

# Systematischer Beobachterentwurf für nichtlineare Systeme

Mohieddine Jelali

Forschungsbericht Nr. 1/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

**Übersicht:** Im vorliegenden Bericht werden Methoden zum Entwurf nichtlinearer Beobachter vorgestellt und weiterentwickelt. Die behandelten Verfahren lassen sich in die Normalform-Beobachter, asymptotische und robuste Beobachter einteilen. Für die jeweiligen Verfahren werden systematische Vorgehensweisen in Form von Algorithmen herausgearbeitet, um so die Anwendung auf technische Systeme zu erleichtern. Die dabei zu treffenden Annahmen sowie Vor- und Nachteile der Verfahren werden diskutiert.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg  
Meß-, Steuer- und Regelungstechnik  
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz

# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen und Bezeichnungen</b>	<b>II</b>
<b>1 Einführende Übersicht</b>	<b>1</b>
1.1 Einteilung der Verfahren . . . . .	2
1.2 Gliederung . . . . .	3
<b>2 Voraussetzungen und Begriffsbildung</b>	<b>5</b>
<b>3 Normalform–Beobachter</b>	<b>8</b>
3.1 Exakte Verfahren . . . . .	8
3.2 Näherungsverfahren . . . . .	14
<b>4 Asymptotische Beobachter</b>	<b>18</b>
4.1 Exponentielle Beobachter . . . . .	18
4.2 High–Gain–Beobachter . . . . .	21
4.3 Zustandsschätzung mittels nichtlinearer Optimierung . . . . .	23
<b>5 Robuste Beobachter</b>	<b>27</b>
5.1 $H_\infty$ –optimale Beobachter . . . . .	27
5.2 Sliding–Mode–Beobachter . . . . .	29
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>32</b>
<b>7 Literaturverzeichnis</b>	<b>34</b>
<b>Anhang</b>	<b>38</b>
<b>A Herleitung der Keller–NBNF 3. Ordnung</b>	<b>39</b>
<b>B Vektor– und Matrixnormen</b>	<b>42</b>

# Formelzeichen und Bezeichnungen

## Abkürzungen

ALS	Analytisches System mit linearer Steuerung
BKNF	Beobachtbarkeitsnormalform
DBKNF	Dreiecks-Beobachtbarkeitsnormalform
LS	Least-Squares
NBNF	Nichtlineare Beobachternormalform
NCG	Nichtlineare charakteristische Gleichung
PLS	Polynomsystem mit linearer Steuerung
QLS	(Zustands-)Quadratisches System mit linearer Steuerung

## Formelzeichen<sup>1</sup>

$\mathbf{a}(\mathbf{x})$	Drift-Term eines ALS
$\bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi})$	Kanonische Nichtlinearität
$\mathbf{A}$	Systemmatrix
$\mathbf{b}(\mathbf{x})$	Vektorwertige Eingangsfunktion eines ALS
$\mathbf{b}, \mathbf{B}$	Eingangsvektor, -matrix
$\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})$	Kanonische Nichtlinearität
$\mathbf{c}$	Ausgangsvektor
$\mathbf{e}_n$	Einheitsvektor in Richtung der $n$ -ten Koordinate
$\mathbf{E}_r$	$(r \times r)$ geschiftete Einheitsmatrix
$\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$	Analytisches Systemvektorfeld
$\mathbf{F}$	Systemmatrix
$\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$	Verstärkungsvektoren
$\mathbf{H}_\infty$	Hardy-Raum
$\mathbf{I}_r$	$(r \times r)$ -Einheitsmatrix
$\mathbf{k}$	Beobacherverstärkungsvektor
$k_r(y)$	Koeffizientenfunktionen der Komponenten von $\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})$
$K_r(y)$	Koeffizientenfunktionen von $\bar{\mathbf{a}}_n(\boldsymbol{\xi})$
$l$	Lipschitz-Konstante
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen
$n$	Systemordnung
$p$	Polynomordnung
$\mathbf{P}$	Matrix in der Ljapunov-Funktion
$\mathbf{q}(\mathbf{x})$	Nichtlineare Transformation
$\mathbf{R}$	Projektionsmatrix

<sup>1</sup> Im Sinne einer möglichst übersichtlichen Notation wird die Zeitabhängigkeit von Größen nicht an allen Stellen innerhalb dieser Arbeit explizit vermerkt.

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathbf{t}(\mathbf{x})$	Nichtlineare Transformation
$\mathbf{T}$	Lineare Transformationsmatrix
$\mathbf{t}_i^T$	$i$ -ten Zeile der Transformationsmatrix $\mathbf{T}$
$u(t)$	Eingangsgröße
$\mathbb{U}$	Definitionsbereich von $u$
$V(t)$	Ljapunov-Funktion
$w(t)$	Transformierter Ausgang
$\mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})$	Nichtlineare Transformation
$\mathbf{x}(t)$	Zustandsvektor
$\mathbf{x}_{i:n}$	Teilvektor $\mathbf{x}_{i:n} = [x_i, \dots, x_n]^T$
$\mathbb{X}$	Definitionsbereich von $\mathbf{x}$
$\mathbf{x}^{(k)}$	$k$ -faches Kronecker-Produkt
$\mathbf{x}^{[k]}$	$k$ -faches reduziertes Kronecker-Produkt
$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$	Lösung einer Zustandsgleichung
$y(t)$	Ausgangsgröße
$y(t; t_0, \mathbf{x}_0)$	Zu $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ zugehöriger Ausgang
$\mathbf{z}(t)$	Zustandsvektor eines ALS in NBNF
$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$	Kanonische Nichtlinearität
$\gamma(y)$	Kanonische Ausgangsnichtlinearität
$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{x})$	Vektorfeld
$\varepsilon$	Höhe der Grenzumgebung
$\zeta(\cdot)$	Gütefunktional
$\lambda$	Steuerfaktor für die Schrittweite
$\lambda_i(\cdot)$	Eigenwert einer Matrix
$\boldsymbol{\xi}(t)$	Zustandsvektor eines ALS in BKNF
$\tau$	Zeitintervall
$\Phi$	Transformationsmatrix

### Operatoren und sonstige Zeichen

$\otimes$	Kronecker-Produkt
$\setminus$	Differenzmenge
$\subset$	Echte Teilmenge von
$\in$	Element von
$\forall$	Allquantor
$\iff$	Äquivalenz-Beziehung
$ \cdot , \ \cdot\ $	Betrags-, Normbildung
$(\cdot)^T$	Transponierte Größe
$(\cdot)^{-1}$	Inversion
$(\cdot)^+$	linke Pseudo-Inverse

---

$\dot{(\cdot)}$	Zeitableitung
$\hat{(\cdot)}$	Schätzwert
$\tilde{(\cdot)}$	Schätzfehler
$\frac{\partial}{\partial(\cdot)}$	Partielle Differentiation
$\frac{d}{d(\cdot)}$	Totale Differentiation
$(\cdot)_{\mathbf{x}}$	Jacobi-Matrix
$\mathcal{L}_{\mathbf{f}}$	Ableitung entlang eines Vektorfeldes $\mathbf{f}$
$[\cdot, \cdot]$	Lie-Klammer
$\dim(\cdot)$	Dimension
$\text{kern}(\cdot)$	Kern
$\lim(\cdot)$	Grenzwert
$\text{spur}(\cdot)$	Spur
$\text{Re}(\cdot)$	Realteil

# 1 Einführende Übersicht

Eine zentrale Aufgabe der Regelungstechnik besteht in der Ermittlung nicht meßbarer Prozeßgrößen aus bekannten/gemessenen Ein- und Ausgangssignalen, um z. B. Zustandsregler auszulegen oder Prozeßgrößenverläufe während des Betriebes von technischen Anlagen zu überwachen.

Das Konzept der Zustandsbeobachtung nichtlinearer Systeme entstand in den siebziger Jahren durch die Arbeiten von Thau (1973) sowie Kou u. a. (1975) und etablierte sich in den achtziger Jahren durch die Arbeiten von Bestle und Zeitz (1983), Krener und Isidori (1983), Krener und Respondek (1985), Baumann und Rugh (1986), Keller (1987), Li und Tao (1986), van der Schaft (1986), Walcott und Žak (1987), Zeitz (1987), Xia und Gao (1988), Tsinias (1989) u. a. als ein wichtiges Teilgebiet der modernen Regelungstechnik. Auch in den letzten Jahren hat das Interesse an nichtlinearen Beobachtern weiter zugenommen (Tsinias 1990, Schwarz 1991, Krener und Maag 1991, Tibken 1991, Birk 1992, Tornambè 1992, Adjallah 1993, Zimmer 1993, Raghavan und Hedrick 1994).

Trotz des regen Interesses gibt es für die nichtlineare Beobachtungsaufgabe bislang keine geschlossene Lösung. Diese ist aufgrund der Vielfalt möglicher und strukturell verschiedener Systemtypen auch nicht zu erwarten. Daher existieren keine universell einsetzbaren Entwurfsverfahren, sondern es können abhängig vom Systemtyp und von der Art der auftretenden Nichtlinearitäten unterschiedliche Synthesemethoden angewendet werden. Somit spielt in der praktischen Anwendung die genaue Analyse der nichtlinearen Modellgleichungen des betrachteten Systems eine wichtige Rolle, um das jeweils am besten geeignete Entwurfsverfahren auswählen zu können.

Der vorliegende Bericht enthält einen umfassenden Überblick über die wichtigsten Entwurfsmethoden nichtlinearer Beobachter, wobei neuere Trends berücksichtigt werden und die praktische Realisierbarkeit im Vordergrund steht: Es werden systematische Vorgehensweisen in Form von Algorithmen herausgearbeitet. Bei der Implementierung der meisten beschriebenen Verfahren erweist sich die Nutzung einer symbolverarbeitenden Programmiersprache als unverzichtbar.

Die meisten Verfahren sind zwar der angegebenen Originalliteratur entnommen, jedoch erschweren die unterschiedlich betrachteten Systemklassen, die dort gemachten Voraussetzungen sowie die verwendeten Schreibweisen eine Gegenüberstellung der Methoden. Deshalb wird hier eine einheitliche Darstellung der Verfahren angestrebt, um eine vergleichende Betrachtung zu ermöglichen. Ferner werden sinnvolle Hinweise zur Kombination einiger Methoden gegeben. In diesem Zusammenhang besteht eine neuer effektiver Weg darin, die Systeme direkt in bestimmten hinreichend genauen Approximations-Normalformen (Beobachtbarkeits- bzw. Beobachter-Normalform) zu identifizieren, um basierend darauf den Beobachterentwurf vorzunehmen. Dies ist besonders vorteilhaft, da die erwähnten

Normalformen für die meisten der in der Literatur verwendeten Beobachterverfahren zwar unentbehrlich sind, jedoch bei realen technischen Prozessen kaum existieren.

## 1.1 Einteilung der Verfahren

Die Entwurfsmethoden für nichtlineare Beobachter werden erstmalig in diesem Bericht in drei Hauptgruppen unterteilt:

### 1. Normalform–Beobachter:

Die erste Gruppe umfaßt diejenigen Methoden, bei denen eine nichtlineare Transformation des Systems in die *nichtlineare Beobachternormalform* (Keller 1987, Zeitz 1990)

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \mathbf{I}_{n-1} & & & \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) - \begin{bmatrix} \alpha_1(z_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-1)}) \\ \alpha_2(z_n, u, \dot{u}, \dots, u^{(n-2)}) \\ \vdots \\ \alpha_n(z_n, u) \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{E}_n \mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\alpha}(z_n, \bar{\mathbf{u}}); \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \quad (1.1)$$

$$y(t) = c(z_n); \quad \bar{\mathbf{u}}(t) = [u(t), \dot{u}(t), \dots, u^{(n-1)}(t)]^T \quad (1.2)$$

zu finden ist. In dieser Gruppe von Beobachterentwurfsverfahren selbst kann man weiterhin zwischen

- geometrischen (Nijmeijer 1982, Krener und Isidori 1983, Krener und Respondek 1985, Isidori 1989, Nijmeijer und van der Schaft 1990) und
- Lie–algebraischen Ansätzen (Bestle und Zeitz 1983, Keller 1987, Zeitz 1987, Birk und Zeitz 1988, Xia und Gao 1989)

unterscheiden. Der Beobachterentwurf ist bei diesen Verfahren mit zwei Schwierigkeiten verbunden:

- Die Existenzbedingungen der oben erwähnten Transformation sind sehr restriktiv und der analytische Aufwand ist hoch (Integration von partiellen Differentialgleichungen und Inversion von nichtlinearen algebraischen Gleichungen) und
- die zeitlichen Ableitungen der Eingangssignale müssen bekannt sein, was bei der Anwendung auf reale technische Prozesse selten der Fall ist.

Um diese Schwierigkeiten zu umgehen entstanden einige in der Praxis nützliche Approximationsverfahren (Zeitz 1987, Nicosia u. a. 1989, Nicosia und Tornambè 1989, Karahan 1989, Krener und Maag 1991). Darüber hinaus besteht die Möglichkeit der Identifikation des Systems direkt in der gewünschten Zustandsform (Reuter 1993, Jelali 1994a).

## 2. Asymptotische Beobachter:

Zu dieser Gruppe gehören solche Verfahren, die zum Stabilitätsnachweis des Beobachterfehlersystems die *direkte Methode von Ljapunov* heranziehen. Die auf dieser Basis entworfenen Beobachter werden als asymptotische Beobachter (Tsinias 1989, 1990, Adjallah 1993) oder exponentielle Beobachter (Xia und Gao 1989, Tibken 1991) bezeichnet.

## 3. Robuste Beobachter:

Die dritte Gruppe enthält z. B. Beobachter *variabler Struktur*, auch Sliding-Mode-Beobachter genannt (Walcott und Žak 1987, Slotine u. a. 1987, Misawa u. a. 1989), sowie adaptive Beobachter (Bastin und Gevers 1988, Marino und Tomei 1992). Weiterhin sind  $\mathbf{H}_\infty$ -optimale Beobachter (Raghavan und Hedrick 1994) zu erwähnen. Diese Gruppe von Beobachtern zeichnet sich durch ihre Robustheit gegenüber möglichen Modellunsicherheiten und Parameteränderungen sowie Störungen des Prozesses aus.

## 1.2 Gliederung

Im Rahmen dieses Berichtes werden jeweils einige Vertreter der jeweiligen oben erwähnten Beobachtergruppen vorgestellt und weiterentwickelt:

- Der folgende Abschnitt beschäftigt sich mit der Darstellung der in diesem Bericht behandelten Systeme sowie mit der Einführung von Begriffen, die im Verlauf der Arbeit benötigt werden.
- Abschnitt 3 stellt die sog. Normalform-Beobachter vor. Zum einen werden exakte Beobachterentwurfsverfahren auf der Basis der Keller-Beobachternormalform diskutiert (Abschnitt 3.1). Zum anderen beschreibt Abschnitt 3.2 ein Näherungsverfahren, das für die praktische Anwendung von großer Bedeutung ist. Im Gegensatz zu den exakten Verfahren, bei denen eine vollständige Kompensation der Nichtlinearitäten erreicht wird, werden bei diesem Näherungsverfahren nur die ersten nichtlinearen (quadratischen, kubischen, usw.) Terme durch Zustands- und ggf. Ausgangstransformation zu Null gemacht. Das Verfahren wird für zustandsquadratische Systeme vorgestellt und auf Polynomsysteme erweitert.
- Abschnitt 4 befaßt sich mit den asymptotischen Beobachtern. Als Vertreter dieser Beobachtergruppe werden die exponentiellen Beobachter (Abschnitt 4.1) behandelt, die i. allg. keine Transformation auf eine bestimmte Normalform erfordern. Der Nachweis der Stabilität dieser Beobachter erfolgt mit Hilfe der direkten Methode von Ljapunov. Für Systeme, die in der nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform vorliegen oder in diese transformiert werden können, bietet sich dann der Entwurf von Beobachtern mit hohen Verstärkungen (High-Gain-Beobachter) an, was Gegenstand des Abschnitts 4.2 ist. Ferner enthält Abschnitt 4.3 ein neues Verfahren zur

Zustandsapproximation nichtlinearer Systeme mit Hilfe von nichtlinearen Optimierungsmethoden. Hierbei wird das Beobachtungsproblem über die Definition eines Gütefunctionals in ein äquivalentes Minimierungsproblem überführt, das mittels eines Verfahrens der nichtlinearen Optimierung gelöst werden kann.

- In Abschnitt 5 werden Entwurfsverfahren robuster Beobachter vorgestellt. Hier haben sich in der Praxis die  $\mathbf{H}_\infty$ -Optimierungstechnik und der Sliding-Mode-Ansatz bewährt. Diese ursprünglich für den Entwurf optimaler Regler entwickelten Methoden werden in dieser Arbeit für die Auslegung von nichtlinearen Zustandsbeobachtern eingesetzt.
- Eine Zusammenfassung mit einem Ausblick auf weitere Untersuchungen im Bereich der Zustandsschätzung für nichtlineare Systeme schließt diesen Bericht ab.

## 2 Voraussetzungen und Begriffsbildung

In dieser Arbeit werden die analytischen Systeme mit linearer Steuerung (ALS) betrachtet, welche die Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x})u(t) =: \mathbf{f}(\mathbf{x}, u), & \mathbf{x} \in \mathbb{X} \subset \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R} \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) =: c(\mathbf{x}), & \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0\end{aligned}\quad (2.1)$$

besitzen. Die Vektorfunktionen  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  und  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$  beinhalten stetige, hinreichend oft differenzierbare Funktionen. Die ALS sind für die meisten praktischen Anwendungen zu komplex, wenn man sich nicht auf spezielle Unterklassen beschränkt. Eine wichtige Unterklasse der ALS stellen die Polynomsysteme mit linearer Steuerung (PLS) der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u(t) + \sum_{i=2}^p \mathbf{A}_i^* \mathbf{x}^{(i)}(t) + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{B}_j^* \mathbf{x}^{(j)}(t) u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (2.2)$$

dar. Innerhalb der PLS selbst sollen die quadratischen Systeme mit linearer Steuerung (QLS)

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^{(2)}(t) + [\mathbf{b}_0 u(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}_2 \mathbf{x}^{(2)}(t)] u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (2.3)$$

im Vordergrund stehen. In den Gln. (2.2) und (2.3) wird zur übersichtlichen Darstellung die Kronecker-Produktnotation

$$\mathbf{x}^{(k)}(t) := \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) \otimes \cdots \otimes \mathbf{x}(t) \quad (2.4)$$

verwendet. Für  $k = 2$  gilt z. B.:

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t) = [x_1 \mathbf{x}^T, x_2 \mathbf{x}^T, \dots, x_n \mathbf{x}^T]^T \in \mathbb{R}^{n^2}. \quad (2.5)$$

Ein Nachteil dieser Notation liegt allerdings in der Redundanz der Terme  $x_i x_j$ ,  $i \neq j$ . Diese Redundanz bringt z. B. zusätzliche Identifizierbarkeitsprobleme mit sich: Die Koeffizienten der Terme  $x_i x_j$ ,  $i \neq j$  sind linear abhängig, so daß man aus Ein-/Ausgangsmessungen diese Koeffizienten nicht unterscheiden kann (Yin 1994). Das Problem läßt sich durch die Einführung eines reduzierten Kronecker-Produkts vermeiden:

**Definition 2.1** (Svensson 1992)

Das reduzierte Kronecker-Produkt  $\mathbf{x}^{[k]}$  von  $\mathbf{x}$  wird durch die Rekursionsformel

$$\mathbf{x}_{i:n}^{[1]} := \mathbf{x}_{i:n} := [x_i, \dots, x_n]^T \quad (2.6a)$$

$$\mathbf{x}^{[k+1]} = \mathbf{x}_{1:n}^{[k+1]} = \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{x}_{1:n}^{[k]} \\ \mathbf{x}_{2:n}^{[k+1]} \\ \vdots \\ x_n \mathbf{x}_{n:n}^{[k]} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} x_1 \mathbf{x}_{1:n}^{[k]} \\ x_2 \mathbf{x}_{2:n}^{[k]} \\ \vdots \\ x_n \mathbf{x}_{n:n}^{[k]} \end{bmatrix} \quad (2.6b)$$

erklärt. □

$\mathbf{x}^{[k]}$  stellt also ein Vektor der Dimension  $n_r = \binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$  dar, die um genau  $\Delta n = n^k - \binom{n+k-1}{k}$  geringer ist als die des Vektors  $\mathbf{x}^{(k)}$ , dem herkömmlichen Kronecker-Produkt. Weiterhin ist es möglich, die beiden Produkte durch lineare Transformationen

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{T}_k \mathbf{x}^{[k]} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{x}^{[k]} = \mathbf{T}_k^+ \mathbf{x}^{(k)} \quad (2.8)$$

ineinander zu überführen. Hierbei berechnet sich die linke Pseudo-Inverse  $\mathbf{T}_k^+$  zu:

$$\mathbf{T}_k^+ = (\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k)^{-1} \mathbf{T}_k^T \quad . \quad (2.9)$$

Für  $k = 2$  und  $n = 3$  ergibt sich z. B.

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2 x_1 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \\ x_3 x_1 \\ x_3 x_2 \\ x_3^2 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{T}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} ; \quad \mathbf{x}^{[2]} = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1 x_2 \\ x_1 x_3 \\ x_2^2 \\ x_2 x_3 \\ x_3^2 \end{bmatrix}$$

und mit Gl. (2.9) auch

$$\mathbf{T}_2^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Die Transformationsmatrizen  $\mathbf{T}_k$  und  $\mathbf{T}_k^+$  besitzen die Dimensionen  $p \times q$  bzw.  $q \times p$  mit  $p = n^k$  und  $q = \binom{n+k-1}{k}$  sowie folgende Eigenschaften:

- i)  $\mathbf{T}_k^+ \mathbf{T}_k = \mathbf{I}_q$  ,
- ii)  $\mathbf{T}_k \mathbf{T}_k^+$  ist eine symmetrische  $p \times p$ -Matrix und besitzt den Rang  $q$  ,
- iii)  $\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k$  ist eine  $q \times q$ -Diagonalmatrix und besitzt ebenfalls den Rang  $q$  und
- iv)  $\text{spur}(\mathbf{T}_k^T \mathbf{T}_k) = p$  .

Mit dem reduzierten Kronecker-Produkt lassen sich PLS durch die neue Zustandsdarstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u(t) + \sum_{i=2}^p \mathbf{A}_i \mathbf{x}^{[i]}(t) + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{B}_j \mathbf{x}^{[j]}(t) u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (2.10)$$

beschreiben.

Die hier interessierende Aufgabe besteht nun darin, aus bekannten Ein- und Ausgangssignalen den Zustandsvektor des Systems so zu ermitteln, daß

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| = 0 \quad (2.11)$$

gilt, wobei  $\hat{\mathbf{x}}(t)$  der geschätzte Zustandsvektor ist. Für die Auslegung des Beobachters wird vorausgesetzt, daß die Beobachtbarkeitsanalyse erfolgreich abgeschlossen wurde (Birk 1992, Jelali 1993, Jelali 1994c). Weiterhin werden folgende Definitionen eingeführt:

**Definition 2.2** : Lipschitz-Bedingung (Slotine und Li 1991)

Ein Vektorfeld  $\gamma(\mathbf{x})$  heißt *Lipschitz-global in  $\mathbf{x}$* , wenn die Lipschitz-Bedingung

$$\|\gamma(\mathbf{x}_1) - \gamma(\mathbf{x}_2)\| \leq l \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|, \quad \forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in (\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n) \quad (2.12)$$

erfüllt ist. Hierbei ist  $l$  die sog. Lipschitz-Konstante. Ist die Lipschitz-Bedingung nur in der Umgebung eines Arbeitspunktes gültig, dann heißt  $\gamma(\mathbf{x})$  *Lipschitz-lokal in  $\mathbf{x}$* .  $\square$

**Definition 2.3** : Stabilisierbarkeit

Das Paar  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_0)$  heißt genau dann *stabilisierbar*, wenn ein Vektor  $\mathbf{h}_1$  existiert, so daß gilt:

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A}_1 - \mathbf{b}_0 \mathbf{h}_1^T) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

$\square$

**Definition 2.4** : Ermittelbarkeit

Das Paar  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}^T)$  heißt genau dann *ermittelbar*, wenn es ein Vektor  $\mathbf{h}_2$  gibt, der die Bedingung

$$\operatorname{Re} \lambda_i(\mathbf{A}_1 - \mathbf{h}_2 \mathbf{c}^T) < 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.14)$$

erfüllt.

$\square$

### 3 Normalform–Beobachter

Sowohl die Beobachtbarkeitsanalyse als auch die Beobachtersynthese gestalten sich wesentlich übersichtlicher, wenn es gelingt, das zu untersuchende ALS in die NBNF zu überführen.

#### 3.1 Exakte Verfahren

Der Beobachterentwurf anhand der Beobachternormalform wurde u. a. von Krener und Isidori (1983), Bestle und Zeitz (1983), Krener und Respondek (1985), Keller und Fritz (1986), Zeitz (1987), Keller (1987), und Li und Tao (1986) untersucht. Keller (1986) definiert eine NBNF zu

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ & \mathbf{I}_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) - \begin{bmatrix} \alpha_2(y) \\ \alpha_2(y) \\ \vdots \\ \alpha_n(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1(y) \\ \beta_2(y) \\ \vdots \\ \beta_n(y) \end{bmatrix} u(t) \\ &= \mathbf{E}_n \mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\alpha}(y) + \boldsymbol{\beta}(y)u(t) ; \quad \mathbf{z}(t_0) = \mathbf{z}_0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$y(t) = h(z_n) \quad \text{bzw.} \quad z_n(t) = h^{-1}(y) = \gamma(y) . \quad (3.2)$$

Hier darf das transformierte System nur noch von der meßbaren Ausgangsgröße  $y(t)$  in den Funktionen  $\boldsymbol{\alpha}(y)$  und  $\boldsymbol{\beta}(y)$  abhängen, während der transformierte Zustandsvektor  $\mathbf{z}(t)$  in die Zustandsgleichung linear eingeht. Der Vorteil dieser Normalform besteht darin, daß die Kenntnis der zeitlichen Ableitungen der Eingangssignale nicht erforderlich ist. Andererseits führt der Beobachterentwurf direkt auf eine lineare Fehlerdynamik, ohne eine Linearisierung wie bei Zeitz (1987) sowie Birk und Zeitz (1988) oder eine Ljapunov–Abschätzung wie bei Thau (1973) u. a. zu benötigen. Die Keller–NBNF hat allerdings den Nachteil, daß sie nur für eine eingeschränkte Klasse der ALS unter strengen Bedingungen existiert.

Die Überführung eines ALS nach Gl. (2.1) in Gl. (3.1) soll über eine nichtlineare Transformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{t}(\mathbf{x}) \quad (3.3)$$

erfolgen. In die zeitliche Ableitung von Gl. (3.3)

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{d\mathbf{t}(\mathbf{x})}{dt} = \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \dot{\mathbf{x}}(t) \quad (3.4)$$

wird die Gl. (2.1) eingesetzt:

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x})u(t) . \quad (3.5)$$

Aus dem Vergleich mit Gl. (3.1) ergeben sich die beiden Vektor-Differentialgleichungen zur Bestimmung der Transformation  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  als

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_n \mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\alpha}(y), \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{b}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\beta}(y). \quad (3.7)$$

Für die QLS ( $\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$ ) nach Gl. (2.3) bedeutet dies:

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}(t) \otimes \mathbf{x}(t)] = \mathbf{E}_n \mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\alpha}(y) \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} [\mathbf{b}_0 + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t)] = \boldsymbol{\beta}(y). \quad (3.9)$$

Wird Gl. (3.8) komponentenweise aufgeschrieben und umgestellt, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} t_{n-1}(\mathbf{x}) &= \mathcal{L}_a t_n(\mathbf{x}) + \alpha_n(y) \\ t_{n-2}(\mathbf{x}) &= \mathcal{L}_a^2 t_n(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_a \alpha_n(y) + \alpha_{n-1}(y) \\ &\vdots \\ t_1(\mathbf{x}) &= \mathcal{L}_a^{n-1} t_n(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_a^{n-2} \alpha_n(y) + \dots + \mathcal{L}_a \alpha_3(y) + \alpha_2(y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

oder

$$t_{n-k}(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_a^k t_n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^k \mathcal{L}_a^{i-1} \alpha_{n-k+i}(y); \quad k = 1, 2, \dots, n-1. \quad (3.11)$$

Aufgrund von

$$z_n = \gamma(y) = t_n(\mathbf{x}) \quad (3.12)$$

ergibt sich die gesuchte Transformation zu:

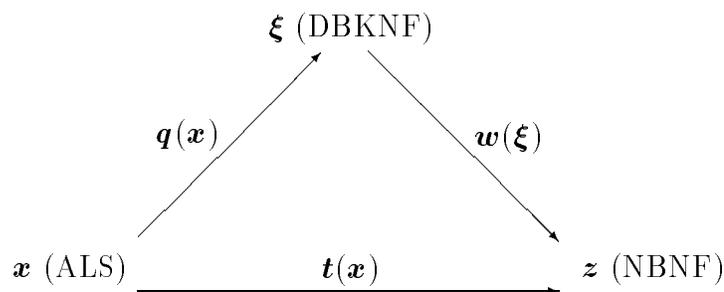
$$\mathbf{z} = \mathbf{t}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathcal{L}_a^{n-1} \gamma(y) + \mathcal{L}_a^{n-2} \alpha_n(y) + \dots + \mathcal{L}_a \alpha_3(y) + \alpha_2(y) \\ \mathcal{L}_a^{n-2} \gamma(y) + \mathcal{L}_a^{n-3} \alpha_n(y) + \dots + \alpha_3(y) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_a \gamma(y) + \alpha_n(y) \\ \gamma(y) \end{bmatrix}, \quad (3.13)$$

die allerdings nicht automatisch die Gl. (3.9) erfüllt. Für  $k = n$  ergibt sich

$$\mathbf{0} = \mathcal{L}_a^n t_n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_a^{i-1} \alpha_i(y), \quad (3.14)$$

was mit der nichtlinearen charakteristischen Gleichung (NCG) bezeichnet wird (Keller 1986). Mit Hilfe der NCG können die noch unbekannt Funktionen  $\gamma(y)$  und  $\alpha_i(y)$ ;  $i = 1, 2, \dots, n$  bestimmt werden, falls die geforderte NBNF existiert.

Der Übergang zu NBNF kann z. B. nach Keller (1986) über eine zweistufige Transformation (Bild 3.1) durchgeführt werden:



**Bild 3.1:** Zweistufige Transformation eines ALS in die NBNF

1. Überführung des Systems anhand der Transformation

$$\xi(t) = \mathbf{q}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ \mathcal{L}_a \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_a^{n-1} \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

in die Dreiecks–Beobachtbarkeitsnormalform (DBKNF)

$$\begin{aligned} \dot{\xi}(t) &= \bar{\mathbf{a}}(\xi) + \bar{\mathbf{b}}(\xi)u(t) \\ &= \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \bar{a}_n(\xi_1, \dots, \xi_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_1(\xi_1) \\ \bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) \\ \vdots \\ \bar{b}_{n-1}(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \\ \bar{b}_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, \xi_n) \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \xi_1(t) \end{aligned} \quad (3.16)$$

Die „Dreiecks“-Abhängigkeit der  $\bar{b}_i$  von  $\xi_1, \dots, \xi_n$  ist nach Gauthier und Bornard (1981) eine notwendige Voraussetzung für die eingangssignalunabhängige lokale Beobachtbarkeit des Systems.

2. Überführung der DBKNF in die NBNF anhand der Transformation

$$\mathbf{z} = \mathbf{w}(\xi) \quad \text{bzw.} \quad \xi = \mathbf{w}^{-1}(\mathbf{z}) \quad (3.17)$$

mit

$$\mathbf{w}(\xi) = \begin{bmatrix} w_1(\xi_1, \dots, \xi_n) \\ \vdots \\ w_{n-1}(\xi_1, \xi_2) \\ w_n(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^{n-1} \gamma(y) + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^{n-2} \alpha_n(y) + \dots + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}} \alpha_3(y) + \alpha_2(y) \\ \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^{n-2} \gamma(y) + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^{n-3} \alpha_n(y) + \dots + \alpha_3(y) \\ \vdots \\ \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}} \gamma(y) + \alpha_n(y) \\ \gamma(y) \end{bmatrix}. \quad (3.19)$$

Die unbekannt Funktionen  $\gamma(y)$  und  $\alpha_i(y)$  lassen sich dann aus der entsprechenden NCG

$$0 = \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^n t_n(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^n \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^{i-1} \alpha_i(y) \quad (3.20)$$

berechnen, womit die gesuchte Transformation  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  festgelegt werden kann. Die Existenzbedingungen werden aus der transformierten Eingangsforderung

$$\frac{\partial \mathbf{w}(\boldsymbol{\xi})}{\partial \boldsymbol{\xi}} \bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\beta}(y) \quad (3.21)$$

hergeleitet.

Im Anhang A findet sich die Herleitung der Normalform für ALS 3. Ordnung. Der Aufwand für die Herleitung der Existenzbedingungen der Keller-NBNF nach Gl. (3.1) wird mit höherer Systemordnung immer größer.

### Eine konstruktive Vorgehensweise

Über einen direkten Koeffizientenvergleich zwischen der DBKNF und der NBNF („coefficient compatibility approach“ von Phelps und Krener (1988)) läßt sich die zweite Transformationsstufe wesentlich vereinfachen (die Berechnung der Transformation ist nicht mehr erforderlich) und für Systeme beliebiger Ordnung durchführen. Dieser Ansatz wurde von Schulze (1993) verfolgt und auf Systeme mit Eingangsgrößen erweitert.

Die Vektorkomponente  $\bar{\mathbf{a}}_n(\boldsymbol{\xi})$  in Gl. (3.16) liege als Summe von Termen der Form

$$K_{\underbrace{i_1 + 1, \dots, i_1 + 1}_{e_1\text{-mal}} \dots \underbrace{i_r + 1, \dots, i_r + 1}_{e_r\text{-mal}}} \prod_{\mu=1}^r \xi_{i_\mu+1}^{e_\mu} ; \quad \begin{array}{l} i_1 = 1, 2, \dots, n-1 \\ \vdots \\ i_r = 1, 2, \dots, n-1 \end{array} \quad (3.22)$$

vor (vgl. z. B. Gl. (A.8)).  $e_\mu$  bezeichnet den zum Zustand zugehörigen Exponenten,  $r$  gibt die Anzahl der im jeweiligen Produkt auftretenden Zustände an, wobei nur Produkte mit dem Gesamtgrad  $n_{ges} \leq n$  zugelassen sind. Der Gesamtgrad berechnet sich als Summe der Grade der einzelnen Faktoren, wobei  $\xi_{i+1}$  definitionsgemäß den Grad  $i$  besitze.

Andererseits weise der Vektor  $\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})$  die Polynomstruktur

$$\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) = \begin{bmatrix} \bar{k}_{1,1}(\xi_1) \\ \bar{k}_{2,2}(\xi_1)\xi_2 + \bar{k}_{2,1}(\xi_1) \\ \bar{k}_{3,3}(\xi_1)\xi_3 + \bar{k}_{3,22}(\xi_1)\xi_2^2 + \bar{k}_{3,2}(\xi_1)\xi_2 + \bar{k}_{3,1}(\xi_1) \\ \vdots \\ \bar{b}_{n,n}(\xi_1)\xi_n + \dots + \bar{b}_{n,1}(\xi_1) \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

auf, d. h. die einzelnen Elemente von  $\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})$  besitzen wiederum die gleiche Struktur von  $\bar{a}_n(\boldsymbol{\xi})$ . Dann läßt sich die NBNF aus der DBKNF mit Hilfe des folgenden Algorithmus bestimmen ( $k = 0, 1, \dots, n - 1$ ):

1. Bestimmung der kanonischen Nichtlinearität  $\gamma(y)$ :

$$\frac{d^2\gamma(y)}{dy^2} = -\frac{1}{n^*} \frac{d\gamma(y)}{dy} K_{2n}(y) ; \quad n^* = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 2 \\ n & \text{sonst} \end{cases} . \quad (3.24)$$

2. Berechnung der kanonischen Nichtlinearitäten  $\alpha_i(y)$ :

$$\begin{aligned} \alpha_1(y) &= -\frac{d\gamma(y)}{dy} K_1(y) \\ \frac{d\alpha_i(y)}{dy} &= -\frac{d\gamma(y)}{dy} K_i(y) ; \quad i = 2, 3, \dots, n . \end{aligned} \quad (3.25)$$

3. Ermittlung der kanonischen Nichtlinearitäten  $\beta_i(y)$ :

$$\beta_{n-k}(y) = \frac{d\gamma(y)}{dy} \left( \bar{k}_{k+1,1}(y) + \sum_{i=0}^{k-1} K_{n-i}(y) \bar{k}_{k-i,1}(y) \right) ; \quad i = 1, 2, \dots, n . \quad (3.26)$$

4. Rekursive Überprüfung der Transformierbarkeit des Eingangsvektors:

$$q_{k+1}(\xi_1) \bar{b}_{k+1}(y) \stackrel{!}{=} \beta_{n-k} \left( q_1(\xi_1, \dots, \xi_{k-j+2}) \bar{b}_1 + \dots + q_k(\xi_1) \bar{b}_{k+1} \right) \quad (3.27)$$

mit

$$q_j(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left( \mathcal{L}_{\mathbf{a}}^k \gamma(y) + \sum_{i=1}^k \mathcal{L}_{\mathbf{a}}^{i-1} \alpha_{n-k+i}(y) \right) ; \quad j = 1, 2, \dots, k + 1 . \quad (3.28)$$

Treten Integrale auf, die analytisch nicht lösbar sind, dann besteht die Möglichkeit einer Approximation der Nichtlinearitäten  $\alpha_i(y)$  und  $\gamma(y)$  mittels Splines (Schulze 1993).

### Ein spezieller Ansatz

In Schwarz (1990, 1992) und Ingenbleek (1991) wird die Keller–NBNF nach Gl. (3.1) mit dem speziellen Ansatz

$$y(t) = z_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) := \mathbf{e}_n^T \mathbf{z}(t) \quad (3.29)$$

$$\alpha_i(y) = a_{i-1}y(t); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.30)$$

verwendet, wobei  $a_i$  die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Systemmatrix  $\mathbf{A}_1$  sind. Damit lautet die NCG

$$0 = \mathcal{L}_a^n \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) + \mathcal{L}_a^{n-1} a_{n-1} y(t) + \dots + \mathcal{L}_a a_1 y(t) + a_0 y(t). \quad (3.31)$$

Dieser Ansatz beinhaltet zwar eine gewisse weitere Einschränkung der Normalform nach Gl. (3.1), besitzt aber den großen praktischen Vorteil, daß er auf eine *lineare Transformation*  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x}$  führt, die aus der Theorie linearer Systeme bekannt ist. Es ist die Transformation, die ein lineares System in die lineare Beobachternormalform überführt. Die Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  lautet

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}^T \mathbf{A}_1^{n-1} + a_{n-1} \mathbf{c}^T \mathbf{A}_1^{n-2} + \dots + a_2 \mathbf{c}^T \mathbf{A}_1 + a_1 \mathbf{c}^T \\ \vdots \\ \mathbf{c}^T \mathbf{A}_1 + a_{n-1} \mathbf{c}^T \\ \mathbf{c}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_1^T \\ \mathbf{t}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{t}_n^T \end{bmatrix}. \quad (3.32)$$

Diese lineare Transformation existiert nur dann, wenn das lineare Teilsystem  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}^T)$  *vollständig beobachtbar* ist, da  $T$  sonst nicht invertierbar ist. Diese Bedingung stellt eine erste Struktureinschränkung an die ALS (bzw. QLS) dar.

Wendet man die oben genannte Transformation auf QLS nach Gl. (2.3) an, dann folgt

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{E}_n \mathbf{z} - \mathbf{a}y + \mathbf{T} \mathbf{A}_2 \mathbf{T}^{-1} \otimes \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + [\mathbf{T} \mathbf{b}_0 + \mathbf{T} \mathbf{B}_1 \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z}] u \quad (3.33)$$

$$= \mathbf{A}_{1B} \mathbf{z} + \mathbf{A}_{2B} \mathbf{z} \otimes \mathbf{z} + [\mathbf{b}_{0B} + \mathbf{B}_{1B} \mathbf{z}] u \quad (3.34)$$

$$y = \mathbf{c}^T \mathbf{T}^{-1} \mathbf{z} = z_n = \mathbf{e}_n^T \mathbf{z}. \quad (3.35)$$

Mit den Ansätzen (Ingenbleek 1991)

$$\mathbf{t}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{b}_{11}^T \mathbf{x} \\ \mathbf{b}_{12}^T \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_{1n}^T \mathbf{x} \end{bmatrix} = f_b(y), \quad \mathbf{t}_i^T \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{21}^T \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \\ \mathbf{a}_{22}^T \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{a}_{2n}^T \mathbf{x} \otimes \mathbf{x} \end{bmatrix} = f_a(y^2) \quad (3.36)$$

ergeben sich die transformierten Matrizen

$$\mathbf{B}_{1B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_{1,1} \\ 0 & \dots & 0 & k_{1,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_{1,n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{2B} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & k_{2,1} \\ 0 & \dots & 0 & k_{2,2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & k_{2,n} \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

Sie dürfen nur in der jeweils letzten Spalte mit von Null verschiedenen Elementen besetzt sein. Andererseits folgt aus Gl. (3.35)

$$\mathbf{c}^T = \mathbf{e}_n^T \mathbf{T} = \mathbf{t}_n^T, \quad (3.38)$$

was heißt, daß die letzte Zeile  $\mathbf{t}_n^T$  der Transformationsmatrix  $\mathbf{T}$  mit dem Ausgangsvektor  $\mathbf{c}^T$  übereinstimmen muß. Diese Forderung ist sinnvollerweise vor der Struktur der Matrizen  $\mathbf{A}_{2B}$  und  $\mathbf{B}_{1B}$  zu überprüfen.

Insgesamt kann formuliert werden:

### Satz 3.1

Wenn das lineare Teilsystems  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{b}_0, \mathbf{c}^T)$  vollständig beobachtbar ist und die Matrizen  $\mathbf{A}_{2B}$ ,  $\mathbf{B}_{1B}$  jeweils nur in der letzten Spalte mit Elementen  $\neq 0$  besetzt sind, dann überführt die lineare Transformation  $\mathbf{t}(\mathbf{x}) = \mathbf{T}\mathbf{x}$  mit  $\mathbf{T}$  nach Gl. (3.32) die QLS nach Gl. (2.3) in die Keller-NBNF mit dem Zustandsmodell

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{E}_n \mathbf{z}(t) - \boldsymbol{\alpha}(y) + \boldsymbol{\beta}(y)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{e}_n^T \mathbf{z}(t) = z_n(t) \quad ; \quad \mathbf{z}_0 = \mathbf{z}(t_0) \end{aligned} \quad (3.39)$$

mit

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\alpha}(y) &= \mathbf{a}y(t) - \mathbf{k}_2 y^2(t) \\ \boldsymbol{\beta}(y) &= \mathbf{k}_1 y(t) + \mathbf{b}_0 \quad . \end{aligned} \quad (3.40)$$

Der Vektor  $\mathbf{a}$  enthält weiterhin die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms der Matrix  $\mathbf{A}_1$ .  $\square$

Während die erste Bedingung bei vielen technischen Systemen durchaus gegeben ist, stellt die zweite sehr harte Anforderungen an die Struktur des QLS. Diese einzuhalten, wird mit zunehmender Systemordnung immer schwieriger, wenn man z. B. bedenkt, daß gilt:  $\dim(\mathbf{A}_2) = n \times n^2$ . Falls diese NBNF aber existiert, dann führt der Beobachterentwurf zu einer linearen Fehlerdynamik und kann analog zum Luenberger-Identitätsbeobachter bei den linearen Systemen vorgenommen werden.

## 3.2 Näherungsverfahren

Neben verschiedenen Möglichkeiten einer exakten Berechnung der Transformation eines nichtlinearen Systems in die NBNF gibt es auch in der Literatur einige Näherungsverfahren, die schwächere Existenzbedingungen voraussetzen. Da die Überführung eines Systems in die Krener-Beobachterform

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{z}(t) + \mathbf{b}u(t) + \boldsymbol{\alpha}(w) + \boldsymbol{\beta}(w)u(t) \\ w(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t) + \gamma(w) \end{aligned} \quad (3.41)$$

äquivalent ist zu einer Linearisierung der Zustandsfehler-Differentialgleichung durch eine Zustands- und ggf. eine Ausgangstransformation, schlagen Krener und Maag (1991) vor, die Transformationen und die kanonischen Nichtlinearitäten als Polynome der Ordnung  $p$  anzusetzen und höhere Terme zu vernachlässigen. Diese Methode wird im folgenden für quadratische Systeme vorgestellt und auf Polynomsysteme erweitert.

## Näherungsweise Beobachterentwurf für quadratische Systeme

Die QLS der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{x}^{[2]}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{x}(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\tag{3.42}$$

sollen durch eine quadratische Koordinatentransformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \Phi \mathbf{x}^{[2]}(t)\tag{3.43}$$

näherungsweise in die quadratische Beobachterform

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \alpha y^2(t) + \beta y(t)u(t) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{z}(t)\end{aligned}\tag{3.44}$$

überführt werden. Die Matrizen  $\Phi$ ,  $\alpha$  und  $\beta$  seien zunächst unbekannt. Durch Differenzieren beider Seiten von Gl. (3.43) und Betrachtung der inversen Transformation

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \Phi \mathbf{z}^{[2]}(t) + \mathcal{O}(\mathbf{z}^{[3]})\tag{3.45}$$

ergibt sich unter Vernachlässigung der Terme 3. Ordnung

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \left( \mathbf{I}_n - \Phi \frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{z}} \right) \dot{\mathbf{x}}(t)\tag{3.46}$$

$$\begin{aligned}&= \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{A}_1 \Phi \mathbf{z}^{[2]}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{z}^{[2]}(t) + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}(t)u(t) + \mathbf{b}_0 u(t) \\ &\quad - \Phi \frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) - \Phi \frac{\partial \mathbf{z}^{[2]}}{\partial \mathbf{z}} \mathbf{b}_0 u(t).\end{aligned}\tag{3.47}$$

Mit der Lie-Klammer-Notation erhält man für Gl. (3.46) die kompaktere Darstellung

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{z}^{[2]}(t) - [\mathbf{A}_1 \mathbf{z}, \Phi \mathbf{z}^{[2]}] \\ &\quad + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}(t)u(t) - [\mathbf{b}_0 u, \Phi \mathbf{z}^{[2]}\end{aligned}\tag{3.48}$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \alpha y^2(t) + \beta y(t)u(t).\tag{3.49}$$

In den neuen Koordinaten kann ein Beobachter der Gestalt

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \alpha y^2(t) + \beta y(t)u(t) + \mathbf{k}[y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{z}}(t)]\tag{3.50}$$

angesetzt werden, wozu die Differentialgleichung

$$\dot{\tilde{\mathbf{z}}}(t) = \dot{\mathbf{z}}(t) - \dot{\hat{\mathbf{z}}}(t)\tag{3.51}$$

$$\begin{aligned}&= [\mathbf{A}_1 - \mathbf{k} \mathbf{c}^T] \tilde{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{A}_2 \mathbf{z}^{[2]}(t) - \alpha y^2(t) - [\mathbf{A}_1 \mathbf{z}, \Phi \mathbf{z}^{[2]}] \\ &\quad + \mathbf{B}_1 \mathbf{z}(t)u(t) - \beta y(t)u(t) - [\mathbf{b}_0 u, \Phi \mathbf{z}^{[2]}\end{aligned}\tag{3.52}$$

für den Zustandsfehler des Beobachters gehört. In Gl. (3.52) findet sich der vom Luenberger-Beobachter bekannte lineare Term wieder. Darüber hinaus tritt ein nichtlinearer Korrekturterm auf.

Aus der Forderung, daß der nichtlineare Term in Gl. (3.52) minimal sein soll und damit die Fehlerdynamik „soweit wie möglich linearisiert“ wird sowie aus der Gleichheit des ursprünglichen mit dem transformierten Ausgang folgen die sog. homologen Gleichungen des Beobachters 2. Ordnung

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_2 \mathbf{z}^{[2]} - \boldsymbol{\alpha} y^2 - [\mathbf{A}_1 \mathbf{z}, \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[2]}] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_1 \mathbf{z} u - \boldsymbol{\beta} y u - [\mathbf{b}_0 u, \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[2]}] &= \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[2]} &= 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

mit den zu bestimmenden Matrizen  $\boldsymbol{\Phi}$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  und  $\boldsymbol{\beta}$ .

Die homologen Gleichungen definieren eine Abbildung des Tripels  $\{\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$  der Dimension  $n^2(n+1)/2 + 2n$  auf ein Tupel  $\{\mathbf{A}_2, \mathbf{B}_1\}$  der Dimension  $n^2(n+1)/2 + n^2$ . Diese Abbildung ist stets nicht invertierbar, so daß nur nur optimale z. B. Least-Squares-Lösungen gefunden werden können. Eine ausführliche Analyse solcher Abbildungen findet sich bei Karahan (1989). Von den Least-Squares-Lösungen muß eine ausgewählt werden, welche die euklidische Norm  $\|\boldsymbol{\Phi}\|_2$  minimiert, um zu gewährleisten, daß der Fehler in den Schätzungen von  $\mathbf{x}$  bzw.  $\mathbf{z}$  zu Null konvergiert (Krener und Maag 1991). Hierbei stimmen  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{z}$  in erster Näherung miteinander überein. Die Verstärkung  $\mathbf{k}$  ist z. B. über das Verfahren der Polvorgabe festzulegen.

### Erweiterung auf Polynomsysteme

Die für die QLS vorgestellte Vorgehensweise kann auf die PLS gemäß Gl. (2.10) verallgemeinert werden. Die Zustandstransformation

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \boldsymbol{\Phi} \mathbf{x}^{[p]}(t) \quad (3.54)$$

bzw.

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z}(t) + \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[p]}(t) + \mathcal{O}(\mathbf{z}^{[p+1]}) \quad (3.55)$$

überführt Gl. (2.10) in die Form

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{z}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \sum_{i=2}^p \mathbf{A}_i \mathbf{z}^{[i]}(t) - [\mathbf{A}_1 \mathbf{z}, \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[p]}] \\ &\quad + \sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{B}_j \mathbf{z}^{[j]}(t) u(t) - [\mathbf{b}_0 u, \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[p]}] \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\stackrel{!}{=} \mathbf{A}_1 \mathbf{z}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \boldsymbol{\alpha} y^p(t) + \boldsymbol{\beta} y^{p-1}(t) u(t). \quad (3.57)$$

Hierfür lautet der Beobachter

$$\dot{\hat{\mathbf{z}}}(t) = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{b}_0 u(t) + \boldsymbol{\alpha} y^p(t) + \boldsymbol{\beta} y^{p-1}(t) u(t) + \mathbf{k}[y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{z}}(t)], \quad (3.58)$$

zu dem die homologen Gleichungen

$$\begin{aligned}
\sum_{i=2}^p \mathbf{A}_i \mathbf{z}^{[i]} - \boldsymbol{\alpha} y^p - [\mathbf{A}_1 \mathbf{z}, \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[p]}] &= \mathbf{0} \\
\sum_{j=1}^{p-1} \mathbf{B}_j \mathbf{z}^{[j]} u - \boldsymbol{\beta} y^{p-1} u - [\mathbf{b}_0 u, \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[p]}] &= \mathbf{0} \\
\mathbf{c}^T \boldsymbol{\Phi} \mathbf{z}^{[p]} &= 0
\end{aligned} \tag{3.59}$$

der Ordnung  $p$  gehören. Die Anzahl der zu bestimmenden Parameter beträgt somit

$$n_p = n \binom{n+p-1}{p} + 2n . \tag{3.60}$$

Dafür stehen

$$n_{gl} = \sum_{i=2}^p n \binom{n+i-1}{i} + \sum_{j=1}^{p-1} n \binom{n+j-1}{j} \tag{3.61}$$

Gleichungen zur Verfügung.

Der näherungsweise Krener–Normalform–Beobachter für PLS nach Gl. (2.10) kann in folgenden Schritten entworfen werden:

1. Dimensionierung der Verstärkung  $\mathbf{k}$ .
2. Aufstellen der homologen Gleichungen durch Koeffizientenvergleich in den quadratischen Gliedern. Daraus ergeben sich inhomogene lineare Gleichungen in den gesuchten Parameter der Matrizen  $\{\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}\}$ .
3. Numerische Lösung des inhomogenen Gleichungssystems (z. B. mit Matlab–Least–Squares–Verfahren).

## 4 Asymptotische Beobachter

### 4.1 Exponentielle Beobachter

Die Einführung der sog. *exponentiellen Beobachter* für nichtlineare Systeme geht auf Kou u. a. (1975) zurück. Nähere Untersuchungen zu diesem Thema wurden von Xia und Gao (1988) sowie Tsiniias (1989, 1990) durchgeführt. Dann folgten die Arbeiten von Tibken (1991) (speziell für bilineare Systeme) und Adjallah (1993).

Folgende Bedingungen Ljapunovscher Art werden für die Lösbarkeit vorausgesetzt:

1. Es existiert eine symmetrische, positiv definite Matrix  $\mathbf{P}$  sowie eine positive Konstante  $\alpha_1$  derart, daß für jedes

$$\tilde{\mathbf{x}} \in \{\text{kern}(\mathbf{c}^T) - \{\mathbf{0}\}\} = \{\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0} \mid \mathbf{c}^T \tilde{\mathbf{x}} = 0\}, \quad \tilde{\mathbf{x}} := \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}} \quad (4.1)$$

eine bestimmte Umgebung  $\mathcal{U}_{\tilde{\mathbf{x}}}$  von  $\tilde{\mathbf{x}}$  gilt:

$$\tilde{\mathbf{x}}^T \mathbf{P} \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u) \tilde{\mathbf{x}} \leq -\alpha_1 \|\tilde{\mathbf{x}}\|^2, \quad \forall (\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathcal{U}_{\tilde{\mathbf{x}}} \times \mathbb{U}. \quad (4.2)$$

2. Es gibt zwei positive Konstante  $\beta_a$  und  $\beta_b$ , so daß gilt:

$$\|\mathbf{P} \mathbf{a}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{a}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}\| \leq \beta_a, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (4.3)$$

$$\|\mathbf{P} \mathbf{b}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) + \mathbf{b}_{\mathbf{x}}^T(\mathbf{x}) \mathbf{P}\| \leq \beta_b, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \quad (4.4)$$

Dabei ist  $\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, u)$  die Jacobi-Matrix bezüglich  $\mathbf{x}$  zu dem Vektorfeld  $\mathbf{f}(\mathbf{x}, u)$  und  $\|\cdot\|$  die euklidische Norm (s. Anhang B). Unter den Voraussetzungen 1. und 2. gilt

**Satz 4.1** (Tsiniias 1989)

Genügt das System (2.1) den Bedingungen 1. und 2., dann ist der zugehörige Identitätsbeobachter

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}})u(t) + \mathbf{k}(u)[y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)], \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (4.5)$$

mit der vom Eingangssignal abhängigen Beobachterverstärkung

$$\mathbf{k}(u) = \tau(\beta_a + \beta_b)(1 + |u_{\max}|)\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c} \quad (4.6)$$

für jede genügend große, positive Konstante  $\tau$  und für beliebige Anfangsbedingungen  $\mathbf{x}_0$ ,  $\hat{\mathbf{x}}_0$  ein *exponentieller Beobachter* für das System (2.1).  $\square$

**Definition 4.1** (Kou u. a. 1975, Xia und Gao 1988)

Das System (4.5) heißt *exponentieller Beobachter* für (2.1), wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

- i)  $\hat{\mathbf{x}}_0 = \mathbf{x}_0 \Rightarrow \hat{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$  für alle zulässigen  $u \in \mathbb{U}$ .

ii) Es existiert eine offene Umgebung  $\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}^n$  um den Ursprung derart, daß

$$\hat{\mathbf{x}}_0 - \mathbf{x}_0 =: \tilde{\mathbf{x}}_0 \in \mathcal{U}_0 \quad (4.7)$$

die Ungleichung

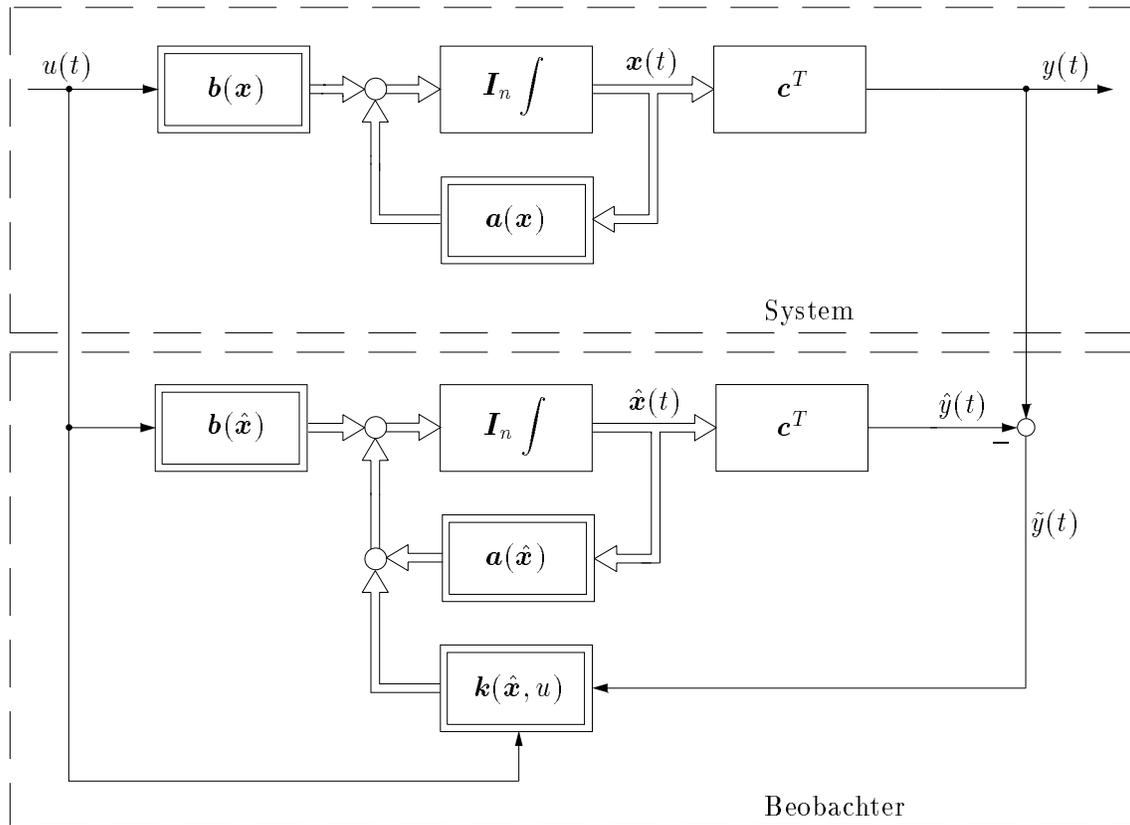
$$\|\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\| = \|\tilde{\mathbf{x}}(t)\| \leq M \exp(-\alpha_2 t) \quad (4.8)$$

für zwei positive Konstanten  $M$  und  $\alpha_2$  impliziert.  $\square$

Bei  $\mathbb{U}$  handelt es sich um eine beschränkte Teilmenge mit

$$\mathbb{U} = \{u \in \mathbb{R} \mid u_{\min} \leq u \leq u_{\max}\}. \quad (4.9)$$

Diese Art der Beschränkung der Eingangssignale tritt in den praktischen Anwendungen immer auf, da es keine realen technischen Systeme gibt, die unbeschränkte Eingangsvektoren zulassen.



**Bild 4.1:** ALS-Beobachter allgemeiner Struktur

Im allgemeinen kann auch ein Beobachter der Form (Bild 4.1)

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}})u(t) + \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u)[y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)], \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (4.10)$$

ausgelegt werden. Die zugehörige Fehlerdynamik lautet

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) - \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u)[y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)] . \quad (4.11)$$

Wird angenommen, daß der Schätzwert  $\hat{\mathbf{x}}$  in der Nähe von  $\mathbf{x}$  bleibt, was von einem exponentiellen Beobachter auch zu erwarten ist, so gilt (Reihenentwicklung um  $\hat{\mathbf{x}}$ )

$$\begin{aligned} \mathbf{f}(\mathbf{x}, u) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}} + \tilde{\mathbf{x}}, u) \\ &\simeq \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, u) \tilde{\mathbf{x}} . \end{aligned} \quad (4.12)$$

Aus Gl. (4.11) wird dann

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = [\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u) \mathbf{c}^T] \hat{\mathbf{x}}(t) . \quad (4.13)$$

Um die asymptotische Konvergenz des Fehlers zu gewährleisten, wird eine quadratische Ljapunov-Funktion

$$V(\tilde{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \tilde{\mathbf{x}}(t) \quad (4.14)$$

mit symmetrischer, positiv definiten Matrix  $\mathbf{P}$  verwendet. Die zeitliche Ableitung von  $V(\tilde{\mathbf{x}})$  lautet

$$\begin{aligned} \dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) &= \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) \\ &= \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} [\mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u) \mathbf{c}^T] \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{aligned} \quad (4.15)$$

und muß unabhängig von  $\mathbf{x}$  und  $u$  negativ definit sein.

Der Beobachterentwurf ist somit auf das Auffinden einer geeigneten Ljapunov-Funktion zurückgeführt und erfolgt systematisch in zwei Schritten:

1. Bestimmung der Matrix  $\mathbf{P}$

Für  $\tilde{\mathbf{x}} \in \{\text{kern}(\mathbf{c}^T) - \{\mathbf{0}\}\}$  reduziert sich Gl. (4.15) zu

$$\dot{V}(\tilde{\mathbf{x}}) = \tilde{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, u) \tilde{\mathbf{x}}(t) . \quad (4.16)$$

Weiterhin existiert eine Projektionsmatrix  $\mathbf{R}$  und ein Vektor  $\tilde{\mathbf{x}}_r$  niedrigerer Dimension derart, daß gilt

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{R} \tilde{\mathbf{x}}_r . \quad (4.17)$$

Diese Dimensionsreduzierung folgt aus der Berücksichtigung der Meßinformationen. Das heißt, die zu den gemessenen Zuständen gehörenden Fehlervektorkomponenten können zu Null gesetzt werden. So muß  $\mathbf{P}$  dann die algebraische Ungleichung

$$\tilde{\mathbf{x}}_r^T \mathbf{R}^T \mathbf{P} \mathbf{f}_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, u) \mathbf{R} \tilde{\mathbf{x}}_r < 0 \quad (4.18)$$

erfüllen. Im allgemeinen kann die Bestimmung einer geeigneten Matrix  $\mathbf{P}$  anhand der Majorisierung der linken Seite von (4.18) erfolgen. Dazu ist es meistens hilfreich, eine diagonalförmige Struktur  $\mathbf{P} = \text{diag}[p_1, \dots, p_n]$  vorzuschreiben. Die Existenz von  $\mathbf{P}$  ist für Systeme mit beschränktem, wenn auch beliebig großem Arbeitsbereich immer gesichert. Für den Sonderfall  $\text{kern}(\mathbf{c}^T) = \{\mathbf{0}\}$  kann  $\mathbf{P} = \mathbf{I}_n$  gesetzt werden.

2. Berechnung der Verstärkung  $\mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u)$ 

Wurde ein  $\mathbf{P}$  gefunden, dann muß die Beobacherverstärkung so dimensioniert werden, daß die Ungleichung (hier sei  $\hat{\mathbf{x}}$  beliebig)

$$\hat{\mathbf{x}}^T(t) \mathbf{P} [\mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u) \mathbf{c}^T] \hat{\mathbf{x}}(t) < 0 \quad (4.19)$$

erfüllt ist. Eine hinreichende Bedingung dafür ist, daß  $[\mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}, u) - \mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u) \mathbf{c}^T]$  negativ semidefinit ist. Hierzu kann (Adjallah 1993)

$$\mathbf{k}(\hat{\mathbf{x}}, u) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, u) \mathbf{c} \mathbf{Q} \quad (4.20)$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{F}(\hat{\mathbf{x}}, u) &= \text{diag}[\varphi_1(\hat{\mathbf{x}}, u), \dots, \varphi_n(\hat{\mathbf{x}}, u)] \\ \varphi_i(\hat{\mathbf{x}}, u) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \alpha_{ji}(\hat{\mathbf{x}}, u)| \end{aligned} \quad (4.21)$$

angesetzt werden. Die  $\alpha_{ij}(\hat{\mathbf{x}}, u)$  stellen die Elemente der Matrix  $[\mathbf{P} \mathbf{f}_x(\hat{\mathbf{x}}, u)]$  dar. Die Wahl der Matrix  $\mathbf{Q}$  in Gl. (4.20) muß gewährleisten, daß  $[\mathbf{c} \mathbf{Q} \mathbf{c}^T - \mathbf{I}_n]$  positiv semidefinit ist.

## 4.2 High-Gain-Beobachter

Die Auslegung eines High-Gain-Beobachters (Beobachter mit hohen Verstärkungen) erfolgt für ALS nach Gl. (2.1), die in der DBKNF

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 \dots \dots 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\mathbf{a}}_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{b}_1(\xi_1) \\ \bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) \\ \vdots \\ \bar{b}_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) \end{bmatrix} u(t) \quad (4.22)$$

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}}(t) &:= \mathbf{E}_n^T \boldsymbol{\xi}(t) + \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) + \bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi}) u(t) \\ y(t) = \xi_1(t) &:= \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\xi}(t) \end{aligned} \quad (4.23)$$

vorliegen oder sich durch eine nichtlineare Koordinatentransformation  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$  in diese Form überführen lassen. Hierbei sei vorausgesetzt, daß die Vektorfelder  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ ,  $\bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi})$  und  $\bar{\mathbf{b}}(\boldsymbol{\xi})$  global Lipschitz in  $\mathbf{x}$  bzw.  $\boldsymbol{\xi}$  sind. Dann gilt:

**Satz 4.2** (Tornambè 1992, Deza u. a. 1992)

Für eine genügend große Zahl  $\nu$  stellt

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}(t) = \mathbf{E}_n^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(t) + \bar{\mathbf{a}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \bar{\mathbf{b}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) u(t) - \mathbf{k}_\nu [y(t) - \mathbf{e}_1^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(t)], \quad \hat{\boldsymbol{\xi}}(0) = \hat{\boldsymbol{\xi}}_0 \quad (4.24)$$

mit

$$\mathbf{k}_\nu = [k_1 \nu, k_2 \nu^2, \dots, k_n \nu^n]^T \quad (4.25)$$

einen exponentiellen Beobachter für das System nach Gl. (4.23) dar. Dabei ist der Verstärkungsvektor  $\mathbf{k} = [k_1, k_2, \dots, k_n]^T$  so zu wählen, daß  $[\mathbf{E}_n^T - \mathbf{k} \mathbf{e}_1^T]$  stabil ist.  $\square$

Ein verbessertes Schätzverhalten kann erzielt werden, wenn anstelle der statischen Verstärkung  $\mathbf{k}_\nu$  eine adaptive angesetzt wird. Dies kann anhand eines speziellen erweiterten Kalman-Filters verwirklicht werden:

**Satz 4.3** (Deza u. a. 1992, Gauthier u. a. 1992)

Für eine genügend große Zahl  $\nu$  ist das erweiterte Kalman-Filter

$$\begin{aligned}\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}(t) &= \mathbf{E}_n^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(t) + \bar{\mathbf{a}}(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \bar{\mathbf{b}}(\hat{\boldsymbol{\xi}})u(t) - \mathbf{P}^{-1} \mathbf{e}_1 r^{-1} [y(t) - \mathbf{e}_1^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(t)] , \\ \dot{\mathbf{P}} &= -\mathbf{P} \mathbf{Q}_\nu \mathbf{P} - \left[ \mathbf{E}_n^T + \bar{\mathbf{a}}_\xi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \bar{\mathbf{b}}_\xi(\hat{\boldsymbol{\xi}})u \right]^T \mathbf{P} \\ &\quad - \mathbf{P} \left[ \mathbf{E}_n^T + \bar{\mathbf{a}}_\xi(\hat{\boldsymbol{\xi}}) + \bar{\mathbf{b}}_\xi(\hat{\boldsymbol{\xi}})u \right] - \mathbf{e}_1 r^{-1} \mathbf{e}_1^T\end{aligned}\quad (4.26)$$

mit symmetrischer, positiv definitiver Matrix  $\mathbf{Q}$  und  $r > 0$  sowie

$$\mathbf{Q}_\nu = \nu^2 \boldsymbol{\Delta}^{-1} \mathbf{Q} \boldsymbol{\Delta}^{-1} , \quad \boldsymbol{\Delta} = \text{diag} \left[ 1, \frac{1}{\nu}, \dots, \frac{1}{\nu^{n-1}} \right] \quad (4.27)$$

ein exponentieller Beobachter für das System (2.1).  $\square$

Der Entwurf eines High-Gain-Beobachters erfordert die Inversion der nichtlinearen Koordinatentransformation  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{q}(\mathbf{x})$ , was meistens selbst rechnergestützt schwierig durchzuführen ist. In diesem Fall besteht ggf. die Möglichkeit, ausgehend von einer vereinfachten DBKNF (Differenzengrad  $d = n$ )

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots & \mathbf{I}_{n-1} \\ 0 \dots \dots 0 \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\mathbf{a}}_n(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\mathbf{b}}_n(\boldsymbol{\xi}) \end{bmatrix} u(t) \quad (4.28)$$

$$y(t) = \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\xi}(t) \quad (4.29)$$

einen High-Gain-Beobachter der Form

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\xi}}}(t) = \mathbf{E}_n^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(t) - \mathbf{k}_\nu [y(t) - \mathbf{e}_1^T \hat{\boldsymbol{\xi}}(t)] , \quad \hat{\boldsymbol{\xi}}(0) = \hat{\boldsymbol{\xi}}_0 \quad (4.30)$$

auszulegen. Hier werden die nichtlinearen Terme im Beobachter nicht berücksichtigt. Durch eine geeignete Wahl von  $\nu$  (möglichst groß) in  $\mathbf{k}_\nu$  konvergiert das Schätzfehlersystem zu einer kleinen Umgebung um Null (Nicosia und Tornambè 1989).

Für viele technische Systeme, die komplexes nichtlineares Verhalten aufweisen, bietet sich auch die Möglichkeit der Identifikation dieser Systeme direkt in der (näherungsweise) BKNF aufgrund von gemessenen Ein- und Ausgangssignalen an. Die Identifikation gewährleistet, daß der Fehler zwischen realem System und identifiziertem Modell minimal ist. In der Praxis reicht es oft aus, die approximierete quadratische Beobachtbarkeitsnormalform (Jelali 1994b)

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ d_1 & d_2 & \dots & d_{n(n+1)/2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^{[2]}(t)$$

$$y(t) = \mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\xi}(t) + \left( \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \\ n_1 & \dots & n_n \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}(t) + \begin{bmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 \\ r_1 & r_2 & \dots & r_{n(n+1)/2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\xi}^{[2]}(t) \right) u(t) \quad (4.31)$$

als Systemstruktur vorzugeben. Gl. (4.31) liegt eine Taylerrihenentwicklung der Nichtlinearitäten  $\bar{a}_n(\boldsymbol{\xi})$  und  $\bar{b}_n(\boldsymbol{\xi})$  in Gl. (4.28) bei Vernachlässigung der Terme dritter und höherer Ordnung in  $\boldsymbol{\xi}$  zugrunde.

Der Entwurf eines Beobachters mit hohen Verstärkungen besteht aus den Hauptschritten

1. Überführung des Systems in die BKNF oder Identifikation des Systems direkt in dieser Form,
2. Dimensionierung der Verstärkung  $\mathbf{k}$  und
3. Wahl einer geeigneten Zahl  $\nu$ .

**Anmerkung:**

Polynom–Nichtlinearitäten sind nur Lipschitz–lokal (vgl. Definition 2.2). Bei den meisten technischen Systemen sind aber die physikalischen Größen (Geschwindigkeit, Beschleunigung, Druck, Stellsignale usw.) beschränkt, so daß sie dann auch Lipschitz–global sind.

### 4.3 Zustandsschätzung mittels nichtlinearer Optimierung

Eine völlig neuartige Methode zur Zustandsapproximation nichtlinearer Systeme stellt Zimmer (1993) vor. Im Gegensatz zur klassischen Beobachterphilosophie entfällt bei dieser Methode die Rückführung des Ausgangsfehlers, d. h. man geht von einem Beobachter der Gestalt

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{b}(\hat{\mathbf{x}})u(t) := \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}, u), \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{X} \quad (4.32)$$

aus. Die Idee besteht darin, das Beobachtungsproblem über die Definition eines quadratischen Gütefunktionalis

$$\zeta_j(\hat{\mathbf{x}}_0) := \frac{1}{2} \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} [y(t; j\tau, \hat{\mathbf{x}}_{0,j}) - y(t; 0, \mathbf{x}_0)]^2 dt \quad (4.33)$$

innerhalb eines kurzen Zeitintervalls der Länge  $\tau$  in ein äquivalentes Minimierungsproblem zu überführen, das mit Hilfe eines numerischen Gradientenverfahrens gelöst wird. Dabei ist vorauszusetzen, daß das System gemäß Gl. (2.1) die eindeutigen Lösungen  $\mathbf{x}(t; 0, \mathbf{x}_0)$  und  $y(t; 0, \mathbf{x}_0)$  besitzt. Diese können durch numerische Lösung von Gl. (2.1) mit Hilfe von Integrationsverfahren (z. B. Runge–Kutta Verfahren 4. Ordnung) ermittelt werden.

Im ersten Schritt erfolgt die Approximation des Anfangszustands  $\mathbf{x}_0$ , indem rekursiv eine Folge  $\{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}\}_{k \in \mathbb{N}}$  von geschätzten Anfangszuständen z. B. durch den gedämpften Gauß–Newton–Algorithmus (Dennis und Schnabel 1983, Yin 1994, Reuter 1995)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_{0,0} &= \hat{\mathbf{x}}_0 \\ \hat{\mathbf{x}}_{0,k+1} &= \hat{\mathbf{x}}_{0,k} - \lambda \left[ \frac{\partial^2 \zeta(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}_0)^2} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}} \right]^{-1} \frac{\partial \zeta(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}} \end{aligned} \quad (4.34)$$

generiert wird.  $0 < \lambda \leq 1$  ist der Dämpfungsfaktor (ein Steuerfaktor für die Schrittweite), der in Abhängigkeit von der Abnahme der Zielfunktion bei jedem Iterationsschritt anhand der Lösung des eindimensionalen Optimierungsproblems nach  $\lambda$  variiert werden soll. Gradient und Hesse–Matrix berechnen sich hier zu

$$\frac{\partial \zeta(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} = \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} [y(t; j\tau, \hat{\mathbf{x}}_{0,j}) - y(t; 0, \mathbf{x}_0)] dt \mathbf{c}^T, \quad (4.35)$$

$$\frac{\partial^2 \zeta(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}_0)^2} = \frac{\partial}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \left[ \int_{j\tau}^{(j+1)\tau} [y(t; j\tau, \hat{\mathbf{x}}_{0,j}) - y(t; 0, \mathbf{x}_0)] dt \mathbf{c} \right]. \quad (4.36)$$

In der Praxis muß man sich auf ein endliches  $k$  beschränken, um eine bessere Approximation  $\hat{\mathbf{x}}_{0,k} := \hat{\mathbf{x}}_0^0$  für  $\mathbf{x}_0$  als  $\hat{\mathbf{x}}_0$  zu erhalten. Damit erfolgt dann die numerische Bestimmung einer Approximationslösung  $\mathbf{x}(\tau; 0, \hat{\mathbf{x}}_0^0)$  von Gl. (2.1). Die Wiederholung dieses Schrittes soll eine Folge  $\{\hat{\mathbf{x}}_0^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}(j\tau; 0, \mathbf{x}_0) - \hat{\mathbf{x}}_0^j\| = 0 \quad (4.37)$$

generieren. Bild 4.2 zeigt den prinzipiellen Ablauf des Verfahrens.

Insgesamt läßt sich der folgende Algorithmus (Zimmer 1993) anwenden:

1. Setze (Startwert)

$$\hat{\mathbf{x}}_{0,0}^0 := \hat{\mathbf{x}}_0 \in \mathbb{X}. \quad (4.38)$$

2. Wiederhole (Optimierung)

$$\hat{\mathbf{x}}_{0,k+1}^j := \hat{\mathbf{x}}_{0,k}^j - \lambda \left[ \frac{\partial^2 \zeta_j(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial(\hat{\mathbf{x}}_0)^2} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}^j} \right]^{-1} \frac{\partial \zeta_j(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}^j} \quad (4.39)$$

bis (Abbruchbedingung)

$$\frac{\partial \zeta_j(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}^j} \leq \kappa \frac{\partial \zeta_{j-1}(\hat{\mathbf{x}}_0)}{\partial \hat{\mathbf{x}}_0} \Big|_{\hat{\mathbf{x}}_{0,k}^{j-1}}; \quad 0 < \kappa < 1 \quad (4.40)$$

erfüllt ist (für  $j = 0$  verwende  $\zeta_{-1}(\hat{\mathbf{x}}_0^{-1}) := \zeta_0(\hat{\mathbf{x}}_0)$ ).



es unterscheidbar unter  $u$  in  $\mathbb{X}$  ist und eine kontinuierliche, monotone und nicht negative Funktion  $\gamma$  existiert, so daß für alle  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{X}$  die Beziehungen

$$\int_0^\tau [y(t; 0, \mathbf{x}_1) - y(t; 0, \mathbf{x}_2)]^2 dt \geq \gamma(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) \quad \text{und} \quad (4.45)$$

$$\gamma(\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|) = 0 \iff \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 \quad (4.46)$$

gelten. □

Außerdem muß bekanntlich die Hesse-Matrix für alle  $j$  positiv definit sein, was die Konvexität der zugehörigen Zielfunktion  $\zeta_j(\hat{\mathbf{x}}_0)$  garantiert.

Dieses Verfahren weist folgende Vorteile auf:

- Es werden keine Transformationen benötigt.
- Es kann auf eine große Klasse nichtlinearer Systeme angewendet werden.
- Es ist einfach zu implementieren.

## 5 Robuste Beobachter

Der Beobachterentwurf geht zunächst von der Kenntnis des exakten Systemmodells aus. Bei der Modellierung vieler technischer Prozesse müssen allerdings in der Praxis Modellungenauigkeiten und –unsicherheiten in Kauf genommen werden. Zusätzlich können Parameteränderungen sowie Störungen des Prozesses auftreten. Dann benötigt man Beobachter, die robust gegenüber Modellfehler sind. Im vorliegenden Abschnitt werden zwei typische Vertreter dieser robusten Beobachtergruppe vorgestellt, nämlich der  $H_\infty$ -optimale Beobachter und der Sliding-Mode-Beobachter.

### 5.1 $H_\infty$ -optimale Beobachter

Im folgenden wird ein Entwurfsverfahren beschrieben, das auf einer Nutzung der  $H_\infty$ -Optimierungstechnik für den Beobachterentwurf basiert. Diese besteht in der Minimierung der maximalen „Fehlerenergie“ über alle Trajektorien (sog. Minimax-Problem), welche zu den gleichen Beobachtungen führen (Francis 1987, Nagpal und Khargonekar 1991).

Es werden PLS der Form

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}_1 \mathbf{x} + \mathbf{b}_0 u(t) + \sum_{i=2}^p \mathbf{A}_i^* \mathbf{x}^{(i)}(t) + \sum_{j=2}^{p-1} \mathbf{B}_j^* \mathbf{x}^{(j)}(t) u(t) =: \mathbf{A}_1 \mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) \\ y(t) &= \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t)\end{aligned}\quad (5.1)$$

betrachtet, wobei der nichtlineare Teil  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, u)$  global Lipschitz in  $\mathbf{x}$  für alle  $u \in \mathbb{U}$  und das lineare Paar  $(\mathbf{A}_1, \mathbf{c}^T)$  ermittelbar sein sollen (vgl. Definition 2.3). Der Ansatz eines Beobachters mit exaktem Simulatorterm und linearer Rückführung des Ausgangsfehlers

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}_1 \hat{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, u) + \mathbf{k}[y(t) - \mathbf{c}^T \hat{\mathbf{x}}(t)], \quad \hat{\mathbf{x}}(0) = \hat{\mathbf{x}}_0 \quad (5.2)$$

führt zu der Fehlerdynamik

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = (\mathbf{A}_1 - \mathbf{k}\mathbf{c}^T)\tilde{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, u). \quad (5.3)$$

**Satz 5.1** (Raghavan und Hedrick 1994)

Gegeben seien ein PLS (5.1) und sein Beobachter (5.2). Existiert eine Zahl  $\delta > 0$  und eine symmetrische Matrix  $\mathbf{Q}$  derart, daß die algebraische Riccati-Gleichung

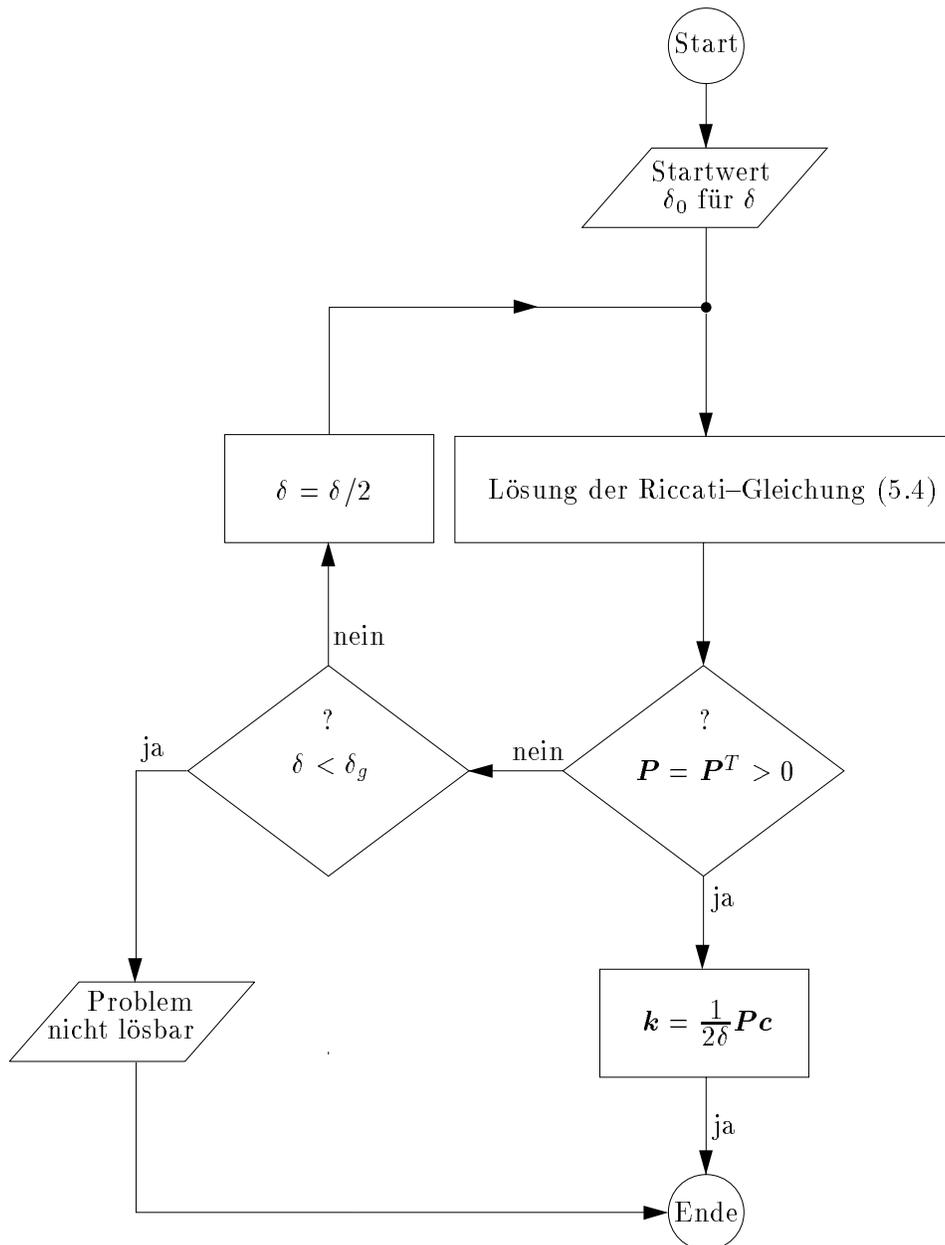
$$\mathbf{A}_1 \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}_1^T + \mathbf{P} \left( l^2 \mathbf{I}_n - \frac{1}{\delta} \mathbf{c} \mathbf{c}^T \right) \mathbf{P} + \mathbf{I}_n + \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.4)$$

eine symmetrische, positiv definite Lösung  $\mathbf{P}$  besitzt, dann kann die Fehlerdynamik nach Gl. (5.3) für jeden nichtlinearen Term  $\mathbf{g}(\mathbf{x}, u)$  mit der Lipschitz-Konstante  $l$  durch die Beobacherverstärkung

$$\mathbf{k} = \frac{1}{2\delta} \mathbf{P} \mathbf{c} \quad (5.5)$$

(quadratisch) stabilisiert werden. Ist umgekehrt die Fehlerdynamik durch eine Wahl von  $\mathbf{k}$  zu stabilisieren, dann existiert ein  $\delta^*$  und eine positiv definite Matrix  $\mathbf{Q}$ , so daß für alle  $\delta \in (0, \delta^*)$  die algebraische Riccati-Gleichung eine symmetrische, positiv definite Lösung besitzt.  $\square$

Durch die spezielle Wahl  $\mathbf{Q} = \delta \mathbf{I}_n$  reduziert sich das Problem auf die Suche nach  $\delta$ . Die Bestimmung einer geeigneten Zahl  $\delta$  bzw. Beobacherverstärkung  $\mathbf{k}$  kann iterativ anhand des in Bild 5.1 dargestellten Algorithmus erfolgen.



**Bild 5.1:** Ablaufplan für den Entwurf eines optimalen Beobachters

Zur Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung gibt es in der Literatur (Unbehauen 1993, Patel u. a. 1994) eine Vielzahl von Methoden und Algorithmen. Im Programmpaket MATLAB bietet sich die Standardroutine *are* der Control-Toolbox an.

## 5.2 Sliding–Mode–Beobachter

Es wird von einem Beobachteransatz der Gestalt

$$\dot{\hat{\boldsymbol{x}}}(t) = \mathbf{A}\hat{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma) + \mathbf{k}[y(t) - \mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{x}}(t)] , \quad \hat{\boldsymbol{x}}(0) = \hat{\boldsymbol{x}}_0 \quad (5.6)$$

mit einer konstanten Beobachterverstärkung  $\mathbf{k}$  ausgegangen. Dieser Beobachter enthält keinen exakten Simulatorterm. Subtrahiert man Gl. (5.6) von Gl. (5.1), dann folgt die Fehlerdynamik

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}^T]\tilde{\boldsymbol{x}}(t) + \mathbf{g}(\boldsymbol{x}, u) - \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma) . \quad (5.7)$$

Hierbei muß zusätzlich zu  $\mathbf{k}$  ein geeignetes beschränktes  $\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma)$  gefunden werden, um das asymptotische Abklingen des Fehlers sicherzustellen.

### Einfacher Sliding–Mode–Beobachter

Der Beobachterentwurf kann systematisch in drei Schritten erfolgen:

1. Dimensionierung von  $\mathbf{k}$

Zunächst erfolgt die Wahl einer Verstärkung  $\mathbf{k}$ , so daß  $\mathbf{F} := \mathbf{A} - \mathbf{k}\mathbf{c}^T$  asymptotisch stabil ist (Polvorgabe, Ackermann–Formel oder Kalman–Filter).

2. Bestimmung von  $\mathbf{P}$

Hier findet die direkte Methode von Ljapunov (vgl. Abschnitt 4.1) Verwendung. Folglich muß eine symmetrische, positiv definite Matrix  $\mathbf{P}$ , welche die Matrix–Riccati–Gleichung

$$\mathbf{F}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F} + 2\mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (5.8)$$

löst, gefunden werden. Damit wird garantiert, daß

$$\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = \frac{1}{2}\tilde{\boldsymbol{x}}^T(\mathbf{F}^T\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{F})\tilde{\boldsymbol{x}} = \tilde{\boldsymbol{x}}^T\mathbf{Q}^T\tilde{\boldsymbol{x}} < 0 \quad (5.9)$$

ist, wobei man üblicherweise  $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_n$  verwendet.

3. Bestimmung von  $\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma)$

Mit den berechneten  $\mathbf{k}$  und  $\mathbf{P}$  muß nun  $\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma)$  ermittelt werden, so daß die für die Konvergenz des Fehlers (zu Null) hinreichende Ljapunov–Bedingung

$$\dot{V}(\tilde{\boldsymbol{x}}) = -\tilde{\boldsymbol{x}}^T\mathbf{Q}\tilde{\boldsymbol{x}} + \tilde{\boldsymbol{x}}^T\mathbf{P}[\mathbf{g}(\boldsymbol{x}, u) - \mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma)] < 0 \quad (5.10)$$

erfüllt wird. Dies gewährleistet der Ansatz (Walcott und Žak 1987):

$$\mathbf{s}(\hat{\boldsymbol{x}}, y, \sigma) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}\mathbf{c}^T\mathbf{e}}{|\mathbf{c}^T\mathbf{e}|}\sigma(u) & \text{für } \mathbf{c}^T\mathbf{e} \neq 0 \\ \mathbf{0} & \text{für } \mathbf{c}^T\mathbf{e} = 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

$$= \mathbf{P}^{-1}\mathbf{c}\sigma(u)\operatorname{sgn}(\tilde{y}) , \quad \tilde{y} = y - \mathbf{c}^T\hat{\boldsymbol{x}} . \quad (5.12)$$

Die skalare Funktion  $\sigma(u)$  muß so bestimmt werden, daß

$$\sigma(u) \geq |\beta(\mathbf{x}, u)|, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, u) = \mathbf{P}^{-1} \mathbf{c} \beta(\mathbf{x}, u) \quad (5.13)$$

gilt. Aus Gl. (5.13) folgt

$$|\beta(\mathbf{x}, u)| = |(\mathbf{c}^T \mathbf{c})^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{P} \mathbf{g}(\mathbf{x}, u)| \quad (5.14)$$

$$\leq |(\mathbf{c}^T \mathbf{c})^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{P}| \|\mathbf{g}(\mathbf{x}, u)\|, \quad (5.15)$$

was bedeutet, daß anstelle von  $\sigma(u)$  auch die Funktion

$$\sigma(\hat{\mathbf{x}}, u) = |(\mathbf{c}^T \mathbf{c})^{-1} \mathbf{c}^T \mathbf{P}| \|\mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}, u)\| \quad (5.16)$$

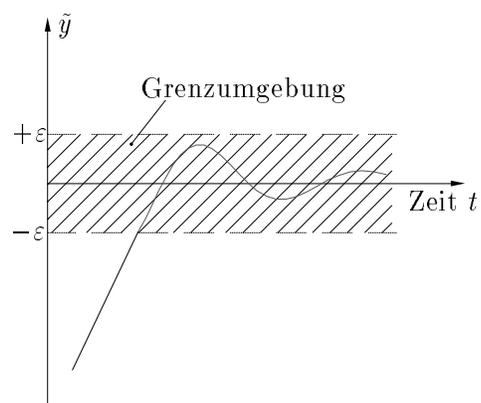
gesetzt werden kann.

### Sliding-Mode-Beobachter mit Grenzumgebung

Der einfache Sliding-Mode-Beobachter besitzt den Nachteil, daß der Term  $\mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}}, y, \sigma)$  diskontinuierlich ist, was ein unerwünschtes Rattern (chattering) im Beobachter zur Folge hat. Im Gegensatz zu Sliding-Mode-Reglern betrifft das Rattern im Beobachter mehr die numerische Implementierung als die mechanische Begrenzung der Stellglieder (Slotine u. a. 1987). Dieses Problem kann durch die Einführung einer sog. Grenzumgebung (boundary layer) mit der Höhe  $\varepsilon > 0$  (Bild 5.2) vermieden werden. Der variable Beobachterterm berechnet sich gemäß

$$\mathbf{s}(\hat{\mathbf{x}}, y, \sigma) = \begin{cases} \frac{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{c} \tilde{y}}{|\tilde{y}|} \sigma(\hat{\mathbf{x}}, u) & \text{für } |\tilde{y}| > \varepsilon \\ \frac{\mathbf{P}^{-1} \mathbf{c} \tilde{y}}{\varepsilon} \sigma(\hat{\mathbf{x}}, u) & \text{für } |\tilde{y}| \leq \varepsilon \end{cases}. \quad (5.17)$$

In der Praxis sollte die Höhe der Grenzumgebung  $\varepsilon$  möglichst klein gewählt werden, aber den Wert der Standardabweichung des auftretenden Meßrauschens, falls dieser bekannt ist oder geschätzt werden kann, nicht unterschreiten.



**Bild 5.2:** Grenzumgebung (boundary layer)

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Beobachter werden zur Schätzung von nichtmeßbaren Prozeßgrößen aus Ein- und Ausgangssignalen eingesetzt, die für die Auslegung einer Zustandsregelung oder bei der Fehlerdetektion und Überwachung technischer Systeme benötigt werden. Für nichtlineare Prozesse gibt es eine große Anzahl von Beobachterentwurfsmethoden.

Im vorliegenden Bericht<sup>2</sup> wurden die im Hinblick auf eine praktische Realisierung in Frage kommenden Verfahren zusammengestellt und weiterentwickelt. Diese wurden in drei große Gruppen eingeteilt. Es sind die Normalform-Beobachter, die asymptotischen und die robusten Beobachter. Für die jeweiligen Verfahren wurden systematische Vorgehensweisen in Form von Algorithmen erarbeitet und somit eine Anwendung auf technische Systeme erst ermöglicht. Die dabei zu treffenden Annahmen sowie Vor- und Nachteile der Verfahren wurden diskutiert.

Der erste Teil der Arbeit befaßte sich mit Normalform-Beobachtern, für deren Entwurf die Systeme in der nichtlinearen Beobachternormalform vorliegen oder in diese transformiert werden müssen. Es hat sich gezeigt, daß dies nur für eine sehr eingeschränkte Klasse analytisch linearer Systeme möglich ist. Daher sollten bei der praktischen Anwendung Näherungsverfahren wie z. B. das von Krener herangezogen werden. Dieses Verfahren wurde für quadratische Systeme hergeleitet und auf Polynomsysteme erweitert. Dabei wird nur eine teilweise Kompensation der Nichtlinearitäten bis zum Term der Ordnung  $p$  erreicht, wobei man sich in der Praxis auf  $p = 2$  oder  $p = 3$  beschränken sollte, um den Rechenaufwand in Grenzen zu halten.

Im zweiten Teil des Berichtes wurde die Gruppe der asymptotischen Beobachter behandelt. Dazu gehören zum ersten die exponentiellen Beobachter, die i. allg. keine Transformationen erfordern und zur Sicherstellung des Abklingens des Schätzfehlers die direkte Methode von Ljapunov verwenden. Liegen die Systeme jedoch in der nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform vor, was bei vielen mechanischen Systemen der Fall ist, oder lassen sie sich in diese überführen, dann können dafür High-Gain-Beobachter ausgelegt werden. Zum anderen wurde eine völlig neuartige Technik zur Beobachtung nichtlinearer Systeme vorgestellt, die den Einsatz von nichtlinearen Optimierungsverfahren in Kombination mit numerischen Integrationsverfahren ausnutzt. Dieses Verfahren eignet sich wegen seiner einfachen Implementierung und seiner Anwendbarkeit auf eine umfassende Klasse nichtlinearer Systeme sehr gut für den praktischen Beobachtereinsatz.

Der letzte Teil dieses Berichtes enthält zwei bewährte Techniken zum Beobachterentwurf, die sich vor allem für Regelstrecken eignen, die Modellunsicherheiten und Störungen aus-

---

<sup>2</sup> Der Bericht entstand im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projektes DFG Schw 120/48-1,2 mit dem Thema „Zustands- und Parameterschätzung bei analytischen Systemen mit linearer Steuerung“.

gesetzt sind oder deren Parameter sich während des Betriebes ändern (zeitvariante Prozesse). Es handelt sich hierbei um  $\mathbf{H}^\infty$ -optimale Beobachter und Sliding-Mode-Beobachter.

Auf diesen Bericht aufbauende Untersuchungen werden sich mit der praktischen Erprobung der hier vorgestellten Beobachterentwurfsverfahren an technischen Systemen beschäftigen wie z. B. dem inversen Pendel sowie hydraulischen und pneumatischen Antrieben.

Da in der Regel im praktischen Einsatz bei technischen Prozessen zumindest das Ausgangssignal gestört ist, so daß anstelle des ungestörten Antwortsignals häufig nur eine fehlerhafte Beobachtung zur Verfügung steht, sollen die Beobachter erweitert werden, indem Rauschsignale am Ausgang berücksichtigt werden. Diese Aufgabe betrifft die Zustandsfilterung nichtlinearer Systeme und bedarf eingehender Untersuchungen.

## 7 Literaturverzeichnis

- Adjallah, K. H.** 1993. *Contribution au diagnostic de systèmes par observateur d'état*. Dissertation. Institut National Polytechnique de Lorraine.
- Barnett, S.** 1990. *Matrices: Methods and Applications*. Oxford: Clarendon Press.
- Bastin, G.** und **M. R. Gevers.** 1988. Stable adaptive observers for nonlinear time-varying systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 33. 650–658.
- Baumann, W.** und **W. Rugh.** 1986. Feedback control of nonlinear systems by extended linearization. *IEEE Transactions on Automatic Control* 31. 40–47.
- Bestle, D.** und **M. Zeitz.** 1983. Canonical form observer design for non-linear time-variable systems. *Int. J. Control* 38. 419–431.
- Birk, J.** 1992. *Rechnergestützte Analyse und Lösung nichtlinearer Beobachtungsaufgaben*. Dissertation. Universität Stuttgart. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 294. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Birk, J.** und **M. Zeitz.** 1988. Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems. *Int. J. Control* 47. 1823–1836.
- Dennis, J. E.** und **R. B. Schnabel.** 1983. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Deza, F., E. Busvelle, J. P. Gauthier** und **D. Rakotapara.** 1992. High gain estimation for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 18. 295–299.
- Francis, B. A.** 1987. *A Course in  $H_\infty$  Control Theory* (Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 88). Berlin: Springer.
- Gauthier, J. P.** und **G. Bornard.** 1981. Observability for any  $u(t)$  of a class of nonlinear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26. 922–926.
- Gauthier, J. P., H. Hammouri** und **S. Othman.** 1992. A simple observer for nonlinear systems — applications to bioreaktors. *IEEE Transactions on Automatic Control* 26. 875–880.
- Ingenbleek, R.** 1991. *Zustandsbeobachter und Schätzfilter für eine Klasse analytisch linearer Systeme*. Forschungsbericht Nr. 14/91 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- Isidori, A.** 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer.
- Jelali, M.** 1993. *Zur Beobachtbarkeits-Analyse zustandsquadratischer Systeme mit linearer Steuerung (QLS)*. Forschungsbericht Nr. 11/93 MSRT. Universität –GH– Duisburg.

- Jelali, M.** 1994a. *Zur Identifikation zeitkontinuierlicher zustandsquadratischer Modelle in Beobachternormalform*. Forschungsbericht Nr. 15/94 MSRT. Universität Duisburg.
- Jelali, M.** 1994b. Zur nichtlinearen Beobachtbarkeitsnormalform zustandsquadratischer Systeme. Forschungsnotiz MSRT (unveröffentlicht). Juni/1994.
- Jelali, M.** 1994c. *Zur Steuer- und Beobachtbarkeits-Analyse der QLS*. Forschungsbericht Nr. 1/94 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- Karahan, S.** 1989. *Higher degree linear approximations of nonlinear systems*. Dissertation. University of California at Davis.
- Keller, H.** 1986. Entwurf nichtlinearer, zeitinvarianter Beobachter durch Polvorgabe mit Hilfe einer Zwei-Schritt-Transformation. *at – Automatisierungstechnik* 34. 271–324 und 326–331.
- Keller, H.** 1987. Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form. *Int. J. Control* 46. 1915–1930.
- Keller, H.** und **H. Fritz**. 1986. Design of nonlinear observers by a two-step-transformation. *Algebraic and Geometric Methods in Nonlinear Control Theory*, hg. von M. Fliess und M. Hazewinkel. 89–98. Dordrecht: Reidel.
- Kou, S. R., D. L. Elliot** und **T. J. Tarn**. 1975. Exponential observers for nonlinear dynamic systems. *Information and Control* 29. 204–216.
- Krener, A. J.** und **A. Isidori**. 1983. Linearization by output injection and nonlinear observers. *Systems & Control Letters* 3. 47–52.
- Krener, A. J.** und **B. Maag**. 1991. Controller and observer design for cubic systems. *Modeling, Estimation and Control of Systems with Uncertainty*, hg. von G. B. Di Masi, A. Gombani und A. B. Kurzhansky. *Progress in Systems and Control Theory*. 10. 224–239. Boston: Birkhäuser.
- Krener, A. J.** und **W. Respondek**. 1985. Nonlinear observers with linearizable error dynamics. *SIAM J. Control and Optimization* 23. 197–216.
- Li, C. W.** und **L. W. Tao**. 1986. Observing non-linear time-variable systems through a canonical form observer. *Int. J. Control* 44. 1703–1713.
- Marino, R.** und **P. Tomei**. 1992. Observer-based adaptive stabilization for a class of non-linear systems. *Automatica* 28. 787–793.
- Misawa, E. A., J. K. Hedrick, J.-J. E. Slotine** und **G. C. Verghese**. 1989. Sliding observer design for nonlinear state estimation. *Proc. of the IFAC Symposium on Nonlinear Control System Design*, hg. von A. Isidori. Oxford: Pergamon Press.

- Nagpal, K. M.** und **P. P. Khargonekar.** 1991. Filtering and smoothing in an  $H^\infty$  setting. *IEEE Transactions on Automatic Control* 36. 515–528.
- Nicosia, S., P. Tomei** und **A. Tornambè.** 1989. An approximate observer for a class of nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 12. 43–51.
- Nicosia, S.** und **A. Tornambè.** 1989. High-gain observers in the state and parameter estimation of robots having elastic joints. *Systems & Control Letters* 13. 331–337.
- Nijmeijer, H.** 1982. Observability of a class of nonlinear systems: a geometric approach. *Int. J. Control* 36. 867–874.
- Nijmeijer, H.** und **A. J. van der Schaft.** 1990. *Nonlinear Dynamical Control Systems.* New York: Springer.
- Patel, R. V., A. J. Laub** und **P. M. Van Dooren.** 1994. *Numerical Linear Algebra Techniques for Systems and Control.* New York: The IEEE, Inc.
- Phelps, A. R.** und **A. J. Krener.** 1988. Computation of observer normal form. *Analysis and Control of Nonlinear Systems*, hg. von C. I. Byrnes, C. F. Martin und R. E. Saeks. 475–482. North-Holland: Elsevier Science Publishers B.V.
- Raghavan, S.** und **K. Hedrick.** 1994. Observer design for a class of nonlinear systems. *Int. J. Control* 59. 515–528.
- Reuter, H.** 1993. *Zur Identifikation bilinearer Modelle in kanonischer Form.* Forschungsbericht Nr. 8/93 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- Reuter, H.** 1995. *Zur Identifikation nichtlinearer Systemmodelle mit wenig A-priori-Informationen.* Dissertation. Universität Duisburg.
- Schulze, K.** 1993. *Zustandsschätzung nichtlinearer Systeme mittels Approximationen.* Dissertation. Universität Hannover. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 342. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Schwarz, H.** 1990. *ALS-Beobachter und Filter.* Forschungsbericht Nr. 7/90 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- Schwarz, H.** 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: Systemtheoretische Grundlagen.* München: Oldenbourg.
- Schwarz, H.** 1992. *BLS-Beobachter in kanonischer Form.* Forschungsbericht Nr. 4/92 MSRT. Universität –GH– Duisburg.
- Slotine, J.-J. E., J. K. Hedrick** und **E. A. Misawa.** 1987. On sliding observers for nonlinear systems. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control* 109. 245–252.

- Slotine, J.-J. E.** und **W. Li.** 1991. *Applied Nonlinear Control*. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Svensson, T.** 1992. *Mathematical Tools and Software for Analysis and Design of Nonlinear Control Systems*. Dissertation. Dept. of Electrical Engineering. Linköping University. Linköping Studies in Science and Technology. Dissertations. No. 285.
- Thau, F. E.** 1973. Observing the state of non-linear dynamic systems. *Int. J. Control* 17. 471–479.
- Tibken, B.** 1991. *Rechnergestütter Beobachterentwurf für bilineare Systeme*. Dissertation. Universität Hamburg-Harburg.
- Tornambè, A.** 1992. High-gain observers for non-linear systems. *Int. J. Systems Sci.* 23. 1475–1489.
- Tsinias, J.** 1989. Observer design for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 13. 135–142.
- Tsinias, J.** 1990. Further results on the observer design problem. *Systems & Control Letters* 14. 411–418.
- Unbehauen, H.** 1993. *Regelungstechnik III*. Braunschweig: Vieweg.
- van der Schaft, A. J.** 1986. On nonlinear observers. *IEEE Transactions on Automatic Control* 30. 1254–1256.
- Walcott, B. L.** und **S. H. Žak.** 1987. State observation of nonlinear uncertain dynamical systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* 32. 166–170.
- Xia, X.-H.** und **W.-B. Gao.** 1988. On exponential observers for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 11. 319–325.
- Xia, X.-H.** und **W.-B. Gao.** 1989. Nonlinear observer design by observer error linearization. *SIAM J. Control and Optimization* 27. 199–216.
- Yin, X.** 1994. *Zur Identifikation zeitkontinuierlicher nichtlinearer Systeme*. Dissertation. Universität –GH– Duisburg. Fortschr.-Ber. VDI Reihe 8 Nr. 385. Düsseldorf: VDI-Verlag.
- Zeitz, M.** 1987. The extended Luenberger observer for nonlinear systems. *Systems & Control Letters* 9. 149–156.
- Zeitz, M.** 1990. Canonical forms for nonlinear systems. *Nonlinear Control Systems Design: Selected Papers from the IFAC Symposium, Capri 1989*, hg. von A. Isidori. *IFAC Symposia Series*. Number 2. 33–38. Oxford: Pergamon Press.

- Zimmer, G.** 1993. A new algorithm for approximating the state of nonlinear systems.  
*Int. J. Systems Sci.* 24, 777–788.

## A Herleitung der Keller–NBNF 3. Ordnung

Die Keller–NBNF 3. Ordnung lautet

$$\dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} -\alpha_1(y) \\ z_1 - \alpha_2(y) \\ z_2 - \alpha_3(y) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1(y) \\ \beta_2(y) \\ \beta_3(y) \end{bmatrix} u(t) \quad (\text{A.1})$$

$$z_3 = \gamma(y) . \quad (\text{A.2})$$

Die nichtlineare charakteristische Gleichung (3.20) reduziert sich auf

$$0 = \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^3 \gamma(y) + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^2 \alpha_3(y) + \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}} \alpha_2(y) + \alpha_1(y) . \quad (\text{A.3})$$

Die Anwendung des Operators  $\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}$  auf eine Funktion  $v(y) = v(\xi_1)$  liefert wegen der speziellen Struktur des Vektors  $\bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi})$  in Gl. (3.16)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}} v(y) &= \left[ \frac{\partial v(y)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) \\ &= \frac{\partial v(y)}{\partial y} \left[ \frac{\partial y}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \bar{\mathbf{a}}(\boldsymbol{\xi}) = \frac{\partial v(y)}{\partial y} \xi_2 . \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Wendet man den Operator zweifach bzw. dreifach an, dann folgt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^2 v(y) &= \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}(\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}} v(y)) \\ &= \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} \xi_2^2 + \frac{\partial v(y)}{\partial y} \xi_3 \quad \text{bzw.} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^3 v(y) &= \mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}(\mathcal{L}_{\bar{\mathbf{a}}}^2 v(y)) \\ &= \frac{\partial^3 v(y)}{\partial y^3} \xi_2^3 + 3 \frac{\partial^2 v(y)}{\partial y^2} \xi_2 \xi_3 + \frac{\partial v(y)}{\partial y} \bar{a}_3(\boldsymbol{\xi}) . \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Mit den Gln. (A.4), (A.5) und (A.6) wird aus Gl. (A.3)

$$0 = \gamma_{yyy} \xi_2^3 + 3 \gamma_{yy} \xi_2 \xi_3 + \gamma_y \bar{a}_n + \alpha_{2yy} \xi_2^2 + \alpha_{2y} \xi_3 + \alpha_{1y} \xi_2 + \alpha_1 . \quad (\text{A.7})$$

Hierbei wird die Variable  $y$ , nach der abgeleitet wird, als Index hinter die abzuleitende Funktion geschrieben. Die Argumente wurden wegen der besseren Lesbarkeit weggelassen. Es ergibt sich folgende Forderung an  $\bar{a}_n(\boldsymbol{\xi})$ :

$$\begin{aligned} \bar{a}_n(\boldsymbol{\xi}) &= K_1(\xi_1) + K_2(\xi_1) \xi_2 + K_{2,2}(\xi_1) \xi_2^2 + K_{2,2,2}(\xi_1) \xi_2^3 \\ &\quad + K_{2,3}(\xi_1) \xi_2 \xi_3 + K_3(\xi_1) \xi_3 . \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Ist Gl. (A.8) erfüllt, dann sind die Koeffizientenfunktionen  $K_r(\xi_1) = K_r(y)$  festgelegt und die Bestimmungsgleichungen der noch unbekanntenen Funktionen  $\gamma(y)$  und  $\alpha_i(y)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) ergeben sich zu

$$\frac{\gamma_{yyy}}{\gamma_y} = -K_{2,2,2}(\xi_1) , \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\gamma_{yy}}{\gamma_y} = -\frac{1}{3}K_{2,3}(\xi_1) , \quad (\text{A.10})$$

$$\frac{\alpha_{3yy}}{\gamma_y} = -K_{2,2}(\xi_1) , \quad (\text{A.11})$$

$$\frac{\alpha_{2y}}{\gamma_y} = -K_2(\xi_1) , \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{\alpha_{3y}}{\gamma_y} = -K_3(\xi_1) , \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\alpha_1}{\gamma_y} = -K_1(\xi_1) . \quad (\text{A.14})$$

Es sind also 6 Gleichungen für nur 4 Unbekannte zu lösen. Daher sind notwendige Bedingungen für die Integrierbarkeit der Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{2,3}(y)}{\partial y} &= -3\frac{\gamma_{yyy}}{\gamma_y} + 3\left(\frac{\gamma_{yy}}{\gamma_y}\right)^2 \\ &= 3K_{2,2,2}(y) + \frac{1}{3}K_{2,3}^2(y) , \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_3(y)}{\partial y} &= -\frac{\alpha_{3yy}}{\gamma_y} + \frac{\alpha_{3y}}{\gamma_y} \frac{\gamma_{yy}}{\gamma_y} \\ &= K_{2,2,2}(y) + \frac{1}{3}K_3(y)K_{2,3}(y) . \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Sind diese erfüllt, lassen sich die  $\gamma(y)$  und  $\alpha_i(y)$  aus

$$\begin{aligned} \gamma(y) &= C_1 \int \exp\left(-\frac{1}{3} \int K_{2,3}(y) dy\right) dy + C_2 \\ \alpha_3(y) &= \int \left[- \int K_{2,2}(y) \gamma_y(y) dy + C_3\right] dy + C_4 \\ \alpha_2(y) &= - \int K_2(y) \gamma_y(y) dy + C_5 \\ \alpha_1(y) &= -K_1(y) \gamma_y(y) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

berechnen und die gesuchte Transformation  $\mathbf{t}(\mathbf{x})$  zur Beobachternormalform ist festgelegt.

Die Eingangsforderung nach Gl. (3.21) kann für Systeme 3. Ordnung notiert werden:

$$\left[ \frac{\partial w_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \begin{bmatrix} \bar{b}_1(\xi_1) \\ \bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) \\ \bar{b}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} = \beta_1(y) \quad (\text{A.18})$$

$$\left[ \frac{\partial w_2(\xi_1, \xi_2)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \begin{bmatrix} \bar{b}_1(\xi_1) \\ \bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) \\ \bar{b}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} = \beta_2(y) \quad (\text{A.19})$$

$$\left[ \frac{\partial w_3(\xi_1)}{\partial \boldsymbol{\xi}} \right]^T \begin{bmatrix} \bar{b}_1(\xi_1) \\ \bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) \\ \bar{b}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{bmatrix} = \beta_3(y) . \quad (\text{A.20})$$

Aus Gl. (A.20) wird

$$\frac{\partial w_3(\xi_1)}{\partial \xi_1} \bar{b}_1(\xi_1) = \beta_3(y) , \quad (\text{A.21})$$

was wegen  $\xi_1 = y$  immer erfüllt ist. Mit Hilfe der Gln. (3.18), (3.19), (A.4), (A.5) und (A.6) ergeben sich

$$w_2(\xi_1, \xi_2) = \gamma_y \xi_2 + \alpha_3, \quad (\text{A.22})$$

$$w_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \gamma_{yy} \xi_2^2 + \gamma_y \xi_3 + \alpha_{3y} \xi_2 + \alpha_2 \quad (\text{A.23})$$

und damit

$$\left[ \frac{\partial w_2(\xi_1, \xi_2)}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} \gamma_{yy} \xi_2 & \gamma_y & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$\left[ \frac{\partial w_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3)}{\partial \xi} \right]^T = \begin{bmatrix} \gamma_{yyy} \xi_2^2 + \gamma_{yy} \xi_3 + \alpha_{3yy} \xi_2 & \alpha_{3y} + 2\gamma_{yy} \xi_2 & \gamma_y \end{bmatrix}. \quad (\text{A.25})$$

Setzt man Gl. (A.24) in Gl. (A.19) bzw. Gl. (A.25) in Gl. (A.18) ein, dann folgen unmittelbar die Beziehungen

$$\bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) = \bar{k}_{2,1}(\xi_1) + \frac{1}{3} K_{2,3}(\xi_1) \bar{b}_1(\xi_1) \xi_2 \quad (\text{A.26})$$

$$\begin{aligned} \bar{b}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \bar{k}_{3,2}(\xi_1) + \left[ K_{2,2,2}(\xi_1) \xi_2^2 + \frac{1}{3} K_{2,3}(\xi_1) \xi_3 + K_{2,2}(\xi_1) \xi_2 \right] \bar{b}_1(\xi_1) \\ &\quad + \left[ \frac{2}{3} K_{2,3}(\xi_1) \xi_2 + K_3(\xi_1) \right] \bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

als weitere notwendige Bedingungen für die Existenz der NBNF. Für ALS mit vollem Differenzegrad  $d = n$  wird aus Gl. (A.26) und (A.27)

$$\bar{b}_2(\xi_1, \xi_2) = \bar{k}_{2,1}(\xi_1) = 0 \quad (\text{A.28})$$

$$\bar{b}_3(\xi_1, \xi_2, \xi_2) = \bar{k}_{3,2}(\xi_1). \quad (\text{A.29})$$

## B Vektor- und Matrixnormen

### Vektornormen (Barnett 1990)

Für einen Vektor

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \quad (\text{B.1})$$

gilt:

- $p$ -Norm (Hölder-Norm)

$$\|\mathbf{x}\|_p = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad p \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad (\text{B.2})$$

- Summennorm (1-Norm)

$$\|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i| \quad (\text{B.3})$$

- Euklidische Norm (Längennorm)

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|_2 = (\mathbf{x}^T \mathbf{x})^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{1/2} \quad (\text{B.4})$$

- Maximumnorm ( $\infty$ -Norm)

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|) \quad (\text{B.5})$$

### Matrixnormen (Barnett 1990)

Für eine Matrix

$$\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times m} \quad (\text{B.6})$$

gilt entsprechend:

- $p$ -Norm

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\mathbf{x} \neq \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \quad (\text{B.7})$$

- Summennorm

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{B.8})$$

- Euklidische Norm

$$\|\mathbf{A}\| = \|\mathbf{A}\|_2 \tag{B.9}$$

- Euklidische Norm für  $n = m$

$$\|\mathbf{A}\| = [\text{Spur}(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)]^{1/2} = \left( \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2 \right)^{1/2} \tag{B.10}$$

- Maximumnorm

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^m |a_{ij}| \tag{B.11}$$