare Systeme entwickelt wurde, auch auf nichtlineare Systeme der Klasse ALS anwendbar ist.

- Unter welchen Voraussetzungen hat ein technisches System eine instabile Nulldynamik?
- Wie groß ist die Dimension der Nulldynamik in Abhängigkeit vorgegebener Systemstrukturen?
- Kann sich durch Approximation eines ALS durch BLS, QLS oder Polynomsysteme mit linearer Steuerung die Dimension der Nulldynamik und/oder der Typ (stabil/instabil) ändern?

---

## 5 Literatur

- Behmenburg, C.** 1994. *Zur adaptiven Fuzzy-Regelung technischer Systeme*. Diss. Universität Duisburg.
- Benvenuti, L. , M. D. Di Benedetto and J. W. Grizzle** 1993. Trajectory control of an aircraft using approximate output tracking. *Proc. Second European Control Conference*, Groningen, 1638 - 1643.
- Fortell, H.** 1994. *On a relationship between Zeros of Regular Transfer Functions and the Zero Dynamics*. Forschungsbericht Li-T-ISY-R 1555. Dep. of El. Eng. Linköping University.
- Hahn, V. und H. Unbehauen.** 1982. Direct Adaptive Control Schemes for Nonminimum Phase Systems. *Proc. IEEE Conf. on Applications of Adaptive and Multivariable Control*. Hull 19 - 21, July. 170 - 175.
- Hauser, J. , S. Sastry and P. Kokotovic** 1992. Nonlinear control via approximate input-output linearization: The ball and beam example. *IEEE Trans. Autom. Control*, 37, 392-398.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin u. a.: Springer.
- Kailath, Th.** 1980. *Linear Systems*. Englewood Cliffs: Prentice Hall.
- Schwarz, H.** 1994. *Die Nulldynamik der BLS und QLS in Regelungsnormalfom*. Forschungsbericht 12/94, MSRT, Universität Duisburg.
- Svaricek, F.** 1995. Entwurf einer nichtlinearen dynamischen Regelung mit Hilfe algebraischer Methoden am Beispiel eines Rührkesselreaktors. *at Automatisierungstechnik* (angenommener Beitrag)