Regel–Relative: Definition, Vergleich und Anwendung auf dynamische Systeme

Markus Lemmen und Marc Schleuter

Forschungsbericht Nr. 2/95

Meß-, Steuer- und Regelungstechnik

Übersicht: Der vorliegende Bericht leistet einen Beitrag zur Verallgemeinerung der Theorie dynamischer Systeme für allgemeine Systemklassen (nichtlinearer Systeme). Dies geschieht, indem Systemzusammenhänge rein relationaler Natur zur Definition der Systemeigenschaften herangezogen werden. Dafür werden die auf unterschiedlichen Ansätzen beruhenden Definitionen von Regel–Relativen in (Arnold 1993) und (Arnold 1994) auf ihre Eignung hin untersucht, dynamische Systeme beschreiben zu können. Im Rahmen dieser Untersuchung werden die unterschiedlichen Definitionen vor– und gegenübergestellt. Zum einen werden aus der Systemtheorie her bekannte Begriffe wie Zeitinvarianz, Systemtrajektorien sowie Einheitssprung und Übergangsfunktion in die relationale Sprechweise der Regel–Relative übertragen und zum anderen werden Übergangsverfahren zur Ummodellierung von Regel–Relativen in Systeme nach Sontag (1990) und umgekehrt explizit angegeben.

Gerhard-Mercator-Universität - GH Duisburg
Fachgebiet Meß-, Steuer- und Regelungstechnik
Prof. Dr.-Ing. H. Schwarz
*
Fachgebiet Geometrie, Algebra
Prof. Dr. rer. nat. H.-J. Arnold

Inhaltsverzeichnis

Nomenklatur

Skalare Größen

a	Systemkoeffizient in der Systemdifferentialgleichung
m	Dimension des Eingangsvektors
n	Dimension des Zustandsvektors
t	Zeit
t_A	Zeitkomponente des Punktes (der Phase) A
u	Stellgröße
x	Zustandsvariable
x_A	Zustandskomponente des Punktes (der Phase) A

Mengen und Mengentupel

$\emptyset$	Leere Menge
$\diamondsuit$	Leere Abbildung/Relation
$\mathfrak{D}_\Phi$	Definitionsbereich von Φ: Mengen der Quadrupel (t_1, t_0, x_0, w), für die w auf x_0 anwendbar ist
$\mathfrak{E}$	Gleichheitsrelation
K	Stellraum
$\mathfrak{L}$	Binäre Relation auf $\mathfrak{P}$
$\mathbb{N}$	Menge der natürlichen Zahlen (mit 0)
P	Erreichbarkeitsrelation
$\mathfrak{P}$	Punktemenge
$(\mathfrak{P}, P, R, K)$	Regel–Relativ nach Arnold (1993): Quadrupel von Mengen
$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$	Regel–Relativ nach Arnold (1994): Mengentripel
$\mathbf{P}$	Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$
$\Pi \cdot dt$	Abbildungsschar
R	Menge der Punkte aller zum System korrespondierenden Trajektorien
$\mathcal{R}$	Binäre Relation auf der Punktemenge
$\mathcal{R}^{\mathcal{T}}$	Menge der Funktionen von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{R}$
$\mathcal{R}^{\mathcal{T}}_{const.}$	Menge der konstanten Kontrollfunktionen von $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{R}$
$\mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$	Menge der Funktionen vom Intervall $\mathcal{T}$ nach $\mathcal{R}$
$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\mathcal{S}$	Menge von Kontrollfunktionen bzgl. $\mathcal{R}$
$\mathcal{T}$	Zeitmenge
$(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$	System nach Sontag (1990)
$\mathcal{U}$	Stellwertemenge
$\mathcal{V}$	Menge von Kontrollfunktionen bzgl. $\mathcal{U}$
$\mathcal{X}$	Zustandsmenge
Σ	System

Sonstige Formelzeichen

A	Punkt aus einer Punktmenge $(t_A, x_A) := A \in \mathfrak{P}$
B	Punkt aus einer Punktmenge $(t_B, x_B) := B \in \mathfrak{P}$

Operatoren und Funktionen

$1(t)$	Sprungfunktion
$h(t)$	Übergangsfunktion
$\mathrm{pot}\ (\cdot)$	Potenzmenge von $(\cdot)$
$\times$	Kartesisches Mengenprodukt
$\circ$	Komposition, Relationenprodukt
$\overset{t^*}{\vee}$	Konkatenation, Verkettung
Δ	Abweichung von einem Arbeitspunkt
$\dot{(\cdot)}$	Zeitliche Ableitung $\frac{d\,(\cdot)}{dt}$
$\overline{(\cdot)}$	Inverse Relation zu $(\cdot)$
$\lvert(\cdot)\rvert$	Mächtigkeit von $(\cdot)$
$\in$	Element von
$\subset$	Teilmenge (unecht)
$\supset$	Obermenge (unecht)
$\cap$	Schnittmenge
$\cup$	Vereinigungsmenge
$\dot{\bigcup}$	Vereinigung disjunkter Mengen
$\wedge$	UND–Verknüpfung
$\vee$	ODER–Verknüpfung
$\bigwedge$	Allquantor
$\bigvee$	Existenzquantor
$\overset{1}{\bigvee}$	Quantor der eindeutigen Existenz
$\langle\cdot\rangle$	durch $\cdot$ definierte Relation
$\rangle \cdot \langle$	Umkehrrelation zu $\langle\cdot\rangle$
Γ	Übergangsverfahren System $\rightarrow$ Regel–Relativ
L	Übergangsverfahren Regel–Relativ $\rightarrow$ System
Φ	Zustandsüberführungsfunktion
$\mathrm{e}^{(\cdot)}$	Exponentialfunktion

Sonstige Zeichen

$\xrightarrow{bij.}$	Bijektive Zuordnung
$(\quad,\quad)$	Offenes Intervall, $(t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$

$[\quad,\quad]$	Abgeschlossenes Intervall, $[t_0, t_1] \subset \mathcal{T}$
$[\quad,\quad)$	Halgoffenes Intervall, $[t_0, t_1) \subset \mathcal{T}$
$\Rightarrow$	Folgerung
$\succ$	Folgerung unter Vernachlässigung offensichtlicher Neben- und Randbedingungen (z.B. Quantoren)
$\Leftarrow$	Umkehrfolgerung
$\prec$	Umkehrfolgerung unter Vernachlässigung offensichtlicher Neben- und Randbedingungen
$\Leftrightarrow$	Äquivalenz
$\succ\!\!\!\prec$	Äquivalenz unter Vernachlässigung offensichtlicher Neben- und Randbedingungen
$f: \begin{cases} \mathcal{A} & \rightarrow & \mathcal{B} \\ x & \mapsto & f(x) \end{cases}$	Definition der Abbildung (Funktion) f als Abbildung von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ mit der Abbildungsvorschrift $x \mapsto f(x)$

1 Einleitung

In den letzten Jahren wurden zunehmend Fortschritte in der Verallgemeinerung der linearen Systemtheorie auf nichtlineare Systeme gemacht. So ist es z.B. mit Hilfe der Differentialgeometrie (Isidori 1989, Nijmeijer und van der Schaft 1991, Schwarz 1991) und der Differentialalgebra (Fliess und Glad 1993, Fliess 1991) möglich, bereits höchst komplexe Nichtlinearitäten zu beschreiben. Dabei existiert jedoch im Rahmen der Systembeschreibung und -analyse mit differentialgeometrischen Hilfsmitteln die Einschränkung auf Systeme, die hinreichend oft differenzierbar (glatt bzw. analytisch) sein müssen. Diese Anforderung wird im Rahmen der Differentialalgebra nicht explizit an die das System beschreibenden Differentialgleichungen bzw. Differentialgleichungssysteme gestellt. Dafür ist es im Bereich der Differentialalgebra nicht bzw. nur äußerst schwer möglich, Systeme mit in sich geschlossenen Koordinaten zu beschreiben. Aus diesem Grund ergibt sich die Notwendigkeit zur Entwicklung einer allgemeineren Systemtheorie als der bisher üblichen. In diesem Bericht[1] soll nun ein erster Schritt in diese Richtung erfolgen.

Für die Beschreibung möglichst allgemeingültiger und sogar nicht funktionaler (bzw. beliebiger) Zusammenhänge (wie z.B. mit Hilfe von Fuzzy–Systemen) bietet sich insbesondere ein relationentheoretischer Ansatz an. Bereits Zadeh und Desoer (1963) schlagen eine Systembeschreibung mit Hilfe relationentheoretischer Methoden vor, haben diesen Ansatz jedoch nicht weiter verfolgt. Ein auf diesem Prinzip beruhender Ansatz wird erst seit der Einführung von Fuzzy–Relationalgleichungen (di Nola u. a. 1989, Kruse u. a. 1993) und Fuzzy–Relational–Modellen (Kruse u. a. 1993, Bertram und Schwarz 1993, Küpper 1994) aufgegriffen. Zu diesem Zweck werden in dem vorliegenden Bericht die auf unterschiedlichen Ansätzen beruhenden Begriffe der Regel–Relative nach (Arnold 1993, Arnold 1994) auf ihre Eignung hin überprüft, dynamische Systeme beschreiben und unterteilen zu können.

Ein Regel–Relativ ist eine algebraische Struktur, die der Systembeschreibung dient. Die wesentlichen Informationen über das System und seine dynamischen Eigenschaften sind in der Punktemenge und der zugehörigen Relationenmenge enthalten. Der Aufbau der Punktemenge aus einer Zeit– und einer Zustandsmenge ermöglicht eine Beschreibung sowohl zeitinvarianter als auch zeitvarianter Prozesse. Durch die Verwendung der relationalen Sprechweise für die Modellierung der Beziehungen zwischen den Punkten wird die Forderung nach einer größtmöglichen Allgemeingültigkeit berücksichtigt.

Im Einzelnen stellt Abschnitt 2 die Definition des Regel–Relativs nach Arnold (1993) vor und überträgt die Begriffe der Zeitinvarianz und einer verallgemeinerten Parallelität auf den Begriff des Regel–Relativs. Anhand des einfach nachvollziehbaren Beispiels eines PT_1–Systems werden dann diese Begriffe erläutert, und dem regelungstechnisch interessierten Ingenieur wird ein Zugang zu dieser Theorie eröffnet. Der Abschnitt 3 erläutert die

[1]Die Ergebnisse dieses Berichts entstanden im Rahmen des von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Projekts Schw 120/55-1 „Algebraische Strukturanalyse nichtlinearer- und Fuzzy-Systeme“.

Definition des Regel–Relativs nach Arnold (1994), die Synonymität dieses Begriffs zum Systembegriff nach Sontag (1990) und gibt ein Übergangsverfahren für die Ummodellierung von Systemen in Regel–Relative und umgekehrt explizit an. Ferner wird gezeigt, daß der Begriff der Zeitinvarianz auch hier auf Regel–Relative übertragbar ist und die Synonymität dabei nicht verloren geht. Für eine bessere Vergleichbarkeit des Regel–Relativs mit dem Systembegriff nach Sontag (1990) wird auch die sogenannte Vollständigkeit übertragen. Abschnitt 4 stellt dann die beiden Definitionen der Regel–Relative gegenüber und untersucht die vorhandenen Schwierigkeiten bei einer Systembeschreibung mit Hilfe der Regel–Relative. Mit Zusammenfassung und Ausblick für die nächsten Forschungsschritte schließt dieser Bericht in Abschnitt 5. Eine Einführung in die Begriffe Relation und Relativ liefert Anhang A. Dabei werden die grundlegenden relationentheoretischen Definitionen und Schreibweisen zusammengefaßt und anhand von einfachen Beispielen erläutert. Anhang B beinhaltet die Definition des Systembegriffs nach Sontag (1990) und die der Isomorphie, Zeitinvarianz und Vollständigkeit von Systemen. Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden der Beweis und zugehörige Lemmata zur Synonymität von Regel–Relativen und Systemen in Anhang C zusammengefaßt.

2 Regel–Relativ–Definition nach Arnold (1993)

2.1 Definition, Bemerkungen und Veranschaulichung anhand eines PT_1-Systems

Definition 2.1 nach (Arnold 1993)

Wir sprechen von einem *Regel–Relativ*, wenn uns ein Quadrupel von Mengen

$$(\mathfrak{P}, P, R, K) \tag{2.1}$$

gegeben ist und dabei die folgenden Bedingungen erfüllt werden:

1. $\mathfrak{P} \subset \mathbb{R} \times \mathcal{X}$ für eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$
   oder
   $\mathfrak{P} \subset \mathbb{N} \times \mathcal{X}$ für eine Menge $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$.

   Die Elemente der Menge $\mathfrak{P}$ heißen „Punkte". Jeder Punkt $A \in \mathfrak{P}$ kann in der Form $A = (t, x)$ mit $t \in \mathbb{R}$ (oder $t \in \mathbb{N}$) und $x \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}^n$ geschrieben werden.

2. $P \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P}$ ist eine zweistellige Relation auf der Menge $\mathfrak{P}$. Stehen zwei Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ in Relation P zueinander, so gilt

   $$APB \tag{2.2}$$

   und man sagt „von A aus ist B erreichbar". P heiße *Erreichbarkeitsrelation.*

3. R ist eine Menge von binären Relationen auf der Menge $\mathfrak{P}$ der Punkte. Damit ist jedes Element $\mathfrak{L} \in R$ eine zweistellige Relation auf $\mathfrak{P}$:

   $$R \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \quad . \tag{2.3}$$

4. Die Menge K steht für eine (konvexe) Teilmenge des *Stellraums* $\mathbb{R}^m$ mit

   $$\left\{ \begin{array}{lcl} R & \stackrel{bij.}{\to} & K \subset \mathbb{R}^m \\ \mathfrak{L} & \mapsto & u(\mathfrak{L}) \in K \quad . \end{array} \right. \tag{2.4}$$

Desweiteren soll das so gebildete Regel–Relativ folgende Axiome erfüllen:

2.I Ist B von A aus erreichbar mit $A, B \in \mathfrak{P}$, so gilt $t_A < t_B$:

$$APB \succ t(A) < t(B) \quad . \tag{2.5}$$

Dabei heißt

$$AP := \{B | APB\} \tag{2.6}$$

die Menge der von A aus erreichbaren Punkte.

2.II *Zeit–Funktions–Postulat*
Setzt man für jedes $\Delta t > 0$ ($\Delta t \in \mathbb{R}$ oder $\Delta t \in \mathbb{N}$) die zweistellige Relation (Δt) wie folgt an

$$A(\Delta t)B \quad :\Leftrightarrow \quad -t(A) + t(B) = \Delta t \tag{2.7}$$

und schreibt kurz $\mathfrak{L}\Delta t$ für $\mathfrak{L} \cap (\Delta t)$ mit einem beliebigem $\mathfrak{L} \in R$, so ist $\mathfrak{L}\Delta t$ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in sich.

2.III *Einfache Transitivität*
Zu je zwei Punkten $A, B \in \mathfrak{P}$ gibt es genau eine Relation $\mathfrak{L} \in R$ mit $A\mathfrak{L}B$, sofern APB gilt:

$$P = \dot{\bigcup_{\mathfrak{L}\in R}} \mathfrak{L} \tag{2.8}$$

(d.h. P ist die disjunkte[2] Vereinigung der $\mathfrak{L} \in R$).
Dieses Axiom der *einfachen Transitivität* kann auch wie folgt definiert werden:

$$APB \quad \Leftrightarrow \quad \bigvee_{\mathfrak{L}\in R}^{1} A\mathfrak{L}B \quad . \tag{2.9}$$

2.IV *Idempotenz*
Die Verkettung einer Relation $\mathfrak{L} \in R$ mit sich selbst ergibt die ursprüngliche Relation $\mathfrak{L}$:

$$\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \quad . \tag{2.10}$$

□

Bemerkung 2.1 zu Definition 2.1

zu 1. Hierbei fungiert t als Zeit, während x im Zielgrößenbereich angegliedert ist. Zur Vereinfachung der Schreibweise wird im folgenden die verallgemeinerte Zeitmenge als $\mathcal{T}$ geschrieben, wobei $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{T} \subset \mathbb{N}$ zu setzen ist.

zu 2. Dabei ist daran gedacht, daß es in dem darzustellenden System einen solchen festen Eingang gibt, daß eine Zielkurve durch A bei diesem Eingangssignal den Punkt B erreicht.

zu 2.II Um die Zeit– und Zustandskomponente eines Punktes anzusprechen, wird allgemein folgende Schreibweise verwendet:

[2](Bronsteijn und Semendjajew 1991)

Für $A = (t_A, x_A)$ setze $t(A) := t_A$ und $x(A) := x_A$.

zu 2.II Setzt man für $\Delta t = 0$ und $\mathfrak{L} \in R$

$$A\mathfrak{L}\Delta t := A \qquad \text{für alle } A \in \mathfrak{P} \tag{2.11}$$

so ist $\mathfrak{L}\Delta t$ auch für $\Delta t = 0$ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in sich.
Es gilt für alle $\Delta t \geq 0$:

$$A\mathfrak{L}\Delta tB \Leftrightarrow A\mathfrak{L}B \wedge -t_A + t_B = \Delta t \qquad . \tag{2.12}$$

zu 4. und 2.III Die Relationen $\mathfrak{L} \in R$ stellen die dem System zu Grunde liegenden Schemata dar, mit denen es auf einen Stellwert reagiert. Zu jedem $\mathfrak{L}$ gehört also ein gemäß Gl. (2.4) definierter Stellwert.

Die Axiome 2.II **und** 2.III garantieren, daß die Menge (der *Nachbereich* von A bzgl. $\mathfrak{L}$)

$$A\mathfrak{L} := \{B | A\mathfrak{L}B\} \tag{2.13}$$

als zeitabhängige Kurve (*Systemkurve*) gedeutet werden kann, die bei festem Stellwert in der von A aus erreichbaren Menge verläuft und daß die von A aus erreichbare Menge AP von diesen Kurven $A\mathfrak{L}$ disjunkt überdeckt wird (in Bild 2.1 ist dieser Zusammenhang in der $\mathfrak{P}$–Ebene graphisch erläutert).

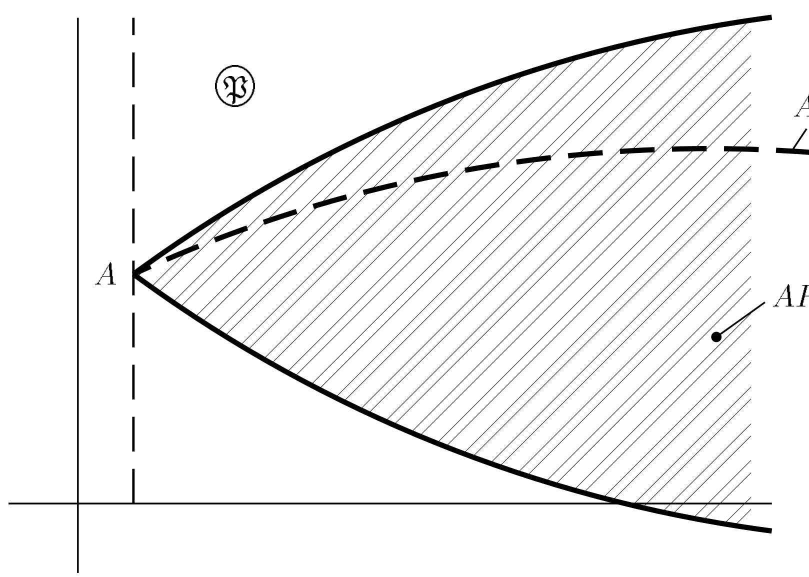

Bild 2.1: Zur Interpretation der Axiome 2.II und 2.III aus Definition 2.1

□

Beispiel 2.1

Zur Veranschaulichung des Regel–Relativbegriffs dient ein einfaches, lineares, zeitinvariantes System der Ordnung $m = n = 1$:

$$\mathfrak{P} := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \qquad (\mathcal{X} = \mathbb{R}) \qquad . \tag{B 2.1-1}$$

Die Punkte $A \in \mathfrak{P}$ des Relativs in diesem Beispiel besitzen die Gestalt $A = (t_A, x_A) = (t(A), x(A))$ mit $t_A = t(A) \in \mathbb{R}$ und $x_A = x(A) \in \mathbb{R}$; dabei gilt

$$APB \;:\Leftrightarrow\; t_A < t_B \qquad . \tag{B 2.1-2}$$

B ist also von A aus genau dann erreichbar, wenn die Zeitkomponente t_A von A kleiner ist als die Zeitkomponente t_B von B. In

$$R := \{\langle u\rangle | u \in \mathbb{R}\} \qquad , \tag{B 2.1-3}$$

wird jede Relation $\mathfrak{L}$ dieser Relationenmenge von einer reellen Zahl u erzeugt (Stellwert), so daß $\mathfrak{L} = \langle u\rangle$ gilt.

$$K := \mathbb{R} \qquad , \tag{B 2.1-4}$$

wobei die Bijektion zwischen $K = \mathbb{R}$ und R durch die Abbildung der Relation $\mathfrak{L} = \langle u\rangle$ auf u gegeben ist.

Die Relationen $\langle u\rangle$ werden nun durch die Differentialgleichung $\dot{x} = ax + u$ mit $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$ wie folgt definiert:

$$A\langle u\rangle B \quad :\Leftrightarrow \quad \begin{cases} -t_A + t_B =: \Delta t > 0 \quad \wedge \\ \bigvee_{x(t)} \Big[\; \dot{x} = ax + u \quad \wedge \\ \qquad A = (t_A, x(t_A)) \quad \wedge \\ \qquad B = (t_A + \Delta t, x(t_A + \Delta t)) \Big] \end{cases} \qquad . \tag{B 2.1-5}$$

Da man die lineare Differentialgleichung mit der Anfangsbedingung $x(t_A) = x_A$ eindeutig lösen kann, gilt

$$A\langle u\rangle B \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -t_A + t_B =: \Delta t > 0 \quad \wedge \\ x_B = \; \mathrm{e}^{a(t_B - t_A)} \left(x_A + \dfrac{u}{a} \right) - \dfrac{u}{a} \end{cases} \qquad . \tag{B 2.1-6}$$

Ein gemäß (B 2.1-1) bis (B 2.1-5) gebildetes Quadrupel $(\mathfrak{P}, P, R, K)$ stellt ein Regel–Relativ dar, genügt also den Axiomen 2.I bis 2.IV aus Definition 2.1. Dies wird im folgenden begründet.

Zunächst gilt 2.I definitionsgemäß nach Gl. (B 2.1-2).
Zum Nachweis der Eigenschaft 2.II aus Definition 2.1 muß gezeigt werden, daß für alle $\mathfrak{L} = \langle u \rangle \in R$, $\Delta t > 0$ und $A = (t_A, x_A)$

$$|A\langle u \rangle \Delta t| = |A\mathfrak{L}\Delta t| \stackrel{!}{=} 1 \tag{B 2.1-7}$$

gilt, womit die Abbildungseigenschaft von $\mathfrak{L}\Delta t = \langle u \rangle \Delta t$ belegt wird. Zu zeigen ist also

$$A\langle u \rangle \Delta t \stackrel{!}{\neq} \emptyset \ \wedge \ \left[A\langle u \rangle \Delta t B_1 \wedge A\langle u \rangle \Delta t B_2 \ \stackrel{!}{\Rightarrow} \ B_1 = B_2\right] \tag{B 2.1-8}$$

mit $B_1 = (t_{B_1}, x_{B_1})$, $B_2 = (t_{B_2}, x_{B_2})$.
Die Existenzaussage folgt für $t_B = \Delta t + t_A$ aus Gl. (B 2.1-6).
Der Nachweis der Eindeutigkeit erfolgt für die Zeit– und Zustandskomponenten getrennt. Für die Zeitkomponente gilt

$$\langle u \rangle \Delta t = \langle u \rangle \cap \Delta t \quad \stackrel{(2.7)}{\Rightarrow} \quad t_{B_1} = t_A + \Delta t = t_{B_2} \qquad . \tag{B 2.1-9}$$

Weiterhin läßt sich nach Definition der Relationen $\langle u \rangle$ und Gl. (B 2.1-6) für die Zustandskomponente folgern:

$$\left.\begin{aligned} x_{B_1} &= \mathrm{e}^{a\left(t_{B_1}-t_A\right)}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} \\ x_{B_2} &= \mathrm{e}^{a\left(t_{B_2}-t_A\right)}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} \end{aligned}\right\} \tag{B 2.1-10}$$

$$\Rightarrow x_{B_1} = e^{a\Delta t}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} = x_{B_2}. \tag{B 2.1-11}$$

Insgesamt folgt also aus den Gln. (B 2.1-9) und (B 2.1-11) die Behauptung Gl. (B 2.1-8) und damit auch Gl. (B 2.1-7):

$$B_1 = (t_{B_1}, x_{B_1}) = (t_{B_2}, x_{B_2}) = B_2 \qquad .$$

Man erhält so eine Darstellung für $A\langle u \rangle \Delta t$ mit $A = (t_A, x_A) \in \mathfrak{P}$ und $\langle u \rangle \in R$ für dieses Beispiel zu:

$$A\langle u \rangle \Delta t = \left(t_A + \Delta t,\, e^{a\Delta t}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right) \tag{B 2.1-12}$$

Als nächstes wird die Gültigkeit der Eigenschaft 2.III für das Beispiel nachgewiesen. Gilt APB für $A, B \in \mathfrak{P}$ (also $t_A < t_B$), so gilt $A\langle u \rangle B$ für genau diejenige Relation $\langle u \rangle$, die mit

$$u = -a\frac{x_B\ \mathrm{e}^{-at_B} - x_A\ \mathrm{e}^{-at_A}}{\mathrm{e}^{-at_B} - \mathrm{e}^{-at_A}} \in \mathbb{R} \tag{B 2.1-13}$$

gebildet wird. Sei $(t_A, x_A)\langle u\rangle(t_B, x_B)$ gegeben, dann folgt nach Gl. (B 2.1-6):

$$
\begin{aligned}
& x_B = \mathrm{e}^{a(t_B-t_A)}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{u}{a}\left(1 - \mathrm{e}^{a(t_B-t_A)}\right) = -x_B + \mathrm{e}^{a(t_B-t_A)} x_A \\
\Leftrightarrow\ & u = -a\frac{x_B\,\mathrm{e}^{-at_B} - x_A\,\mathrm{e}^{-at_A}}{\mathrm{e}^{-at_B} - \mathrm{e}^{-at_A}} \qquad .
\end{aligned}
\tag{B 2.1-14}
$$

Als letztes muß nun noch die Idempotenz ($\mathfrak{L}\circ\mathfrak{L} \stackrel{!}{=} \mathfrak{L}$) für dieses Beispiel nachgewiesen werden. Also ist zu zeigen:

$$\langle u\rangle \circ \langle u\rangle \stackrel{!}{=} \langle u\rangle \qquad . \tag{B 2.1-15}$$

Für zwei Punkte $A, B \in \mathfrak{P}$ ist also die Äquivalenz

$$A(\langle u\rangle \circ \langle u\rangle)B \stackrel{!}{\Leftrightarrow} A\langle u\rangle B \tag{B 2.1-16}$$

nachzuweisen. Zunächst wird die Folgerung bewiesen:

$$
\begin{aligned}
& A(\langle u\rangle \circ \langle u\rangle)B && \\
\stackrel{(A.5)}{\Longrightarrow}\ & A\langle u\rangle C \wedge C\langle u\rangle B && \text{für ein } C = (t_C, x_C) \in \mathfrak{P} \\
\Longrightarrow\ & A\langle u\rangle\Delta t_1 C \wedge C\langle u\rangle \Delta t_2 B && \text{mit } \begin{array}{l}\Delta t_1 = -t_A + t_C \\ \Delta t_2 = -t_C + t_B\end{array} \\
\stackrel{(B\,2.1-12)}{\Longrightarrow}\ & \left\{\begin{array}{l} x_C = e^{a\Delta t_1}\left(x_A + \dfrac{u}{a}\right) - \dfrac{u}{a} \\ x_B = e^{a\Delta t_2}\left(x_C + \dfrac{u}{a}\right) - \dfrac{u}{a} \end{array}\right. && \text{mit } \begin{array}{l}\Delta t_1 = -t_A + t_C \\ \Delta t_2 = -t_C + t_B\end{array} \\
\Longrightarrow\ & x_B = e^{a(\Delta t_1+\Delta t_2)}\left(x_a + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} && \text{mit } \begin{array}{l}\Delta t_1 = -t_A + t_C \\ \Delta t_2 = -t_C + t_B\end{array} \\
\stackrel{(B\,2.1-12)}{\Longrightarrow}\ & A\langle u\rangle(\Delta t_1 + \Delta t_2)B && \text{mit } \Delta t_1 + \Delta t_2 = -t_A + t_B \\
\Longrightarrow\ & A\langle u\rangle B \qquad . &&
\end{aligned}
$$

Zur Umkehrfolgerung: Da in diesem Beispiel als Zeitmenge $\mathcal{T}$ die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ dient, kann man zu jedem Element $\Delta t \in \mathbb{R}$, $\Delta t > 0$ geeignete Δt_1, $\Delta t_2 \in \mathbb{R}$, $\quad \Delta t_1, \Delta t_2 > 0$ mit $\Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t$ finden. Damit erhält man

$$
\begin{aligned}
& A\langle u\rangle B && \\
\stackrel{(2.12)}{\Rightarrow}\ & A\langle u\rangle \Delta t B && \text{für } \Delta t = t_B - t_A > 0 \\
\Rightarrow\ & A\langle u\rangle(\Delta t_1 + \Delta t_2)B && \begin{array}{l}\text{für beliebige } \Delta t_1, \Delta t_2 > 0 \\ \text{mit } \Delta t_1 + \Delta t_2 = \Delta t \qquad .\end{array}
\end{aligned}
$$

Nach Axiom 2.II gilt

$$A\langle u\rangle\Delta t_1 = C \text{ für ein } C \text{ mit } t_C = t_A + \Delta t \qquad .$$

Für die Zustandskomponente des Punktes C ergibt sich mit Gl. (B 2.1-12):

$$x_C = \mathrm{e}^{a\Delta t_1}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} \qquad . \tag{B 2.1-17}$$

Somit sind folgende Umformungen richtig:

$$\begin{aligned}
C\langle u\rangle\Delta t_2 &\overset{(B\,2.1-12)}{=} \left(t_C + \Delta t_2,\ \mathrm{e}^{a\Delta t_2}\left(x_C + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right) \\
&\overset{(B\,2.1-17)}{=} \left(t_A + \Delta t_1 + \Delta t_2,\ \mathrm{e}^{a(\Delta t_1 + \Delta t_2)}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right) \\
&= \left(t_A + \Delta t,\ \mathrm{e}^{a\Delta t}\left(x_A + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right) \\
&\overset{(B\,2.1-12)}{=} B \qquad .
\end{aligned}$$

Man hat so einen Punkt C gefunden, für den $A\langle u\rangle C \quad \wedge \quad C\langle u\rangle B$ gilt. Damit ist $A(\langle u\rangle \circ \langle u\rangle)B$ nachgewiesen und die Äquivalenz gemäß Gl. (B 2.1-16) erfüllt. Insgesamt ist damit gezeigt, daß es sich bei dem Beispiel um ein Regel–Relativ handelt.

Zeitinvariante, lineare Systeme der Form $\dot{x}(t) = ax(t) + u$ mit $a, t, u \in \mathbb{R}$ $(a \neq 0)$ stellen somit Regel–Relative dar. □

Satz 2.1
Für alle $\mathfrak{L} \in R$ eines gegebenen Regel–Relativs $(\mathfrak{P}, P, R, K)$ gilt:

1. *Irreflexivität*

$$\mathfrak{L} \cap \mathfrak{E} \neq \emptyset \tag{2.14}$$

($\mathfrak{E}$ bezeichnet hier die Gleichheitsrelation auf der Menge $\mathfrak{P}$)

2. *Antisymmetrie*

$$\mathfrak{L} \cap \overline{\mathfrak{L}} = \emptyset \tag{2.15}$$

($\overline{\mathfrak{L}}$ bezeichnet die zu $\mathfrak{L}$ inverse Relation).

3. Für alle $\Delta t_i > 0$ $(i = 1, 2)$ gilt

$$(\mathfrak{L}\Delta t_1) \circ (\mathfrak{L}\Delta t_2) = \mathfrak{L}(\Delta t_1 + \Delta t_2) \qquad . \tag{2.16}$$

Beweis

Die Gln. (2.14) und (2.15) folgen bereits aus 2.I.

Zum Beweis von Gl. (2.16):

Da es sich wegen 2.III auf beiden Seiten der Gleichung um Abbildungen handelt, genügt es eine der beiden behaupteten Inklusionen zu zeigen. Es wird beweisen

$$[(\mathfrak{L}\Delta t_1) \circ (\mathfrak{L}\Delta t_2)] \overset{!}{\subset} [\mathfrak{L}(\Delta t_1 + \Delta t_2)] \qquad .$$

Diese Behauptung ist äquivalent zu der Implikation

$$A[(\mathfrak{L}\Delta t_1) \circ (\mathfrak{L}\Delta t_2)]B \overset{!}{\Rightarrow} A[\mathfrak{L}(\Delta t_1 + \Delta t_2)]B$$

für beliebige $A,\, B \in \mathfrak{P}$. Es gilt

$$\begin{array}{lll} & & A[(\mathfrak{L}\Delta t_1) \circ (\mathfrak{L}\Delta t_2)]B \\ \Rightarrow & \bigvee\limits_{C \in \mathfrak{P}} & A(\mathfrak{L}\Delta t_1)C \wedge C(\mathfrak{L}\Delta t_2)B \\ \overset{(2.12)}{\Rightarrow} & \bigvee\limits_{C \in \mathfrak{P}} & A\mathfrak{L}C \wedge C\mathfrak{L}B \wedge -t(A) + t(C) = \Delta t_1 \wedge -t(C) + t(B) = \Delta t_2 \\ \Rightarrow & & A(\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L})B \wedge -t(A) + t(B) = \Delta t_1 + \Delta t_2 \\ \overset{2.III}{\Rightarrow} & & A[\mathfrak{L}(\Delta t_1 + \Delta t_2)]B \qquad . \end{array}$$

Damit ist die Behauptung gezeigt. □

2.2 Darstellung der Systemtrajektorien durch $\mathfrak{L}$–Kurven

In diesem Unterabschnitt wird eine Möglichkeit zur Übertragung des Begriffs der Systemtrajektorien durch sogenannte $\mathfrak{L}$*–Kurven* auf Regel-Relative vorgestellt. Dazu wird definiert:

Definition 2.2 nach Arnold (1993)

Eine Funktion

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{T} \supset \; [t_0, \infty) & \rightarrow & \mathfrak{P} \\ t & \mapsto & A(t) = (t, x(t)) \end{array} \right.$$

heißt eine $\mathfrak{L}$*–Kurve*, wenn für alle $\Delta t > 0, t > t_0$

$$A(t)\mathfrak{L}\Delta t = A(t + \Delta t) \tag{2.17}$$

gilt. Diese Funktion ist eine $\mathfrak{L}$*–Kurve mit dem Anfangspunkt* A_0, wenn zusätzlich die Bedingung

$$A_0 = A(t_0) \tag{2.18}$$

erfüllt ist. □

Die Möglichkeit zur Konstruktion einer $\mathfrak{L}$–Kurve liefert

Satz 2.2

Zu einem beliebigen Anfangspunkt $A_0 = (t_0, x_0)$ und $\mathfrak{L} \in R$ ist

$$A(t) := A_0\mathfrak{L}(t - t_0) \quad \text{für } t \geq t_0 \tag{2.19}$$

eine $\mathfrak{L}$–Kurve.

Beweis

Zu zeigen ist, daß die unter Gl. (2.19) definierte Funktion $A(t)$ den Eigenschaften (2.17) und (2.18) aus Definition 2.2 genügt:
Die Eigenschaft (2.18) folgt direkt aus $A_0\mathfrak{L}(t_0 - t_0) = A_0\mathfrak{L}0 := A_0$ nach Gl. (2.11).
Zum Nachweis von Gl. (2.17) formt man um

$$\begin{aligned} A(t)\mathfrak{L}\Delta t &\overset{(2.19)}{=} [A_0\mathfrak{L}(-t_0 + t)]\mathfrak{L}\Delta t \\ &= A_0[\mathfrak{L}(-t_0 + t) \circ \mathfrak{L}\Delta t] \\ &\overset{(2.16)}{=} A_0\mathfrak{L}(-t_0 + t + \Delta t) \\ &\overset{(2.19)}{=} A(t + \Delta t) \quad . \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.2 zu Definition 2.2 und Satz 2.2:

Die nach Arnold (1993) definierten $\mathfrak{L}$–Kurven stellen aus regelungstheoretischer Sicht die zum System gehörigen Systemtrajektorien im Phasenraum, also in der $\mathcal{T} \times \mathcal{X}$–Ebene, dar. Zur Darstellung der Trajektorien im Zustandsraum als bezüglich t paramatrisierte Kurve wird nun die zu einer $\mathfrak{L}$–Kurve zugehörige $\mathfrak{L}_{\mathcal{X}}$–Kurve definiert:

Definition 2.3

Es sei $A(t) : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathfrak{P}$ eine $\mathfrak{L}$–Kurve. Dann ist die *zu $A(t)$ gehörige $\mathfrak{L}_{\mathcal{X}}$–Kurve $x_A(t)$* die Abbildung:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \mathcal{T} \supset \; [t_0, \infty) & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ t & \longmapsto & x_A(t) := x(A(t)) \end{array} \right. \quad . \tag{2.20}$$

Die $\mathfrak{L}_{\mathcal{X}}$–Kurve besitzt den Anfangspunkt $x_0 = x(t_0)$, wenn $A(t)$ den Anfangspunkt $A_0 = (t_0, x_0)$ besitzt. □

2.3 Zeitinvarianz

In (Arnold 1993) wird anhand zweier Beispiele aufgezeigt, wie Systemeigenschaften spezieller Systeme in der Sprache der Regel–Relative beschrieben werden können. Dies soll nun in diesem Abschnitt am Beispiel der wohlbekannten Systemeigenschaft der Zeitinvarianz und in Abschnitt 2.4 anhand eines Parallelitätsaxioms erläutert werden.

Definition 2.4 nach Arnold (1993)
Ein gegebenes Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, P, R, K)$ heißt *zeitinvariant*, wenn die folgende Bedingung erfüllt ist:

2.V Für alle $A, B \in \mathfrak{P}$ und alle $\Delta t > 0$ gilt

$$x(A) = x(B) \Rightarrow x(A\mathfrak{L}\Delta t) = x(B\mathfrak{L}\Delta t) \quad . \tag{2.21}$$

□

Der Zeitinvarianzbegriff für Regel–Relative besitzt also eine völlig analoge Bedeutung zu dem bekannten Zeitinvarianzbegriff für dynamische Systeme: Sind zwei unterschiedliche Anfangspunkte $A, B \in \mathfrak{P}$ mit denselben Zustandskomponenten $x_A = x_B$ gegeben und wendet man auf diese Punkte die Relation $\mathfrak{L}$ (Steuerung u) an, so resultieren nach einer Zeitdifferenz Δt die Punkte $A\mathfrak{L}\Delta t$ und $B\mathfrak{L}\Delta t$. Diese besitzen die identischen Zustandskomponenten $x(A\mathfrak{L}\Delta t) = x(B\mathfrak{L}\Delta t)$ (vgl. Bild 2.2).

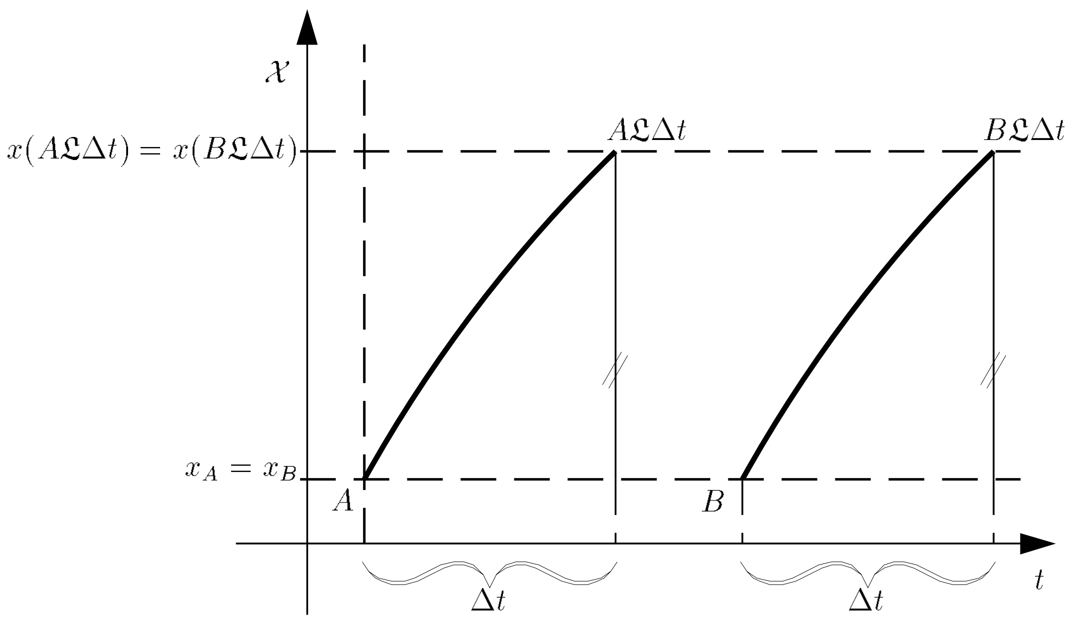

Bild 2.2: Zur Interpretation des zeitinvarianten Regel–Relativs

Ist ein Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, P, R, K)$ zeitinvariant (Bild 2.2), so kann man für $\mathfrak{L} \in R$ und $A \in \mathfrak{P}$ setzen:

$$(x(A))\mathfrak{L}\Delta t := x(A\mathfrak{L}\Delta t), \tag{2.22}$$

denn wenn sich $x(A)$ und $x(B)$ entsprechen, so gilt dies auch (nach Gl. (2.21)) für die rechten Seiten.
Weiter kann man

$$x\mathfrak{L}\Delta t := x(A\mathfrak{L}\Delta t) \text{ für beliebiges } A \in \mathfrak{P} \text{ mit } x(A) = x \tag{2.23}$$

sowie

$$x\mathfrak{L} := x(A\mathfrak{L}) \text{ für beliebiges } A \in \mathfrak{P} \text{ mit } x(A) = x \tag{2.24}$$

definieren (die Wohldefiniertheit folgt aus Gl. (2.21)). $\mathfrak{L}$ wird also im zeitinvarianten Regel–Relativ auch als binäre Relation auf $\mathcal{X}$ aufgefaßt.
Da für $x(A\mathfrak{L}) = \{x(B)|B \in \mathfrak{P} \wedge A\mathfrak{L}B\}$ gilt, ist

$$x\mathfrak{L}x' \Leftrightarrow \bigvee_{t\in\mathcal{T}} \bigvee_{t'\in\mathcal{T}} (t,x)\mathfrak{L}(t',x') \qquad . \tag{2.25}$$

Insbesondere erhält man mit diesen Bezeichnungen (unter Verwendung der Gln. (2.23) und (2.25))

$$x\mathfrak{L}\Delta t x' \succ x\mathfrak{L}x' \qquad , \tag{2.26}$$

da

$$\begin{aligned} x\mathfrak{L}\Delta t x' &\overset{(2.23)}{\Rightarrow} x(A\mathfrak{L}\Delta t) = x' \text{ für } A = (t_0, x) \\ &\overset{2.\text{II}}{\Rightarrow} A\mathfrak{L}\Delta t = (t_0 + \Delta t, x') \\ &\Rightarrow (t_0, x)\mathfrak{L}\Delta t(t_0 + \Delta t, x') \\ &\Rightarrow (t_0, x)\mathfrak{L}(t_0 + \Delta t, x') \\ &\overset{(2.25)}{\Rightarrow} x\mathfrak{L}x' \end{aligned}$$

gefolgert werden kann. □

Beispiel 2.2

Das in Beispiel 2.1 vorgestellte System stellt – wie oben bewiesen – ein Regel–Relativ dar. Desweiteren handelt es sich dabei um ein zeitinvariantes System. In diesem Beispiel wird nun bewiesen, daß damit das Regel–Relativ ebenfalls zeitinvariant ist, d.h. es ist zu zeigen, daß die Eigenschaft (2.21) mit $\mathfrak{L} = \langle u \rangle$ erfüllt ist:

$$x(A) = x(B) \overset{!}{\Rightarrow} x(A\langle u\rangle\Delta t) = x(B\langle u\rangle\Delta t) \qquad . \tag{B 2.2-1}$$

Es seien nun zwei Punkte A, $B \in \mathfrak{P}$ mit $x(A) = x(B) =: x$ und $\Delta t > 0$ gegeben. Es gilt also $A = (t_A, x)$, $B = (t_B, x)$. Aus

$$\begin{aligned} A\langle u\rangle\Delta t &\overset{(B\,2.1-12)}{=} \left(t_A + \Delta t,\ \mathrm{e}^{a\Delta t}\left(x + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right) \\ B\langle u\rangle\Delta t &\overset{(B\,2.1-12)}{=} \left(t_B + \Delta t,\ \mathrm{e}^{a\Delta t}\left(x + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a}\right) \end{aligned} \tag{B 2.2-2}$$

folgt also

$$x(A\langle u\rangle\Delta t) = \mathrm{e}^{a\Delta t}\left(x + \frac{u}{a}\right) - \frac{u}{a} = x(B\langle u\rangle\Delta t) \qquad . \tag{B 2.2-3}$$

Zeitinvariante, lineare Systeme der Form $\dot{x} = ax + u$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$ sind also in zeitinvariante Regel–Relative überführbar. □

Für zeitinvariante Regel–Relative kann man bei Vernachlässigung der Zeitkomponente der Punktemenge die $\mathfrak{L}$–Kurven nur unter Zuhilfenahme der Zustandsmenge, also durch die $\mathcal{X}$–Komponente, charakterisieren:

Satz 2.3

Es sei $\mathfrak{L} \in R$ beliebig. Dann ist die Abbildung

$$\begin{cases} \mathcal{T} \supset \; [t_0, \infty) & \longrightarrow \; \mathcal{X} \\ \qquad\quad t & \longmapsto \; x(t) \end{cases}$$

eine $\mathfrak{L}_\mathcal{X}$-Kurve genau dann, wenn

$$x(t)\mathfrak{L}\Delta t = x(t + \Delta t) \text{ für alle } \Delta t > 0, t > t_0 \tag{2.27}$$

gilt und eine $\mathfrak{L}_\mathcal{X}$-Kurve mit Anfangspunkt x_0, wenn zusätzlich

$$x(t_0) = x_0. \tag{2.28}$$

erfüllt ist. Die zugehörige $\mathfrak{L}$–Kurve besitzt die Gestalt $A(t) = (t, x(t))$.

Beweis

(i) Es sei $x(t)$ eine $\mathfrak{L}_\mathcal{X}$–Kurve, d.h., es existiert eine $\mathfrak{L}$–Kurve $A(t)$ mit $x(A(t)) = x(t)$. Dann läßt sich für $x(t)$ Gl. (2.27) zeigen:

$$\begin{aligned} x(t)\mathfrak{L}\Delta t &\overset{(2.23)}{=} x(A(t)\mathfrak{L}\Delta) \\ &\overset{(2.17)}{=} x(A(t + \Delta t)) \\ &= x(t + \Delta t) \quad . \end{aligned}$$

(ii) Es sei $x : [t_0, \infty) \longrightarrow \mathcal{X}$ mit der Eigenschaft (2.27) gegeben. Nachzuweisen ist Gl. (2.17) für $A(t) := (t, x(t))$:

$$\begin{aligned} A(t)\mathfrak{L}\Delta t &= (t, x(t))\mathfrak{L}\Delta t \\ &= (t + \Delta t, x(t)\mathfrak{L}\Delta t) \\ &\overset{(2.27)}{=} (t + \Delta t, x(t + \Delta t)) \\ &= A(t + \Delta t) \quad . \end{aligned}$$

□

Wegen des vorangegangenen Satzes ist es möglich, allgemein bei zeitinvarianten Regel–Relativen von einer $\mathfrak{L}$–Kurve zu sprechen, auch wenn eine $\mathfrak{L}_\mathcal{X}$-Kurve gemeint ist.

2.4 Parallelisierungsaxiom für Regel-Relative

In diesem Abschnitt werden unter Regel–Relativen zunächst grundsätzlich zeitinvariante Regel–Relative verstanden.

Definition 2.5 nach Arnold (1993)

Ein gegebenes Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, P, R, K)$ erfüllt das *Parallelisierungsaxiom*, wenn es das folgende Zusatzaxiom erfüllt:

2.VI *Parallelisierungsaxiom*

Für alle $x_i \in \mathcal{X}\,(i = 1, 2)$ und alle $\mathfrak{L} \in R$ gilt

$$x_1 \mathfrak{L} x_2 \quad \Rightarrow \quad \bigwedge_{c\in\mathcal{X}} \bigvee_{\mathfrak{L}^c} (x_1 + c)\mathfrak{L}^c(x_2 + c) \qquad . \tag{2.29}$$

□

Bemerkung 2.3

Regel–Relative, die das Parallelisierungsaxiom gemäß Definition 2.5 erfüllen, können zur Vereinfachung in den Koordinatenursprung verschoben und dort untersucht werden. Die dort gefundenen Ergebnisse behalten ihre Gültigkeit im gesamten Zustandsraum $\mathcal{X}$. □

Ein zum Axiom 2.VI gleichwertiges Postulat liefert

Satz 2.4

Das Axiom 2.VI in einem Regel-Relativ ist äquivalent zu

2.VI' Beschreibt $x(t)$ eine $\mathfrak{L}$–Kurve, so gibt es zu jedem $c \in \mathcal{X}$ ein $\mathfrak{L}^c \in R$ derart, daß $x(t) + c$ eine $\mathfrak{L}^c$-Kurve darstellt.

Für zeitinvariante Regel–Relative gilt also 2.VI $\Leftrightarrow$ 2.VI'.

Beweis

2.VI$\overset{!}{\Rightarrow}$2.VI':

$x(t)$ sei eine $\mathfrak{L}$–Kurve, und $c \in \mathcal{X}$ sowie $\Delta t > 0$ seien beliebig gegeben. Nach Gl. (2.27) gilt

$$x(t)\mathfrak{L}\Delta t = x(t + \Delta t) \qquad .$$

Hieraus folgt mit Gl. (2.26)

$$x(t)\mathfrak{L}x(t + \Delta t) \qquad .$$

Daher existiert wegen der vorausgesetzten Eigenschaft 2.VI eine Relation $\mathfrak{L}^c \in R$, so daß

$$\begin{aligned} & (x(t) + c)\mathfrak{L}^c(x(t + \Delta t) + c) \\ \Rightarrow\ & (x(t) + c)\mathfrak{L}^c\Delta t(x(t + \Delta t) + c) \\ \Rightarrow\ & (x(t) + c)\mathfrak{L}^c\Delta t = x(t + \Delta t) + c \end{aligned}$$

gilt. Damit erfüllt $x(t) + c$ die Gl. (2.27) und ist daher eine $\mathfrak{L}^c$-Kurve für die Relation $\mathfrak{L}^c \in R$.

$2.\text{VI}\overset{!}{\Rightarrow}2.\text{VI}$:

Es sei $x_1\mathfrak{L}x_2$ für $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ vorgegeben. Nach Gl. (2.25) gilt

$$(t_1, x_1)\mathfrak{L}(t_2, x_2)$$

für geeignete $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$. Die Funktion $x(t) := x_1\mathfrak{L}(t - t_1)$ ist eine $\mathfrak{L}$–Kurve mit Anfangspunkt $x_1 = x(t_1)$. Setze $x_2 := x(t_2)$. Somit existiert nach 2.VI' zu $c \in \mathcal{X}$ eine Relation $\mathfrak{L}^c \in R$, so daß $x(t) + c$ eine $\mathfrak{L}^c$-Kurve darstellt. Für alle $\Delta t > 0$ gilt somit:

$$(x(t) + c)\mathfrak{L}^c\Delta t = x(t + \Delta t) + c \qquad .$$

Insbesondere mit $\Delta t = t_2 - t_1 > 0$ und $t = t_1$ erhält man

$$(x(t_1) + c)\mathfrak{L}^c x(t_1 + t_2 - t_1) + c \qquad .$$

Also gilt $(x_1 + c)\mathfrak{L}^c(x_2 + c)$ und 2.VI ist damit nachgewiesen. □

Beispiel 2.3

In diesem Beispiel soll nun die Frage nach der Gestalt der $\mathfrak{L}$–Kurven für zeitinvariante Systeme der Form $\dot{x} = ax + u$ aus Beispiel 2.1 beantwortet werden. Es muß also die Gleichung

$$x(t)\langle u\rangle\Delta t = x(t + \Delta t) \qquad \text{für alle } \Delta t > 0, t > t_0 \tag{B 2.3-1}$$

erfüllt sein. Diese Gleichung (B 2.3-1) wird befriedigt, wenn $x(t)$ und $x(t + \Delta t)$ auf einer Lösungskurve der zugrundeliegenden Differentialgleichung ohne Anfangsbedingung liegen:

$$x(t) = C\ \mathrm{e}^{at} - \frac{u}{a} \qquad , C = konst. \tag{B 2.3-2}$$

Dabei gilt, daß die Lösungskurven (B 2.3-2) $\langle u\rangle$–Kurven sind. Gezeigt wird Gl. (B 2.3-1) unter Verwendung von Gl. (B 2.1-12):

$$\begin{aligned} x(t)\langle u\rangle\Delta t &\overset{(B\,2.3-2)}{=} \left(C\ \mathrm{e}^{at} - \frac{u}{a}\right)\langle u\rangle\Delta t \\ &\overset{(B\,2.1-12)}{=} C\ \mathrm{e}^{a\Delta t}\left[\left(C\ \mathrm{e}^{at} - \frac{u}{a}\right) + \frac{u}{a}\right] - \frac{u}{a} \\ &= C\ \mathrm{e}^{a(t+\Delta t)} - \frac{u}{a} \\ &\overset{(B\,2.3-2)}{=} x(t + \Delta t) \qquad . \end{aligned} \tag{B 2.3-3}$$

Verlangt man, daß der Anfangspunkt $x(t_0) = x_0$ festgelegt ist, so erreicht man dies in der Darstellung nach Gl. (B 2.3-2) durch festlegen der Konstanten C:

$$\begin{aligned} & x(t_0) = C\ \mathrm{e}^{at_0} - \frac{u}{a} \\ \Leftrightarrow\quad & C = \left(x(t_0) + \frac{u}{a}\right)\ \mathrm{e}^{at_0} \qquad . \end{aligned} \tag{B 2.3-4}$$

Zuletzt soll nun in diesem Beispiel gezeigt werden, daß das in Beispiel 2.1 definierte Regel–Relativ dem Parallelisierungs–Axiom genügt. Dafür wird die Bedingung 2.VI nachgewiesen:

Es seien $x_1, x_2 \in \mathcal{X}$ gegeben mit $x_1 \langle u \rangle x_2$. $c \in \mathcal{X}$ sei beliebig aber fest vorgegeben. Gesucht ist dann eine Relation $\langle u \rangle^c \in R$, so daß $(x_1 + c)\langle u \rangle^c (x_2 + c)$ gilt.
Setze

$$\langle u \rangle^c := \langle u - ac \rangle \qquad . \tag{B 2.3-5}$$

Wegen der Voraussetzung $x_1 \langle u \rangle x_2 \qquad (t_1, x_1)\langle u \rangle (t_2, x_2)$ nach Gl. (2.25), gilt für geeignete $t_1, t_2 \in \mathcal{T}$ und damit nach Gl. (B 2.1-6)

$$x_2 = \mathrm{e}^{a(t_2 - t_1)} \left(x_1 + \frac{u}{a} \right) - \frac{u}{a} \qquad .$$

$$\begin{aligned} x_2 + c &= \mathrm{e}^{a(t_2 - t_1)} \left(x_1 + \tfrac{u}{a} \right) - \tfrac{u}{a} + c \\ &= \mathrm{e}^{a(t_2 - t_1)} \left((x_1 + c) + \tfrac{u - ac}{a} \right) - \tfrac{u - ac}{a} \qquad . \end{aligned}$$

Also gilt unter Verwendung von Gl. (B 2.1-6)

$$(t_1, x_1 + c)\langle u - ac \rangle (t_2, x_2 + c)$$

und daher

$$(x_1 + c)\langle u - ac \rangle (x_2 + c) \qquad .$$

Damit ist die Eigenschaft 2.VI für das Beispiel erfüllt.

Für die $\mathfrak{L}$–Kurven ergibt sich mittels des zu 2.VI äquivalenten und in diesem Beispiel daher ebenfalls gültigen Postulats 2.VI' folgende Aussage:
Ist $x(t)$ eine $\langle u \rangle$–Kurve, dann ist zu $c \in \mathcal{X} \quad x(t) + c$ eine $\langle u - ac \rangle$–Kurve.
Für eine $\langle u \rangle$–Kurve $x(t) = Ce^{at} - \dfrac{u}{a}$ nach Gl. (B 2.3-2) ergibt sich

$$x(t) + c = C\ \mathrm{e}^{at} - \frac{u}{a} + c = C\ \mathrm{e}^{at} - \frac{u - ac}{a} \qquad . \tag{B 2.3-6}$$

Damit ist $x(t) + c$ eine $\langle u - ac \rangle$–Kurve. □

3 Regel–Relativ–Definition nach Arnold (1994)

3.1 Definition und Erläuterungen

Definition 3.1 (Arnold 1994)
Wir sprechen von einem *Regel–Relativ*

$$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt) \;, \tag{3.1}$$

wenn vorgegeben werden

- als *Zeitmenge* eine Untergruppe[3] $\mathcal{T}(+) < \mathbb{R}(+)$,
- eine nicht leere Menge $\mathcal{X}$, deren Elemente *Zustände* heißen,
- eine nicht leere Menge $\mathcal{R}$ von binären Relationen auf der Grundmenge $\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}$,

$$\mathcal{R} \subset \operatorname{pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \tag{3.2}$$

- eine Abbildungsschar $\Pi \cdot dt$, in der zu jedem Paar $t_0, t_1 \in \mathcal{T}$ mit $t_0 \leq t_1$ eine Abbildung

$$\left[\Pi_{t_0}^{t_1} \cdot dt\right] : \begin{cases} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \operatorname{pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P}) \\ \Omega & \longmapsto & \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt\right] \end{cases} \tag{3.3}$$

existiert[4].

Zudem müssen folgende Axiome gelten:

3.I

$$\bigwedge_{x \in \mathcal{X}} \; \bigvee_{t_0 < t_1} \; \bigvee_{\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}} \quad (t_0, x) \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt\right] \neq \emptyset, \tag{3.4}$$

3.II

$$(t_0, x_0) \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt\right] (t_1, x_1) \;\wedge (t_0, x_0) \left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt\right] (t_1, x_1') \;\Rightarrow x_1 = x_1', \tag{3.5}$$

3.III

$$\left[\Pi_{t_0}^{t^*} \Omega_1 dt\right] \circ \left[\Pi_{t^*}^{t_1} \Omega_2 dt\right] = \left[\Pi_{t_0}^{t_1} (\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2) dt\right]; \tag{3.6}$$

hierbei bezeichnet $\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2 \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ die Verkettung von Ω_1 und Ω_2 in t^*:

$$\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2 := \begin{cases} \Omega_1(t) & \text{falls } t \in [t_0, t^*) \\ \Omega_2(t) & \text{falls } t \in [t^*, t_1) \end{cases} \quad , \tag{3.7}$$

---

[3] Unter der Schreibweise $\mathcal{T}(+) < \mathbb{R}(+)$ ist eine Teilmenge $\mathcal{T}$ der reellen Zahlen zu verstehen, die eine abgeschlossene Gruppe bezüglich der Addition als Gruppenoperation darstellt.

[4] Jeder Funktion $\Omega : [t_0, t_1) \to \mathcal{R}$ wird also eine binäre Relation $\left[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt\right]$ auf $\mathfrak{P}$ zugeordnet.

3.IV

$$\bigwedge_{\mathfrak{L}\in\mathcal{R}} \left[\Pi_{t_0}^{t_1}\mathfrak{L}dt\right] = \mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}, \tag{3.8}$$

wobei $\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}$ die gemäß

$$(t_0', x_0)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}(t_1', x_1) :\Leftrightarrow t_1 = t_1' \wedge t_0 = t_0' \wedge (t_0', x_0)\mathfrak{L}(t_1', x_1) \tag{3.9}$$

erklärte Relation und $\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\,\mathfrak{L}\,dt\right] = \left[\Pi_{t_0}^{t_1}\,\Omega_{\mathfrak{L}}\,dt\right]$ für $\Omega_{\mathfrak{L}} \equiv \mathfrak{L}$ auf $[t_0, t_1)$ zu setzen ist und

3.V

$$\bigwedge_{t_0\in\mathcal{T}} \bigwedge_{x\in\mathcal{X}} (t_0, x)\left[\Pi_{t_0}^{t_0}\Diamond dt\right](t_0, x) \tag{3.10}$$

gilt für die leere Abbildung $\Diamond \in \mathcal{R}^{[t_0,t_0)}$. □

Dieser Regel–Relativ–Begriff erweist sich als synonym zu dem in Sontag (1990) definierten abstrakten System–Begriff (Anhang B), der sich an der Definition eines dynamischen Systems von Kalman u. a. (1969) orientiert. Auch in dieser Definition des Regel–Relativs ist – wie in Definition 2.1 – unter $\mathfrak{P}$ der Phasenraum und unter $\mathcal{X}$ der Zustandsraum zu verstehen. Mittels der Relationenmenge $\mathcal{R}$ werden die konstanten Stellfunktionen modelliert. Die Abbildungsschar $\Pi\cdot dt$ dient zur Beschreibung nicht notwendigerweise konstanter Kontrollfunktionen.

3.2 Übergangsverfahren zwischen Systemen und Regel–Relativen

Um die Synonymität der beiden Begriffe nachzuweisen, sind zwei sich bis auf Isomorphie[5] umkehrende Übergangsverfahren L und Γ derart anzugeben, daß L jedem Regel–Relativ gemäß Definition 3.1 ein System (im Sinne von Definition B.1) und Γ jedem System ein Regel–Relativ (Definition 3.1) zuordnet. Diese Übergangsverfahren werden folgendermaßen definiert:

Definition 3.2

$(\mathfrak{P} = \mathcal{T}\times\mathcal{X}, \mathcal{R}, \Pi\cdot dt)$ sei ein Regel–Relativ gemäß Definition 3.1. Dann erzeugt das folgende Übergangsverfahren L ein Quadrupel $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) = (\mathfrak{P} = \mathcal{T}\times\mathcal{X}, \mathcal{R}, \Pi\cdot dt)$L:

Aus $\mathfrak{P} = \mathcal{T}\times\mathcal{X}$ sind die ersten beiden Komponenten $\mathcal{T}$ und $\mathcal{X}$ des zu definierenden Quadrupels $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ zu entnehmen.

[5](Gellert u. a. 1981)

Zusätzlich wird gesetzt:

$$\mathcal{U} := \mathcal{R}, \tag{3.11}$$

$\Phi : \mathfrak{D}_\Phi \longrightarrow \mathcal{X}$ mit dem Definitionsbereich

$$\mathfrak{D}_\Phi := \Big\{(t_1, t_0, x_0, \Omega) | t_0 \leq t_1; \quad x_0 \in \mathcal{X}; \quad \Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}; \quad (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big] \neq \emptyset\Big\} \tag{3.12}$$

und der Abbildungsvorschrift

$$(t_1, t_0, x_0, \Omega)\Phi = x_1 :\Leftrightarrow (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1, x_1) \quad . \tag{3.13}$$

Die Wohldefiniertheit der Abbildung ist durch Gl. (4.5) gesichert.

□

Definition 3.3

Es sei $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ ein System gemäß Definition B.1. Mittels des Übergangsverfahrens Γ wird dann ein Tripel $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt) = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma$ wie folgt erzeugt:

$$\mathfrak{P} := \mathcal{T} \times \mathcal{X}, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{R} := \{\langle u \rangle | u \in \mathcal{U}\}, \tag{3.15}$$

wobei $\langle u \rangle$ gemäß

$$(t_0, x_0)\langle u \rangle(t_1, x_1) :\Leftrightarrow (t_1, t_0, x_0, w_u)\Phi = x_1 \tag{3.16}$$

mit $w_u(t) \equiv u$ für alle $t \in [t_0, t_1)$ erklärt sei. Für $t_0 \leq t_1,\ t_0, t_1 \in \mathcal{T},\ \Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ wird die Relation $\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big]$ auf $\mathfrak{P}$ durch

$$(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1, x_1) :\Leftrightarrow \bigvee_{w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}} \Omega = \langle w \rangle \wedge (t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \tag{3.17}$$

erklärt. $\Omega = \langle w \rangle$ bedeutet dabei: $\Omega(t) = \langle w(t) \rangle$ für alle $t \in [t_0, t_1)$. □

Bemerkung 3.1

Die durch Gl. (3.15) erklärbare Abbildung

$$\langle \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ u & \longmapsto & \langle u \rangle \end{cases}$$

mit $\langle u \rangle$ gemäß Gl. (3.16) ist eine Bijektion, so daß die Umkehrabbildung

$$\rangle \cdot \langle : \begin{cases} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \mathfrak{L} & \longmapsto & \rangle \mathfrak{L} \langle \end{cases}$$

existiert und ebenfalls eine Bijektion ist. Beide Abbildungen lassen sich fortsetzen zu Bijektionen zwischen $\mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ und $\mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ für $t_0 < t_1$:

$$\langle \cdot \rangle : \begin{cases} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} \\ w & \longmapsto & \langle w \rangle \quad \text{mit } \langle w \rangle(t) := \langle w(t) \rangle \end{cases}$$

und ebenso

$$\rangle \cdot \langle : \begin{cases} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} \\ \Omega & \longmapsto & \rangle \Omega \langle \quad \text{mit } \rangle \Omega \langle (t) := \rangle \Omega(t) \langle. \end{cases}$$

Beweis

Der Beweis erfolgt in Anhang C (Lemmata C.1, C.2). □

Die Synonymität der Klasse der Regel–Relative zu der Klasse der Systeme liefert

Satz 3.1 (Arnold 1994)
Aus einem Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ entsteht durch Anwendung des Übergangsverfahrens L gemäß Definition 3.2 ein System $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) = (\mathfrak{P} = \mathcal{T} \times \mathcal{X}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)\mathrm{L}$.

Aus einem System $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ entsteht durch Anwendung des Übergangsverfahrens Γ gemäß Definition 3.3 ein Regel-Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt) = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma$.

Ferner gilt für alle Regel–Relative $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ und alle Systeme $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$:

$$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)\mathrm{L}\Gamma = (\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt) \tag{3.18}$$

und

$$(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma\mathrm{L} \cong (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) \qquad . \tag{3.19}$$

Dabei bedeutet „$\cong$“ Isomorphie gemäß Definition B.2.

Beweis

Satz 3.1 wird in Anhang C (Sätze C.1–C.4) bewiesen. □

Regel–Relative und Systeme sind also synonyme Begriffe, denn die Übergangsverfahren Γ und L kehren einander (bis auf Isomorphie) um.

3.3 Einheitssprung und Übergangsfunktion

Zur Veranschaulichung der Synonymität zwischen Systemen und Regel–Relativen wird im folgenden Beispiel sowohl der Einheitssprung $u(t) = 1(t)$ als auch die Übergangsfunktion $h(t)$ auf die Sprechweise der Regel–Relative übertragen.

Beispiel 3.1 Der Einheitssprung ist definiert durch

$$1(t) := \begin{cases} 0 \text{ für } t < 0 \\ 1 \text{ für } t \geq 0 \end{cases} \qquad . \tag{B 3.1-1}$$

Gemäß Definition B.6 kann diese Eingangsfunktion $u(t)$ wie folgt modelliert werden:

$$u(t) = 1(t) = \left(w_0 \overset{t^*}{\vee} w_1\right)(t) \qquad , \tag{B 3.1-2}$$

mit $t^* = 0$, $w_0 \equiv 0$ und $w_1 \equiv 1$. Somit ist

$$\begin{aligned} \Omega := \langle u(t) = 1(t) \rangle \quad &= \quad \langle w_0 \overset{t^*}{\vee} w_1 \rangle \\ &\underset{\text{Lemma } C.3}{=} \quad \langle w_0 \rangle \overset{t^*}{\vee} \langle w_1 \rangle \quad . \end{aligned} \tag{B 3.1-3}$$

Wird nun gesetzt

$$\Omega_0 := \langle w_0 \rangle \text{ und } \Omega_1 := \langle w_1 \rangle, \tag{B 3.1-4}$$

so ergibt sich unter der Voraussetzung $t_0 < 0$ und $t_1 \geq 0$

$$\begin{aligned} & (t_0, x_0) \Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \langle 1(t) \rangle dt \Big] (t_1, x_1) \\ \Longleftrightarrow \quad & (t_0, x_0) \Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \Omega dt \Big] (t_1, x_1) \\ \overset{(B\,3.1-3)}{\Longleftrightarrow} \quad & (t_0, x_0) \Big[\Pi_{t_0}^{t_1} (\Omega_0 \overset{t^*}{\vee} \Omega_1) dt \Big] (t_1, x_1) \\ \overset{(3.6)}{\Longleftrightarrow} \quad & (t_0, x_0) \Big(\Big[\Pi_{t_0}^{t^*} \Omega_0 dt \Big] \circ \Big[\Pi_{t^*}^{t_1} \Omega_1 dt \Big] \Big(t_1, x_1 \Big) \\ \overset{(3.8)}{\Longleftrightarrow} \quad & (t_0, x_0) \Big(\langle 0 \rangle |_{t_0}^{t^*} \circ \langle 1 \rangle |_{t^*}^{t_1} \Big) (t_1, x_1) \quad . \end{aligned} \tag{B 3.1-5}$$

Ist x_0 eine Ruhelage, so kann gefolgert werden

$$(t_0, x_0) \langle 0 \rangle |_{t_0}^{t^*=0} (0, x_0) \quad \text{und} \quad (0, x_0) \langle 1 \rangle |_{t^*=0}^{t_1} (t_1, x_1) \quad . \tag{B 3.1-6}$$

Gemäß (Sontag 1990) gilt für die Übergangsfunktion

$$(t_0, t_1, x_0, 1(t)) \Phi = x_1 =: h(t_1) \qquad \text{für alle } t_1 \geq t_0 \quad . \tag{B 3.1-7}$$

Mittels $\langle 1 \rangle$ läßt sich nun die Übergangsfunktion für alle $t_1 \geq 0$ modellieren:

$$(t_0, x_0) \Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \langle 1(t) \rangle dt \Big] (t_1, h(t_1)) \;\Leftrightarrow (0, x_0) \langle 1 \rangle |_{t_0}^{t_1} (t_1, h(t_1)) \quad . \tag{B 3.1-8}$$

□

3.4 Eigenschaften konstanter Kontrollfunktionen

Satz 3.2

In einem Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ gelten für konstante Kontrollfunktionen $\Omega_{\mathfrak{L}} \equiv \mathfrak{L} \in \mathcal{R}$ die Aussagen:

1.

$$(t_0, x_0) \mathfrak{L} |_{t_0}^{t_1} (t_1, x_1) \;\wedge\; (t_0, x_0) \mathfrak{L} |_{t_0}^{t_1} (t_1, x_2) \;\Rightarrow\; x_1 = x_2 \tag{3.20}$$

2.
$$\bigwedge_{t_0 \leq t^* \leq t_1} \mathfrak{L}|_{t_0}^{t^*} \circ \mathfrak{L}|_{t^*}^{t_1} = \mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1} \tag{3.21}$$

3.
$$\bigwedge_{t_0 \in \mathcal{T}} \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} (t_0, x)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_0}(t_0, x) \tag{3.22}$$

4.
$$\mathfrak{L} = \bigcup_{t_0 \leq t_1 \in \mathcal{T}} \mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1} \tag{3.23}$$

5.
$$\bigwedge_{\mathfrak{L} \in \mathcal{R}} \mathfrak{L} \circ \mathfrak{L} = \mathfrak{L} \tag{3.24}$$

6. Setzt man für $\Delta t \geq 0$ die zweistellige Relation (Δt) gemäß Gleichung (2.7) an, so ergibt sich für $\mathfrak{L}\Delta t := \mathfrak{L} \cap (\Delta t)$
$$\mathfrak{L}\Delta t = \bigcup_{t_1 - t_0 = \Delta t} \mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1} \quad . \tag{3.25}$$

7. Für alle $\Delta t \geq 0$ ist $\mathfrak{L}\Delta t$ eine Abbildung von $\mathfrak{P}$ in sich und es gilt
$$A\mathfrak{L}\Delta t = A\mathfrak{L}|_{t_A}^{t_A + \Delta t} \text{ für } A = (t_A, x_A) \quad . \tag{3.26}$$

Beweis

Die Aussage 1. folgt aus Gl. (3.5), 2. aus Gl. (3.6) und 3. aus Gl. (3.10). Der Beweis von 4. und 6. ergibt sich aus der Definition von $\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}$ in Gl. (3.9).
Zum Nachweis von 5.: Es gelten die folgenden äquivalenten Umformungen:

$$\begin{aligned}
(t_0, x_0)(\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L})(t_1, x_1) &\Leftrightarrow \bigvee_{t_0 \leq t^* \leq t_1} \bigvee_{x^* \in \mathcal{X}} (t_0, x_0)\mathfrak{L}(t^*, x^*) \wedge (t^*, x^*)\mathfrak{L}(t_1, x_1) \\
&\Leftrightarrow \bigvee_{t_0 \leq t^* \leq t_1} \bigvee_{x^* \in \mathcal{X}} (t_0, x_0)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t^*}(t^*, x^*) \wedge (t^*, x^*)\mathfrak{L}|_{t^*}^{t_1}(t_1, x_1) \\
&\Leftrightarrow \bigvee_{t_0 \leq t^* \leq t_1} (t_0, x_0) \left(\mathfrak{L}|_{t_0}^{t^*} \circ \mathfrak{L}|_{t^*}^{t_1}\right)(t_1, x_1) \\
&\overset{(3.21)}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}(t_1, x_1) \\
&\Leftrightarrow (t_0, x_0)\mathfrak{L}(t_1, x_1) \quad .
\end{aligned}$$

Die Behauptung 7. wird mit Gl. (3.25) unter Berücksichtigung von Gl. (3.9) bewiesen. □

3.5 Zeitinvarianz

Bei der Formulierung eines Zusatzaxioms für die Regel–Relative gemäß Definition 3.1, welches die Zeitinvarianz ausdrückt, ist darauf zu achten, daß der synonyme Zusammenhang, der zwischen Regel–Relativen und Systemen besteht, auch zwischen den durch dieses Zusatzaxiom gekennzeichneten „zeitinvarianten Regel–Relativen“ und „zeitinvarianten Systemen“ (wie in B.3 definiert) wiederum hergestellt ist. Sie lautet

Definition 3.4

Ein Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ heißt *zeitinvariant*, wenn folgendes Axiom erfüllt ist:

3.VI *Zeitinvarianz*

$$\bigwedge_{t_0<t_1} \bigwedge_{t^*\in\mathcal{T}} \bigwedge_{\Omega\in\mathcal{R}^{[t_0,t_1)}} (t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1,x_1) \Rightarrow (t_0+t^*,x_0)\Big[\Pi_{t_0+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*}dt\Big](t_1+t^*,x_1) \tag{3.27}$$

mit $\Omega^{t^*} \in \mathcal{R}^{[t_0+t^*,t_1+t^*)}$ gemäß $\Omega^{t^*}(t) := \Omega(t-t^*)$. □

Die Rechtfertigung für diese Definition liefert

Satz 3.3

Es sei ein zeitinvariantes Regel–Relativ **P** gemäß Definition 3.4 gegeben. Dann ist das zugehörige System Σ=**PL** nach Definition B.3 zeitinvariant. Umgekehrt ist ein zu einem zeitinvarianten System Σ gehöriges Regel–Relativ **P**= $\Sigma\Gamma$ zeitinvariant.

Beweis

(i) Es sei das Axiom 3.VI (Zeitinvarianz) in einem Regel–Relativ **P** erfüllt. Ferner seien $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}, x \in \mathcal{X}$ und $t^* \in \mathcal{T}$ gegeben, so daß w auf x anwendbar[6] ist. Damit kann gefolgert werden:

$$\begin{array}{rcl} & (t_1,t_0,x_0,w)\Phi = x_1 & \text{für ein } x_1 \in \mathcal{X} \\ \overset{(3.17)}{\Rightarrow} & (t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1,x_1) & \text{mit } \Omega = \langle w \rangle \\ \overset{(3.27)}{\Rightarrow} & (t_0+t^*,x_0)\Big[\Pi_{t_0+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*}dt\Big](t_1+t^*,x_1) & \text{mit } \Omega^{t^*} = \langle w^{t^*} \rangle \\ \overset{(3.17)}{\Rightarrow} & (t_1+t^*,t_0+t^*,x_0,w^{t^*})\Phi = x_1 & \text{mit } w^{t^*} = \rangle\Omega\langle^{t^*} \quad . \end{array}$$

Damit ist die Zeitinvarianz des Systems **PL** nachgewiesen.

[6]nach Sontag (1990) bzw. Definition B.1

(ii) Es sei ein zeitinvariantes Sytem Σ mit dem zugehörigen Regel–Relativ **P**$= \Sigma\Gamma$ gegeben. Dann gilt:

$$
\begin{array}{lll}
 & (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1, x_1) & \\
\overset{(3.13)}{\Rightarrow} & (t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 & \text{mit } w = \rangle\Omega\langle \\
\overset{(B.20)}{\Rightarrow} & (t_1 + t^*, t_0 + t_1, x_0, w^{t^*})\Phi = x_1 & \text{mit } w^{t^*} = \rangle\Omega\langle^{t^*} \\
\overset{(3.13)}{\Rightarrow} & (t_0 + t^*, x_0)\Big[\Pi_{t_0+t^*}^{t_1+t^*}\Omega^{t^*} dt\Big](t_1 + t^*, x_1) & \text{mit } \Omega^{t^*} = \langle w^{t^*}\rangle \quad .
\end{array}
$$

□

3.6 Vollständigkeit

In Analogie zum Vollständigkeitsbegriff nach Sontag (1990) (Definition B.4) wird angesetzt

Definition 3.5

Es sei $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \bigcup_{t_0 \leq t_1} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$. Dann heißt das Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ $\mathcal{S}$*–vollständig*, wenn in Verstärkung von Axiom 3.I gilt:

$$
\bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigwedge_{t_0 < t_1} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{S}} \quad \Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} \Rightarrow (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big] \neq \emptyset \qquad . \tag{3.28}
$$

Ist ein System $\mathcal{S}$–vollständig für $\mathcal{S} = \bigcup_{t_0 \leq t_1} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$, so nennt man es kurz *vollständig*.

Für eine Menge $\mathcal{S} \subset \mathcal{R}^{\mathcal{T}}$ heißt das Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ $\mathcal{S}$–vollständig, wenn gilt:

$$
\bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigwedge_{t_0 < t_1} \bigwedge_{\Omega \in \mathcal{S}} \quad (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega|_{[t_0,t_1)} dt\Big] \neq \emptyset \qquad . \tag{3.29}
$$

□

Satz 3.4

Ein Regel–Relativ **P**$=(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ gemäß Definition 3.1 ist genau dann $\mathcal{S}$–vollständig für $\mathcal{S} \subset \bigcup_{t_0 \leq t_1} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$, wenn das zugehörige System $\Sigma =$ **PL** $\rangle\mathcal{S}\langle$–vollständig ist. Dabei werde

$$
\rangle\mathcal{S}\langle := \{\rangle\Omega\langle | \Omega \in \mathcal{S}\} \subset \bigcup_{t_0 \leq t_1} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} \tag{3.30}
$$

mit $\rangle\Omega\langle$ gemäß Bemerkung 3.1 definiert.

Beweis

Der Beweis erfolgt über die Zwischenbehauptungen (i) und (ii):

(i) Ist $\mathbf{P}$ $\mathcal{S}$–vollständig, so ist $\mathbf{P}$L $\rangle\mathcal{S}\langle$–vollständig.

(ii) Ist ein System Σ $\mathcal{V}$–vollständig für $\mathcal{V} \subset \bigcup_{t_0 \le t_1} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$, so ist das Regel–Relativ $\mathbf{P}=\Sigma\Gamma$ $\langle\mathcal{V}\rangle$–vollständig, wobei

$$\langle\mathcal{V}\rangle := \{\langle w\rangle | w \in \mathcal{V}\} \subset \bigcup_{t_0 \le t_1} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} \tag{3.31}$$

gesetzt sei.

Aus (ii) folgt dann die Umkehrung von (i), da für ein $\rangle\mathcal{S}\langle$–vollständiges System $\mathbf{P}$L (ii) anwendbar ist, d.h., mit $\mathcal{V} = \rangle\mathcal{S}\langle$ ist $(\mathbf{P}\mathrm{L})\Gamma$ ein $\langle\mathcal{V}\rangle$–vollständiges Regel–Relativ. Nach Gl. (3.18) und Bemerkung 3.1 gilt wegen $\langle\mathcal{V}\rangle = \mathcal{S}$, daß $\mathbf{P}$ ein $\mathcal{S}$–vollständiges Regel–Relativ ist.
Nun zum Beweis der Zwischenbehauptungen (i) und (ii):

zu (i): $\mathbf{P}$ sei $\mathcal{S}$–vollständiges Regel–Relativ. Also gilt für $\Omega \in \mathcal{S}$, $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ und alle $x \in \mathcal{X}$

$$(t_0, x_0)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\right] \neq \emptyset \qquad . \tag{3.32}$$

Mit Gl. (3.12) folgt $(t_1, t_0, x, \Omega) \in \mathfrak{D}_\Phi$. Da im Übergangsverfahren L $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ gesetzt wird, gilt $\Omega = \rangle\Omega\langle$ und auch $\rangle\mathcal{S}\langle = \mathcal{S}$.

zu (ii): Σ sei $\mathcal{V}$–vollständig. Für $w \in \mathcal{V}$, $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ gilt also

$$\bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} (t_1, t_0, x_0, w) \in \mathfrak{D}_\Phi \qquad . \tag{3.33}$$

Man kann nun folgern

$$\begin{array}{lll}
& \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} & (t_1, t_0, x_0, w) \in \mathfrak{D}_\Phi \\
\Rightarrow & \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigvee_{x_1 \in \mathcal{X}} & (t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \\
\overset{(3.7)}{\Rightarrow} & \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \bigvee_{x_1 \in \mathcal{X}} & (t_0, x_0)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\right](t_1, x_1) \quad \text{für } \Omega = \langle w\rangle \in \langle\mathcal{S}\rangle \\
\Rightarrow & \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} & (t_0, x_0)\left[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\right] \neq \emptyset \quad \text{für } \Omega = \langle w\rangle \in \langle\mathcal{S}\rangle \qquad .
\end{array}$$

□

4 Vergleich der Definitionen

4.1 Unterschiede der Definitionen

Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Definitionen des Regel–Relativs besteht zunächst darin, daß für ein Regel–Relativ nach Definition 2.1 nicht explizit angegeben wird, wie (ausgehend von einem realen System bzw. einem bestehenden Systemmodell) die Relationen des Relativs zu modellieren sind. Erst die Interpretation einer bestehenden Relation $A\mathfrak{L}B$ durch den verbalen Ausdruck „B kann von A aus mit dem konstanten Stellwert $\mathfrak{L}$ bzw. $u(\mathfrak{L})$ erreicht werden“ veranschaulicht die Bedeutung der Relationen.
Demgegenüber wird aus systemtheoretischer Sicht der Zugang zum Begriff des Regel–Relativs nach Definition 3.1 dadurch erleichtert, daß man durch die synonyme Beziehung zum abstrakten Systembegriff nach Sontag (1990) auch eine explizite Modellierungsvorschrift für die Relationen aus der Zustandsüberführungsfunktion des zugehörigen Systems gewinnt. Ein anderer Vorteil des Regel–Relativbegriffs nach Arnold (1994) gegenüber dem aus (Arnold 1993) ergibt sich daraus, daß für ein Regel–Relativ nach Definition 3.1 nicht nur eine Relationenmenge zur Modellierung konstanter Kontrollfunktionen existiert, sondern mittels der Abbildung $\Pi \cdot dt$ auch die nicht konstanten Kontrollfunktionen einer relationalen Sprechweise zugänglich gemacht werden. Für Systeme mit diskreter Zeitmenge ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$ bzw. $\mathcal{T} = \mathbb{Z}$) ist jede Kontrollfunktion stückweise konstant. Solche Kontrollfunktionen können durch die Verkettung von Relationen durch das Relationenprodukt gewonnen werden. Daher reicht die Relationenmenge aus, um das Systemverhalten zu beschreiben.

Wegen Axiom 2.II in Definition 2.1 besitzen die Relationen einen nicht leeren Nachbereich:

$$\bigwedge_{A \in \mathfrak{P}} \bigwedge_{t_A \leq t_1} A\mathfrak{L}(t_1 - t_A) \neq \emptyset \qquad . \tag{4.1}$$

Es gilt somit

Bemerkung 4.1
Im Sinne von Definition 3.5 ist wegen 2.II ein Regel–Relativ nach Definition 2.1 stets auch $\mathcal{R}^{\mathcal{T}}_{const.}$–vollständig mit

$$\mathcal{R}^{\mathcal{T}}_{const.} := \{\Omega_{\mathfrak{L}} \in \mathcal{R}^{\mathcal{T}} | t_0 < t_1 \wedge \mathfrak{L} \in \mathcal{R} \wedge \Omega_{\mathfrak{L}}(t) := \mathfrak{L} \text{ für alle } t \in \mathcal{T}\} \qquad . \tag{4.2}$$

Konstante Kontrollen (Relationen) sind demnach auf jeden Punkt $(t_0, x_0) \in \mathfrak{P}$ anwendbar, und für alle $t_1 > t_0$ existiert ein eindeutig bestimmter Zustand x_1 mit $(t_0, x_0)\mathfrak{L}(t_1, x_1)$.

Somit ist gezeigt, daß Regel–Relative nach Definition 2.1 im Sinne von Definition 3.1 zusätzlich die Eigenschaft der $\mathcal{R}^{\mathcal{T}}_{const.}$–Vollständigkeit erfüllen müssen. Demnach ist der Regel–Relativbegriff nach Definition 3.1 in dieser Hinsicht umfassender.

4.2 Äquivalenz der Zeitinvarianz

Zu untersuchen ist nun, ob die in Abschnitt 3 gegebene Definition der Zeitinvarianz eines Regel–Relativs mit Axiom 2.V kompatibel ist. Der Nachweis für die Kompatibilität kann – bei Beschränkung auf konstante Stellfunktionen – wie folgt erbracht werden:
Für $\Omega = \Omega_{\mathfrak{L}}$ ($\mathfrak{L} \in \mathcal{R}$) bedeutet Zeitinvarianz nach Definition 3.2 (also Axiom 3.VI):

$$\bigwedge_{t_0<t_1} \bigwedge_{t^*\in\mathcal{T}} \bigwedge_{\mathfrak{L}\in\mathcal{R}} (t_0, x_0)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}(t_1, x_1) \Rightarrow (t_0 + t^*, x_0)\mathfrak{L}|_{t_0+t^*}^{t_1+t^*}(t_1 + t^*, x_1) \quad . \tag{4.3}$$

Dabei ist zu bemerken, daß gilt

$$(t_0, x_0)(\Delta t)(t_1, x_1) \wedge (t_0 + t^*, x_0)(\Delta t)(t_1 + t^*, x_1) \text{ für } \Delta t := t_1 - t_0 \quad . \tag{4.4}$$

Satz 4.1

Die Eigenschaft (2.21) für $\mathfrak{L} \in \mathcal{R}$ in Axiom 2.V eines Regel-Relativs ist äquivalent mit der Aussage (4.3). □

Beweis

(4.3) $\overset{!}{\Rightarrow}$ 2.V

Es seien $A = (t_A, x_A)$ und $B = (t_B, x_B)$ mit $x_A = x_B =: x$ gegeben. Zu zeigen ist für alle $\Delta t > 0$:

$$x(A\mathfrak{L}\Delta t) \overset{!}{=} x(B\mathfrak{L}\Delta t) \quad . \tag{4.5}$$

Es gilt

$$A\mathfrak{L}\Delta t = (t_A, x)\mathfrak{L}|_{t_A}^{t_A+\Delta t} = (t_A + \Delta t, x_1) \qquad \text{und}$$

$$B\mathfrak{L}\Delta t = (t_B, x)\mathfrak{L}|_{t_B}^{t_B+\Delta t} = (t_B + \Delta t, x_1') \qquad .$$

Man kann nun

$$(t_A, x)\mathfrak{L}|_{t_A}^{t_A+\Delta t}(t_A + \Delta t, x_1) \overset{(4.1)}{\Rightarrow} (t_A + t^*, x)\mathfrak{L}|_{t_A+t^*}^{t_A+t^*+\Delta t}(t_A + t^* + \Delta t, x_1')$$

mit $t^* := t_B - t_A$ folgern.
Damit ist $(t_B, x)\mathfrak{L}|_{t_B}^{t_B+\Delta t}(t_B+\Delta t, x_1)$ gezeigt. Wegen der Abbildungseigenschaft von $\mathfrak{L}|_{t_B}^{t_B+\Delta t}$ (Gl. (3.5)) gilt zum einen $x_1 = x_1'$ und damit Gl. (4.5) zum anderen

$$x(B\mathfrak{L}\Delta t) = x(t_B + \Delta t, x_1) = x_1 = x(A\mathfrak{L}\Delta t) \qquad .$$

2.V $\overset{!}{\Rightarrow}$ (4.3)

Es sei $(t_0, x_0)\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}(t_1, x_1)$ vorgegeben. Mit $A := (t_0, x_0)$ gilt also $x(A\mathfrak{L}\Delta t) = x_1$ für $\Delta t :=$

$t_1 - t_0$. Setze $B := (t_0 + t^*, x_0)$. Dann folgt $x(A) = x(B) = x_0$, so daß sich 2.V anwenden läßt:

$$\begin{aligned} x_1 = x(A\mathfrak{L}\Delta t) &= x(A\mathfrak{L}|_{t_A}^{t_A+\Delta t}) \\ &= x(A\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_0+\Delta t}) \\ &= x(B\mathfrak{L}|_{t_0+t^*}^{t_0+t^*+\Delta t}) \\ &= x(B\mathfrak{L}|_{t_B}^{t_B+\Delta t}) \\ &= x(B\mathfrak{L}\Delta t) \qquad . \end{aligned}$$

Damit kann man folgern

$$(t_B, x_0)\mathfrak{L}|_{t_B}^{t_B+\Delta t}(t_B + \Delta t, x_1) \overset{t_B=t_0+t^*}{\Rightarrow} (t_0 + t^*, x_0)\mathfrak{L}|_{t_0+t^*}^{t_1+t^*}(t_1 + t^*, x_1) \qquad .$$

Also gilt Gl. (4.3). □

4.3 Schwierigkeiten

Allgemeine Bemerkungen bezüglich der Definition des Begriffs des Regel–Relativs nach Arnold (1993) stehen bereits in Abschnitt 2. Besonders problematisch für technische Systeme ist die Einschränkung (2.8), also das Axiom der einfachen Transitivität. Im Rahmen dieses Axioms wird die Eineindeutigkeit der Zuordnung zweier Punkte A und B über genau eine Relation $\mathfrak{L}$ gefordert. Diese Eindeutigkeit bezüglich der Relationen ist jedoch nicht immer gewährleistet, was schon anhand des einfachen Beispiels eines PT_2–Systems erläutert werden soll (Abschnitt 4.3.1).
Weiterhin ist die Forderung der Idempotenz (Axiom 2.IV) bei der Beschreibung von Systemen mit diskreter Zeitmenge problematisch. Die Transitivität der Relationen

$$\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L} \subset \mathfrak{L} \tag{4.6}$$

kann erfüllt werden, die umgekehrte Teilmengenbeziehung ist jedoch nur bei Dichtlage der Zeitmenge gültig (Abschnitt 4.3.2).

4.3.1 Zur einfachen Transitivität

Es ist hinlänglich bekannt, daß ein PT_2–System mit der Dämpfung $D = 0$ auf ein sprungförmiges Eingangssignal mit einer ungedämpften harmonischen Schwingung reagiert. Diese Schwingung ist in ihrer Frequenz jedoch nicht von der Amplitude des Eingangssignals abhängig. Somit sind bei unterschiedlichen Amplituden des Eingangssignals die Nulldurchgänge der Systemantwort bei den gleichen Zeitpunkten zu finden (Bild 4.1). Es gibt für dieses Beispiel also zwei Systemzustände A und B, die in mehr als nur einer einzigen Relation $\mathfrak{L} = \langle u \rangle$ zueinander stehen.
Um trotzdem eine Beschreibung des PT_2–Systems über Regel–Relative gemäß Definition 2.1 möglich zu machen, kann die Dimension der Systemzustände erhöht werden. Dennoch

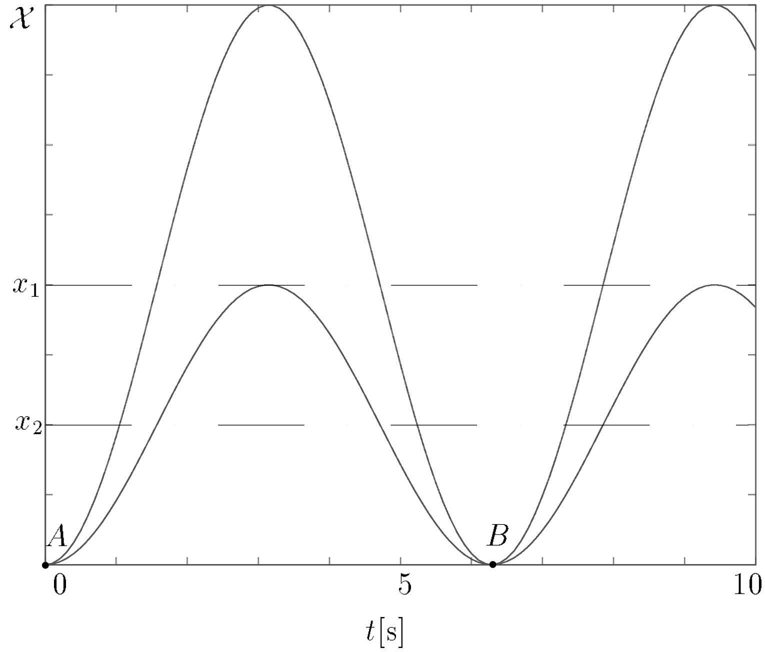

Bild 4.1: Systemantwort eines ungedämpften PT_2–Systems auf zwei Sprünge unterschiedlicher Amplitude

wird anhand dieses einfachen Beispiels die Problematik bei einer Systembeschreibung mit Hilfe der Regel–Relative gemäß Definition 2.1 deutlich. Definition 3.1 scheint demnach besser geeignet, beliebige technisch relevante Systeme zu beschreiben. Dennoch wirkt die aufwendige Schreibweise mit Hilfe der Abbildungsschar $\Pi \cdot dt$ auf den regelungstechnisch interessierten Ingenieur eher abschreckend, so daß eine Neuformulierung dieses Begriffs angebracht erscheint.

4.3.2 Zur Idempotenz

Bei Regel–Relativen nach (Arnold 1993) ergibt sich mit diskreter Zeitmenge ($\mathcal{T} = \mathbb{N}$) ein Widerspruch zwischen den Axiomen 2.I und 2.IV.
2.I bedeutet für $\mathcal{T} = \mathbb{N}$, daß gilt

$$A^{'}\mathfrak{L}B^{'} \Rightarrow t_{A'} + 1 \leq t_{B'} \qquad . \tag{4.7}$$

Für den Nachweis des Widerspruches sei nun angenommen, es gelte

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L} \circ \mathfrak{L} \tag{4.8}$$

für beliebige $\mathfrak{L} \in \mathcal{R}$. Dann ist für $\Delta t = 1$ und $A \in \mathfrak{P}$ nach 2.II $A\mathfrak{L}\Delta t = A\mathfrak{L}1 = B$ erklärt, und es gilt $A\mathfrak{L}B$ mit $t_B = t_A + \Delta t = t_A + 1$. Angenommen es gelte $A(\mathfrak{L} \circ \mathfrak{L})B$, dann existiert ein Punkt C mit $A\mathfrak{L}C \wedge C\mathfrak{L}B$. Nach Gl. (4.7) ergibt sich nun der Widerspruch $t_A + 1 = t_B \geq t_C + 1 \geq t_A + 2$.

Um die Definition des Regel–Relativs auch für Systeme mit diskreter Zeitmenge anwenden zu können, muß man entweder Axiom 2.I abschwächen zu

2.I' Für alle A, $B \in \mathfrak{P}$ gilt

$$APB \Rightarrow t_A \leq t_B \qquad . \tag{4.9}$$

Oder man fordert statt 2.IV nur die Transitivität Gl. (4.8).

Im ersten Fall verlieren die ersten beiden Aussagen von Satz 2.1 wegen $\mathfrak{E} \subset \mathfrak{L}$ für alle $\mathfrak{L} \in \mathfrak{P}$ ihre Gültigkeit, jedoch läßt sich dann die verletzte Inklusionsbedingung herleiten. Dieser Ansatz wird in Definition 3.1 gewählt.

5 Zusammenfassung und Ausblick

Der vorliegende Bericht liefert einen Beitrag zur Verallgemeinerung der Theorie dynamischer Systeme auf relationale Systemstrukturen. Dafür wurden die in (Arnold 1993) und (Arnold 1994) definierten Begriffe der Regel–Relative $(\mathfrak{P}, P, R, K)$ und $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ auf ihre Eignung hin untersucht, dynamische Systeme beschreiben zu können. Im Rahmen dieses Berichts wurde diese Eignung nachgewiesen und gezeigt, daß über explizit angegebene Übergangsverfahren Regel–Relative in Systeme nach Sontag (1990) überführt werden können (und umgekehrt), diese Begriffe also synonym sind. Ferner wurden die Begriffe der Zeitinvarianz von Regel–Relativen und ein Parallelitätsaxiom für Regel–Relative eingeführt. Im Rahmen dieses Forschungsberichts wurde desweiteren bewiesen, daß der Begriff der Zeitinvarianz für Regel–Relative synonym zu dem für Systeme nach Sontag (1990) ist.
Bei der Anwendung der Regel–Relative auf beliebige dynamische Systeme zeigte es sich jedoch, daß insbesondere beim Ansatz nach Arnold (1993) Schwierigkeiten auftauchen. So birgt z.B. das Axiom der einfachen Transitivität in diesem Zusammenhang bereits Schwierigkeiten bei der Beschreibung einfacher PT_2–Systeme in sich. Zusätzlich ergeben sich bei der Beschreibung zeitdiskreter Systeme aufgrund der geforderten Idempotenz erhebliche Probleme, so daß für die Beschreibung zeitdiskreter Systeme eine Modifikation gemäß Abschnitt 4.3.2 notwendig ist. Derartige Schwierigkeiten ergeben sich für den Regel–Relativansatz in (Arnold 1994) nicht, so daß er für eine Beschreibung dynamischer Systeme geeignet ist.

Aufgrund der nach Arnold (1994) aufwendigen Schreibweise der Abbildungsschar $\Pi \cdot dt$ zur Beschreibung nicht notwendigerweise konstanter Kontrollfunktionen ist eine Neuformulierung dieses Begriffs mit einer leichter handhabbaren Schreibweise wünschenswert. Diese Neuformulierung geschieht in einem nächsten Forschungsbericht. Ferner ist es bis jetzt lediglich möglich, beliebige dynamische Systeme in Form von Regel–Relativen zu beschreiben. Zu aus der Systemtheorie bekannten Systemeigenschaften wie Steuerbarkeit/Erreichbarkeit und Beobachtbarkeit/Unterscheidbarkeit und den zugehörigen Analysemethoden existiert jedoch noch nicht in der Sprache der Regel–Relative ein entsprechendes Analogon. Diese Lücke wird in der nahen Zukunft ebenfalls geschlossen.

Literaturverzeichnis

Arnold, H.-J. 1993. *Regel–Relative*. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, SM-DU-196. Universität – GH – Duisburg.

Arnold, H.-J. 1994. *Regel–Relative*. Schriftenreihe des Fachbereichs Mathematik, SM-DU-246. Universität – GH – Duisburg.

Bertram, T. und **H. Schwarz**. 1993. Fuzzy Identification of Hydraulic Systems. *12th IFAC World Congress*. Sydney/Australia. 489 – 492.

Bronsteijn, I. und **K. Semendjajew**. 1991. *Taschenbuch der Mathematik*. Frankfurt/Main: Harry Deutsch.

di Nola, A., **S. Sessa**, **W. Pedrycz** und **E. Sanchez**. 1989. *Fuzzy Relation Equations and their Applications to Knowledge Engineering*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

Fliess, M. 1991. Controllability Revisited. *Mathematical System Theory. The Influence of R.E. Kalman*, hg. von A. Antoulas. Berlin: Springer. Lecture Notes in Control and Information Science. 105.

Fliess, M. und **S. Glad**. 1993. An Algebraic Approach to Linear and Nonlinear Control. *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, hg. von H. a. J. W. Trentelman. Berlin: Birkhäuser.

Gellert, W., **H. Kästner** und **D. S. Neuber**. 1981. *Lexikon der Mathematik*. Leipzig: VEB Bibliographisches Institut.

Isidori, A. 1989. *Nonlinear Control Systems*. Berlin: Springer.

Kalman, R. E., **P. L. Falb** und **M. A. Arbib**. 1969. *Topics in mathematical system theory*. New York: McGraw-Hill.

Kruse, R., **J. Gebhard** und **F.Klawonn**. 1993. *Fuzzy–Systeme*. Stuttgart: Teubner.

Küpper, K. 1994. *Modellbildung mittels eines selbstlernenden Fuzzy–Systems*. Forschungsbericht 8/94 MSRT. Meß-, Steuer- und Regelungstechik. Universität – GH – Duisburg.

Nijmeijer, H. und **A. van der Schaft**. 1991. *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Berlin: Springer.

Schwarz, H. 1991. *Nichtlineare Regelungssysteme: systemtheoretische Grundlagen*. München: Oldenbourg.

Sontag, E. D. 1990. *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. New York: Springer-Verlag.

Zadeh, L. A. und **C. A. Desoer**. 1963. *Linear System Theory*. New York: McGraw-Hill.

A Relationen und Relative

In diesem Abschnitt werden Definitionen und Sprechweisen, die für das Rechnen mit Relationen grundlegend sind, zusammengefaßt.

Definition A.1 (Bronsteijn und Semendjajew 1991)

(i) Eine *binäre Relation* $\mathfrak{L}$ auf einer Grundmenge $\mathfrak{P} \neq \emptyset$ ist eine Menge von 2-Tupeln (A, B) von Elementen $A, B \in \mathfrak{P}$, d.h.

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{P} \times \mathfrak{P} \qquad . \tag{A.1}$$

(ii) Eine Menge $\mathfrak{L}$ von n–Tupeln $(A_1, \ldots, A_n)$ von Elementen einer Grundmenge $\mathfrak{P} \neq \emptyset$ wird *n–äre Relation auf* $\mathfrak{P}$ genannt:

$$\mathfrak{L} \subset \mathfrak{P}^n = \underbrace{\mathfrak{P} \times \ldots \times \mathfrak{P}}_{n-mal} \qquad . \tag{A.2}$$

□

Für eine binäre Relation $\mathfrak{L}$ wird die mengentheoretische Schreibweise $(A, B) \in \mathfrak{L}$ in relationaler Form durch $A\mathfrak{L}B$ ausgedrückt:

$$A\mathfrak{L}B :\Leftrightarrow (A, B) \in \mathfrak{L} \tag{A.3}$$

Man sagt dann „A und B stehen in der Relation $\mathfrak{L}$“.
Da Relationen formal gesehen Mengen sind, können die üblichen Mengen–Operatoren wie $\cap$, $\cup$, $\setminus$ auf Relationen angewendet werden. Speziell für binäre Relationen gibt es zusätzlich die folgenden Operationen:

Definition A.2

(i) *Bildung der inversen Relation*
Zu einer binären Relation $\mathfrak{L}$ auf $\mathfrak{P}$ sei $\overline{\mathfrak{L}}$ die wie folgt definierte *zu $\mathfrak{L}$ inverse Relation*:

$$A\overline{\mathfrak{L}}B :\Leftrightarrow B\mathfrak{L}A \qquad . \tag{A.4}$$

(ii) *Relationenprodukt*
Zu binären Relationen $\mathfrak{L}_1$, $\mathfrak{L}_2$ auf derselben Grundmenge $\mathfrak{P}$ ist als *Relationenprodukt von $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$* die binäre Relation $\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2$ wie folgt definiert:

$$A(\mathfrak{L}_1 \circ \mathfrak{L}_2)B :\Leftrightarrow \bigvee_{C \in \mathfrak{P}} A\mathfrak{L}_1 C \wedge C\mathfrak{L}_2 B \qquad . \tag{A.5}$$

□

Das Relationenprodukt läßt sich auch allgemeiner für n–äre Relationen definieren, dies spielt aber bei unseren Betrachtungen keine Rolle.

Definition A.3

(i) Man spricht von einem *zweistelligen (binären) Relativ* (oder von einer *binären Relationenalgebra*) $(\mathfrak{P}, \mathcal{R})$, wenn gegeben sind:

1. eine Menge $\mathfrak{P} \neq \emptyset$;
2. eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{P} \times \mathfrak{P})$ von zweistelligen Relationen auf $\mathfrak{P}$.

(ii) Man spricht für $n \in \mathbb{N}$ von einem *n–ären Relativ* (oder von einer *n–ären Relationenalgebra*) $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}^n)$, wenn gegeben sind

1. eine Menge $\mathfrak{P} \neq \emptyset$;
2. eine Menge $\mathcal{R} \subset \mathrm{Pot}(\mathfrak{P}^n)$ von n–stelligen Relationen auf $\mathfrak{P}$.

Ein n–stelliges Relativ besteht also aus einer nicht leeren Menge $\mathfrak{P}$ und einer Menge von Relationen einer festen Stellenzahl $n \geq 2$. □

Da hier ausschließlich mit binären Relativen gearbeitet wird, läßt man den Zusatz *binär* fallen, so daß mit einer Relation (bzw. einem Relativ) eine binäre Relation (bzw. ein binäres Relativ) gemeint ist.

Definition A.4

Unter den Relationen ist die mit $\mathfrak{E}$ bezeichnete *Gleichheitsrelation auf* $\mathfrak{P}$ besonders ausgezeichnet. $\mathfrak{E}$ ist folgendermaßen definiert:

$$A\mathfrak{E}B :\Leftrightarrow A = B \quad \text{für alle } A, B \in \mathfrak{P} \qquad . \tag{A.6}$$

□

Definition A.5

Zu $A \in \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{L} \in \mathcal{R}$ wird die Menge

$$A\mathfrak{L} := \{B \in \mathfrak{P} | A\mathfrak{L}B\} \tag{A.7}$$

als *Nachbereich der Relation $\mathfrak{L}$ bezüglich A* bezeichnet. Entsprechend läßt sich der *Vorbereich der Relation $\mathfrak{L}$ bezüglich B* erklären durch

$$\mathfrak{L}B := \{A \in \mathfrak{L} | A\mathfrak{L}B\} \qquad . \tag{A.8}$$

□

Beispiel A.1

Bekannte binäre Relationen sind die Ordnungsrelationen *kleiner* $<$, *kleiner gleich* $\leq$, *größer* $>$ und *größer gleich* $\geq$. Als Grundmenge kann jede geordnete Menge dienen. Dabei unterscheiden sich die einzelnen Relationen bzgl. verschiedener Grundmengen.

Werden die Ordnungsrelationen bzgl. $\mathbb{N}$ betrachtet, so gilt die mengentheoretische Schreibweise für die kleiner gleich–Relation

$$\leq \, = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} | a \leq b \text{ im üblichen Sinne}\} \quad . \tag{B 1.1-1}$$

Wegen $1.5 \notin \mathbb{N}$ gilt also auch nicht $1.5 \leq 2$ bzgl. $\mathbb{N}$. Bezieht man die kleiner gleich–Relation auf die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so daß

$$\leq \, = \{(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} | a \leq b \text{ im üblichen Sinne}\} \quad , \tag{B 1.1-2}$$

so erhält man $1.5 \leq 2$. Die oben angegeben Relationen lassen sich mengentheoretisch vergleichen. Es gilt zum Beispiel $< \, \subset \, \leq$. Für die Anwendung der Mengenoperationen sei angegeben:

$$\leq \cap \geq = \mathfrak{E} \quad , \tag{B 1.1-3}$$

$$< \cap > = \emptyset \quad . \tag{B 1.1-4}$$

Diese Aussagen sind unabhängig von der betrachteten Grundmenge. Zur Veranschaulichung von Vor– und Nachbereich der Relation $\leq$ werde als Grundmenge die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ betachtet. Es sei $b \in \mathbb{R}$ beliebig vorgegeben. Es ergeben sich als Vor– bzw. Nachbereich Halbstrahlen auf der reellen Achse:

$$b \leq \quad = \{c \in \mathbb{R} | b \leq c\} = [b, \infty) \qquad \text{und} \tag{B 1.1-5}$$

$$\leq b \quad = \{a \in \mathbb{R} | a \leq b\} = (-\infty, b] \quad . \tag{B 1.1-6}$$

Die inverse Relation zu $\leq$ ist $\geq$ und zu $<$ ist $>$ invers. □

Beispiel A.2

Nun wird der Begriff des binären Relativs erläutert: Verglichen werden die Relative $(\mathbb{N}, \{<,>\})$ und $(\mathbb{R}, \{<,>\})$, d.h. man betrachtet $\mathbb{N}$ bzw. $\mathbb{R}$ als Grundmenge und jeweils die beiden Ordnungsrelationen kleiner $<$ und größer $>$ werden in der Relationenmenge zusammengefaßt. Daß die kleiner–Relationen bezüglich $\mathbb{N}$ und $\mathbb{R}$ verschieden sind, ist genauso, wie für die Relation $\leq$ einzusehen. Aber auch die Eigenschaften der Relative unterscheiden sich: Die Aussage

$$< \quad \subset \quad < \circ < \tag{B 1.2-1}$$

gilt für die Grundmenge $\mathbb{R}$ aber nicht für die Grundmenge $\mathbb{N}$. Zu reellen Zahlen $a < c$ existiert immer eine reelle Zahl b, mit der Eigenschaft $a < b < c$. Dies entspricht gerade der Gleichung (B 1.2-1) in relationaler Schreibweise. Wählt man nun als natürliche Zahlen $1 < 2$, so existiert aber keine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit $1 < n < 2$. □

B Systembegriff nach Sontag (1990)

Definition B.1 Sontag (1990)
Wir sprechen von einem *System*

$$\sigma = (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi), \tag{B.1}$$

wenn gegeben werden

1. als *Zeitmenge* eine Untergruppe $\mathcal{T}(+) < \mathbb{R}(+)$;
2. eine nicht leere Menge $\mathcal{X}$, deren Elemente *Zustände* heißen;
3. eine nicht leere Menge $\mathcal{U}$, deren Elemente *Stellwerte* heißen;
4. eine Zustandsüberführungsfunktion

$$\Phi : \mathfrak{D}_\Phi \longrightarrow \mathcal{X}, \tag{B.2}$$

mit

$$\mathfrak{D}_\Phi \subset \left\{ (t_1, t_0, x, w) | t_0, t_1 \in \mathcal{T}; t_0 \leq t_1; x \in \mathcal{X}; w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} \right\} \tag{B.3}$$

und wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

B.I *Nicht-Trivialität*
Zu jedem Zustand $x_0 \in \mathcal{X}$ gibt es mindestens ein Paar $t_0 < t_1 \in \mathcal{T}$ und ein $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ derart, daß $(t_1, t_0, x_0, w) \in \mathfrak{D}_\Phi$ gilt.

Ist $(t_1, t_0, x_0, w) \in \mathfrak{D}_\Phi$, so sagt man auch „$w$ ist auf x_0 anwendbar".

B.II *Restriktion*
Ist $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ anwendbar auf x_0, so ist auch für jedes $t^* \in [t_0, t_1)$ die Restriktion $w_1 = w|_{[t_0,t^*)} \in \mathcal{U}^{[t_0,t^*)}$ auf x_0 anwendbar und zudem ist die Restriktion $w_2 = w|_{[t^*,t_1)} \in \mathcal{U}^{[t^*,t_1)}$ anwendbar auf $x(t^*) = (t^*, t_0, x_0, w_1)\Phi$.

B.III *Halbgruppenaxiom*
Sind $t_0, t^*, t_1 \in \mathcal{T}$ mit $t_0 < t^* < t_1$, $w_1 \in \mathcal{U}^{[t_0,t^*)}$ und $w_2 \in \mathcal{U}^{[t^*,t_1)}$ gegeben und ist x_0 ein Zustand mit

$$(t^*, t_0, x_0, w_1)\Phi = x^* \ \wedge \ (t_1, t^*, x^*, w_2)\Phi = x_1, \tag{B.4}$$

dann ist die Konkatenation (Verkettung) $w = w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2 \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ auf x_0 anwendbar, und es gilt

$$(t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \qquad . \tag{B.5}$$

Dabei wird gesetzt

$$(w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2)(t) := \begin{cases} w_1(t) & \text{für } \; t \in [t_0, t^*) \\ w_2(t) & \text{für } \; t \in [t^*, t_1) \end{cases} \qquad . \tag{B.6}$$

B.IV *Identität*
Für jedes $t_0 \in \mathcal{T}$ und jedes $x \in \mathcal{X}$ ist die leere Abbildung $\diamondsuit \in \mathcal{U}^{[t_0,t_0)}$ auf x anwendbar, und es gilt

$$(t_0, t_0, x, \diamondsuit)\Phi = x \qquad . \tag{B.7}$$

□

Zusätzlich zu der in Sontag (1990) angegebenen Axiomatik erweist sich für eine synonyme Charakterisierung des System–Begriffs durch Regel–Relative folgendes Zusatzaxiom als wichtig (Arnold 1994):

B.V *Reduktion*
Es seien $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ mit

$$\bigwedge_{t_0} \; \bigwedge_{t_1 \geq t_0} \; \bigwedge_{x \in \mathcal{X}} \quad (t_1, t_0, x, w_{u_1})\Phi = (t_1, t_0, x, w_{u_2})\Phi \tag{B.8}$$

gegeben, wobei $w_{u_i}(t) = u_i$ für alle $t \in [t_0, t_1)$ und $i = 1, 2$ gesetzt sei, so folgt

$$u_1 = u_2 \qquad . \tag{B.9}$$

□

Der Begriff des „Systems“ wird stets in dem Sinn gebraucht, daß die Axiome B.I–B.V als gültig vorausgesetzt werden. Das Reduktionsaxiom B.V stellt keine wesentliche Einschränkung dar, da man zwei Stellwerte identifizieren kann, die bezüglich des vorgegebenen Systems dieselbe Wirkung haben.

Bemerkung B.1

(i) Wegen des Restriktionsaxioms kann man zu $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ *Trajektorien*

$$x(t) = (t, t_0, x_0, w|_{[t_0,t_1)})\Phi \text{ für alle } t \in [t_0, t_1) \tag{B.10}$$

bilden. Dies sind Kurven mit Zwischenwerten von Zuständen. Außerdem gilt, daß von jedem solchen Zwischenpunkt $x(t)$ als neuer Anfangspunkt der Endpunkt $x(t_1)$ mit der Kontrollfunktion $w_{[t,t_1)}$ erreicht werden kann. Die folgende Eigenschaft ist also in jedem System gültig:

Zerlegung
Ist $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ anwendbar auf $x_0 \in \mathcal{X}$ mit

$$(t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \qquad , \tag{B.11}$$

dann ist für jedes $t \in [t_0, t_1)$ $\;w|_{[t_0,t)}$ anwendbar auf x_0 und weiter ist $w|_{[t,t_1)}$ anwendbar auf

$$x_t := (t, t_0, x_0, w|_{[t_0,t)})\Phi \qquad . \tag{B.12}$$

Zudem gilt

$$(t_1, t, x_t, w|_{[t,t_1)})\Phi = x_1 \qquad . \tag{B.13}$$

(ii) Wendet man das Axiom B.IV auf $w|_{[t_0,t_0)} = \diamondsuit$ für $w \in \mathcal{U}^{[t^*,t_1)}$ und $t_0 \in [t^*, t_1)$ an, so erhält man

$$(t_0, t_0, x, w|_{[t_0,t_0)}) = x \quad \text{für alle } x \in \mathcal{X} \qquad . \tag{B.14}$$

□

Definition B.2
Zwei Systeme $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ und $(\mathcal{T}, \mathcal{X}^*, \mathcal{U}^*, \Phi^*)$ heißen *isomorph* zueinander (in Zeichen: $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) \cong (\mathcal{T}, \mathcal{X}^*, \mathcal{U}^*, \Phi^*)$), wenn es zwei Bijektionen

$$\varphi \;:\; \begin{cases} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X}^* \\ x & \longmapsto & x\varphi \end{cases} \qquad , \qquad \psi \;:\; \begin{cases} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U}^* \\ u & \longmapsto & u\psi \end{cases} \tag{B.15}$$

gibt, für die mit

$$\begin{cases} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \mathcal{U}^{*[t_0,t_1)} \\ w & \longmapsto & w \circ \psi \end{cases} \tag{B.16}$$

die Aussagen

$$(t_1, t_0, x, w) \in \mathfrak{D}_\Phi \Leftrightarrow (t_1, t_0, x\varphi, w \circ \psi) \in \mathfrak{D}_{\Phi^*} \tag{B.17}$$

und

$$((t_1, t_0, x, w)\Phi)\varphi = (t_1, t_0, x\varphi, w \circ \psi)\Phi^* \tag{B.18}$$

gelten. □

Definition B.3

Ein System $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ heißt *zeitinvariant*, wenn für jedes $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ und jedes $x \in \mathcal{X}$, $t^* \in \mathcal{T}$ gilt:
Ist w anwendbar auf x, so ist auch die Translation

$$w^{t^*} \in \mathcal{U}^{[t_0+t^*, t_1+t^*)} \quad , \quad w^{t^*}(t) := w(t - t^*) \tag{B.19}$$

anwendbar auf x, und es gilt

$$(t_1, t_0, x, w)\Phi = (t_1 + t^*, t_0 + t^*, x, w^{t^*})\Phi \qquad . \tag{B.20}$$

□

Definition B.4 Sontag (1990)

Man nennt ein System $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ *vollständig*, wenn jede Stellfunktion für jeden Zustand zulässig ist:

$$\mathfrak{D}_\Phi = \{(t_1, t_0, x, w) | t_0 \leq t_1,\ x \in \mathcal{X},\ w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}\}. \tag{B.21}$$

Verallgemeinernd bedeutet für eine Familie von Stellfunktionen $\mathcal{V} \subset \bigcup_{t_0 \leq t_1} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ die Eigenschaft der $\mathcal{V}$–*Vollständigkeit*, daß für $t_0 \leq t_1$, $x \in \mathcal{X}$ und $w \in \mathcal{V}$ die Beziehung $(t_1, t_0, x, w) \in \mathfrak{D}_\Phi$ gilt. □

C Synonymität von Regel–Relativen und Systemen

In diesem Abschnitt werden die in Satz 3.1 und Bemerkung 3.1 getroffenen Aussagen über den synonymen Zusammenhang von Regel–Relativen gemäß Definition 3.1 und dem Systembegriff nach Sontag (1990) (siehe Anhang B) im einzelnen bewiesen.

Definition C.1

Zwei axiomatisch gegebene Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ heißen *synonym zueinander*, wenn zwei Übergangsverfahren

$$\Gamma : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \quad , \quad \mathrm{L} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$$

angegeben werden können, so daß für alle $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, $\mathbf{B} \in \mathcal{B}$ gilt

$$\mathbf{A}\Gamma\mathrm{L} \cong \mathbf{A} \quad \text{und} \quad \mathbf{B}\mathrm{L}\Gamma \cong \mathbf{B} \quad .$$

□

Hier sei nun als $\mathcal{A}$ die Menge aller Systeme, also die Menge aller Quadrupel $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$, welche den Axiomen in Definition B.1 genügen und $\mathcal{B}$ die Menge aller Regel–Relative, d.h. die Menge aller Tripel $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$, die die Axiomatik in Definition 3.1 erfüllen. Die Übergangsverfahren L und Γ wurden in den Definitionen 3.2 und 3.3 angegeben. Die folgenden Sätze und Lemmata entstammen (Arnold 1994) und sind mit Beweisen versehen.

Lemma C.1

Die in Bemerkung 3.1 erklärte Abbildung

$$\langle\cdot\rangle : \begin{cases} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{R} \\ u & \longmapsto & \langle u \rangle \end{cases}$$

ist eine Bijektion und läßt sich für jedes $t_0 \le t_1$ fortsetzen zu einer Bijektion

$$\langle\cdot\rangle : \begin{cases} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} \\ w & \longmapsto & \langle w \rangle \end{cases} ,$$

indem man für $t \in [t_0, t_1)$ setzt

$$\langle w \rangle(t) := \langle w(t) \rangle. \tag{C.1}$$

Beweis

(i) Die Surjektivität von $\langle\cdot\rangle$ folgt direkt aus der Definition der Relationenmenge in Γ als $\mathcal{R} := \{\langle u \rangle | u \in \mathcal{U}\}$.

(ii) Zur Injektivität:
Es sei $\langle u_1\rangle = \langle u_2\rangle$ für $u_1, u_2 \in \mathcal{U}$ vorausgesetzt:

$$
\begin{array}{ccc}
 & \bigwedge\limits_{t_0\le t_1} \bigwedge\limits_{x_0,x_1\in\mathcal{X}} & (t_0,x_0)\langle u_1\rangle(t_1,x_1) \Leftrightarrow (t_0,x_0)\langle u_2\rangle(t_1,x_1) \\
\overset{\Gamma}{\Rightarrow} & \bigwedge\limits_{t_0\le t_1} \bigwedge\limits_{x_0,x_1\in\mathcal{X}} & (t_1,t_0,x_0,w_{u_1})\Phi = x_1 \Leftrightarrow (t_1,t_0,x_0,w_{u_2})\Phi = x_1 \\
\Rightarrow & \bigwedge\limits_{t_0\le t_1} \bigwedge\limits_{x_0\in\mathcal{X}} & (t_1,t_0,x_0,w_{u_1})\Phi = (t_1,t_0,x_0,w_{u_2})\Phi \\
\overset{3.V}{\Rightarrow} & & u_1 = u_2 \qquad .
\end{array}
$$

Also ist $\langle\cdot\rangle$ injektiv.

Nun werden die Surjektivität und Injektivität der erweiterten Abbildung $\langle\cdot\rangle$ nachgewiesen:

(iii) Zur Surjektivität:
Es sei $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$, d.h. $\Omega(t) \in \mathcal{R}$ für alle $t \in [t_0,t_1)$. Das heißt also, für alle $t \in [t_0,t_1)$ gilt $\Omega(t) = \langle u_t\rangle$ für ein geeignetes $u_t \in \mathcal{U}$. Setzt man nun die Abbildung $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ folgendermaßen an:

$$w(t) := u_t \text{ für alle } t \in [t_0,t_1) \qquad , \tag{C.2}$$

so folgt für alle $t \in [t_0,t_1)$:

$$\langle w\rangle(t) \overset{(C.1)}{=} \langle w(t)\rangle \overset{(C.2)}{=} \langle u_t\rangle = \Omega(t) \qquad .$$

Es gilt somit $\langle w\rangle \equiv \Omega$.

(iv) Zur Injektivität:
Vorgegeben seien $w_1, w_2 \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ mit $\langle w_1\rangle = \langle w_2\rangle$.

$$
\begin{array}{cccl}
\langle w_1\rangle = \langle w_2\rangle & \Rightarrow & \langle w_1\rangle(t) = \langle w_2\rangle(t) & \text{für alle } t \in [t_0,t_1) \\
 & \overset{(C.1)}{\Rightarrow} & \langle w_1(t)\rangle = \langle w_2(t)\rangle & \text{für alle } t \in [t_0,t_1) \\
 & \overset{(ii)}{\Rightarrow} & w_1(t) = w_2(t) & \text{für alle } t \in [t_0,t_1) \\
 & \Rightarrow & w_1 \equiv w_2 \qquad . &
\end{array}
$$

□

Lemma C.2

Die Umkehrabbildung von $\langle\cdot\rangle$

$$\rangle\cdot\langle \; : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{R} & \longrightarrow & \mathcal{U} \\ \mathfrak{L} & \longmapsto & \rangle\mathfrak{L}\langle \end{array} \right.$$

ist ebenfalls eine Bijektion und kann entsprechend fortgesetzt werden zu einer Bijektion $\rangle\cdot\langle : \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} \longrightarrow \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ für beliebige $t_0 \le t_1$ durch die Definition

$$\rangle\Omega\langle(t) := \rangle\Omega(t)\langle \qquad . \tag{C.3}$$

Beweis

Da $\langle\cdot\rangle : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ bijektiv ist, stellt auch die Umkehrabbildung $\rangle\cdot\langle : \mathcal{R} \longrightarrow \mathcal{U}$ eine Bijektion dar.

$$\rangle\cdot\langle \ : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} & \longrightarrow & \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} \\ \Omega & \longmapsto & \rangle\Omega\langle \end{array} \right.$$

ist eine Bijektion, denn für $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ ist $\Omega := \langle w\rangle$ ein Urbild, wodurch die Surjektivität belegt wird. Die Injektivität folgt analog zum Beweisteil (iv) von Lemma C.1 aus der Injektivität von $\rangle\cdot\langle$. □

Bemerkung C.1

Zu jedem $\Omega \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ gibt es also genau ein $w \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ mit $\Omega = \langle w\rangle$. Für dieses w gilt

$$w(t) = \rangle\Omega(t)\langle \text{ für alle } t \in [t_0, t_1). \tag{C.4}$$

Die beiden erweiterten Bijektionen $\langle\cdot\rangle$ und $\rangle\cdot\langle$ kehren also einander um.

Lemma C.3

Es gilt für $w_1 \in \mathcal{U}^{[t_0,t^*)}$ und $w_2 \in \mathcal{U}^{[t^*,t_1)}$ stets

$$\langle w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2\rangle = \langle w_1\rangle \overset{t^*}{\vee} \langle w_2\rangle \tag{C.5}$$

für die Konkatenation der beiden Funktionen w_1 und w_2 in t^*.

Beweis

Zu zeigen ist

$$\langle w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2\rangle(t) \overset{!}{=} (\langle w_1\rangle \overset{t^*}{\vee} \langle w_2\rangle)(t) \text{ f. a. } t \in [t_0, t_1).$$

1. Fall: $t \in [t_0, t^*)$:

$$\begin{array}{rcl} \langle w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2\rangle(t) & = & \langle (w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2)(t)\rangle \\ & \overset{t\in[t_0,t^*)}{=} & \langle w_1(t)\rangle \\ & \overset{t\in[t_0,t^*)}{=} & (\langle w_1\rangle \overset{t^*}{\vee} \langle w_2\rangle)(t) \quad . \end{array}$$

2. Fall: $t \in [t^*, t_1)$:

Die Behauptung wird analog zum 1. Fall mit vertauschten Rollen von w_1 und w_2 bewiesen. □

Lemma C.4

Es gilt für $\Omega_1 \in \mathcal{R}^{[t_0,t^*)}$ und $\Omega_2 \in \mathcal{R}^{[t^*,t_1)}$ stets

$$\rangle\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2\langle = \rangle\Omega_1\langle \overset{t^*}{\vee} \rangle\Omega_2\langle \quad . \tag{C.6}$$

Beweis

Der Beweis verläuft völlig analog zum Beweis von Lemma C.3. □

Satz C.1

Es sei $(\mathcal{T},\mathcal{X},\mathcal{U},\Phi)$ ein System. Dann ist die durch das Übergangsverfahren Γ definierte Struktur

$$(\mathcal{T},\mathcal{X},\mathcal{U},\Phi)\Gamma =: (\mathfrak{P},\mathcal{R},\Pi\cdot dt) \tag{C.7}$$

ein Regel–Relativ.

Beweis

Zu zeigen sind die Axiome 3.I–3.V eines Regel–Relativs für ein gemäß Γ definiertes Relativ $(\mathfrak{P},\mathcal{R},\Pi\cdot dt) := (\mathcal{T},\mathcal{X},\mathcal{U},\Phi)\Gamma$.

zu 3.I: Es sei $x\in\mathcal{X}$. Wegen der Nicht-Trivialität B.I existiert ein Paar $t_0 < t_1 \in \mathcal{T}$ und $w\in\mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ mit

$$(t_1,t_0,x,w)\in\mathfrak{D}_\Phi \qquad .$$

Es gilt also $(t_1,t_0,x_0,w)\Phi = x_1$ für ein $x_1\in\mathcal{X}$. Setze $\Omega := \langle w\rangle \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$. Dann gilt nach Gl. (3.17) $(t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1,x_1)$ und somit $(t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big]\neq\emptyset$.

zu 3.II: Die Prämisse

$$(t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1,x_1)\ \wedge\ (t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1,x_1')$$

bedeutet nach Gl. (3.17)

$$(t_1,t_0,x_0,w)\Phi = x_1\ \wedge\ (t_1,t_0,x_0,w)\Phi = x_1'$$

mit $w\in\mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ und $\Omega=\langle w\rangle$. Da Φ eine Funktion ist, folgt $x_1 = x_1'$.

zu 3.III: Nachzuweisen ist

$$\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big]\circ\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big] \stackrel{!}{=} [\Pi_{t_0}^{t_1}(\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2)dt] \qquad .$$

$\stackrel{!}{\subset}$ Es seien (t_0,x_0) und $(t_1,x_1)\in\mathfrak{P}$ mit

$$(t_0,x_0)\left(\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big]\circ\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big]\right)(t_1,x_1)$$

gegeben.

$$\begin{aligned}
& && (t_0,x_0)\left(\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big]\circ\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big]\right)(t_1,x_1)\\
\Rightarrow &\ \bigvee_{(t^*,x^*)\in\mathfrak{P}} && (t_0,x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big](t^*,x^*)\ \wedge\ (t^*,x^*)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big](t_1,x_1)\\
\stackrel{(3.17)}{\Rightarrow} &\ \bigvee_{(t^*,x^*)\in\mathfrak{P}} && (t^*,t_0,x_0,w_1)\Phi = x^*\ \wedge\ (t_1,t^*,x^*,w_2)\Phi = x_1\\
\stackrel{B.III}{\Rightarrow} & && (t_1,t_0,x_0,(w_1 \overset{t^*}{\vee} w_2))\Phi = x_1\\
\stackrel{\text{Lemma C.3}}{\Rightarrow} & && (t_0,x_0)[\Pi_{t_0}^{t_1}(\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2)dt](t_1,x_1) \qquad .
\end{aligned}$$

$\overset{!}{\supset}$ Vorausgesetzt wird $(t_0, x_0)[\Pi_{t_0}^{t_1}(\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2)](t_1, x_1)$ für $(t_0, x_0), (t_1, x_1) \in \mathfrak{P}$. Nach Gl. (3.17) gilt also wegen Bemerkung C.1

$$(t_0, t_1, x_0, w)\Phi = x_1$$

mit $w = \rangle\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2\langle$. Damit folgt

$$w_1 := w_{[t_0,t^*)} = \rangle\Omega_1\langle \;\wedge\; w_2 := w_{[t^*,t_1)} = \rangle\Omega_2\langle \qquad .$$

Mit der Zerlegungseigenschaft in Bemerkung B.1(i) erhält man

$$(t^*, t_0, x_0, w_1)\Phi = x^* \;\wedge\; (t_1, t^*, x^*, w_2)\Phi = x_1 \text{ für ein } x^* \in \mathcal{X}.$$

Unter Berücksichtigung von Gl. (3.17) ergibt sich

$$(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big](t^*, x^*) \;\wedge\; (t^*, x^*)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big](t_1, x_1),$$

woraus die Behauptung folgt.

zu 3.IV: Nachzuweisen ist $\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\mathfrak{L}dt\Big] \overset{!}{=} \mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}$ für beliebige $\mathfrak{L} \in \mathcal{R}$.
Wegen Gl. (3.15) gilt $\mathfrak{L} = \langle u\rangle$ für ein $u \in \mathcal{U}$. Zu zeigen ist also

$$\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\langle u\rangle dt\Big] \overset{!}{=} \langle u\rangle|_{t_0}^{t_1} \qquad .$$

Es gilt $\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\langle u\rangle dt\Big] = \Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega_{\langle u\rangle} dt\Big]$ mit $\Omega_{\langle u\rangle}(t) = \langle u\rangle = \langle w_u(t)\rangle$ für $t \in [t_0, t_1)$ und damit

$$\begin{aligned}(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\langle u\rangle dt\Big](t_1, x_1) &\overset{(3.17)}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x_0, w_u)\Phi = x_1\\ &\Leftrightarrow (t_0, x_0)\langle u\rangle(t_1, x_1)\\ &\overset{(3.9)}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\langle u\rangle|_{t_0}^{t_1}(t_1, x_1)\ .\end{aligned}$$

zu 3.V: Nach der Identitätseigenschaft B.IV gilt $(t_0, t_0, x, \Diamond)\Phi = x$ für die leere Abbildung $\Diamond \in \mathcal{U}^{[t_0,t_0)}$ mit beliebigem $t_0 \in \mathcal{T}$. Damit gilt nach Gl. (3.17)

$$(t_0, x)\Big[\Pi_{t_0}^{t_0}\Diamond dt\Big](t_0, x)$$

für die leere Abbildung $\Diamond \in \mathcal{R}^{[t_0,t_0)}$. □

Satz C.2

$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ sei ein Regel-Relativ. Dann ist

$$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)\ \mathrm{L} =: (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) \tag{C.8}$$

ein System.

Beweis

Die Abbildungseigenschaft von Φ aus der Grundvoraussetzung folgt aus der Eigenschaft 3.II des Regel–Relativs.

Zum Nachweis der Axiome B.I–B.V:

zu B.I: Es sei $x_0 \in \mathcal{X}$ beliebig vorgegeben. Nach Axiom 3.I existieren $t_0 < t_1 \in \mathcal{T}$ und $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} = \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$, so daß

$$(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big] \neq \emptyset$$

erfüllt ist. Gemäß Gl. (3.12) folgt $(t_1, t_0, x_0, \rangle\Omega\langle) \in \mathfrak{D}_\Phi$.

zu B.II: Es sei $w = \Omega \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ anwendbar auf $x_0 \in \mathcal{X}$. Es gelte also $(t_1, t_0, x_0, \Omega) \in \mathfrak{D}_\Phi$, was gemäß Gl. (3.13) bedeutet

$$(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big] \neq \emptyset \qquad . \tag{C.9}$$

Ferner sei nun $t^* \in [t_0, t_1)$ beliebig aber fest gegeben. Gesetzt wird

$$\Omega_1 := \Omega|_{[t_0,t^*)} \in \mathcal{U}^{[t_0,t^*)} \quad , \quad \Omega_2 := \Omega|_{[t^*,t_1)} \in \mathcal{U}^{[t^*,t_1)} \qquad .$$

Zunächst wird $(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big] \overset{!}{\neq} \emptyset$ gezeigt.

Angenommen, es gilt $(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big] = \emptyset$. Dann ist richtig

$$\begin{aligned}(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big] = \emptyset \quad &\Rightarrow \quad (t_0, x_0)\left(\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big] \circ \Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big]\right) = \emptyset \\ &\overset{3.III}{\Rightarrow} \quad (t_0, x_0)[\Pi_{t_0}^{t_1}(\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2)dt] = \emptyset \qquad .\end{aligned}$$

Da $\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2 = \Omega$ gilt, ergibt sich ein Widerspruch zu Gl. (C.9). Es ist also gezeigt, daß $\Omega|_{[t_0,t^*)}$ auf x_0 anwendbar ist. Insbesondere folgt

$$(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big](t^*, x^*) \text{ für ein } x^* \in \mathcal{X} \qquad . \tag{C.10}$$

Weiter ist nun zu zeigen:

$$(t_1, x_1)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big] \overset{!}{\neq} \emptyset \qquad .$$

Aus Gl. (C.9) läßt sich folgern

$$\begin{aligned}(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big] \neq \emptyset \quad &\overset{3.III}{\Rightarrow} \quad (t_0, x_0)\left(\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big] \circ \Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big]\right) \neq \emptyset \\ &\Rightarrow \quad (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big](t^*, x) \wedge \\ &\qquad\; (t^*, x)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big](t_1, x_1) \text{ f. g. } x,\ x_1 \in \mathcal{X} \\ &\qquad\; (\text{nach 3.II und Gl. (C.10) gilt } x^* = x_1) \\ &\Rightarrow \quad (t^*, x^*)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big] \neq \emptyset \qquad .\end{aligned}$$

So ist auch die Anwendbarkeit von Ω_2 auf x^* gezeigt und B.II insgesamt nachgewiesen.

zu B.III: Es seien $t_0 < t^* < t_1 \in \mathcal{T}$ gegeben. Weiter seien $\Omega_1 \in \mathcal{U}^{[t_0,t^*)}$ und $\Omega_2 \in \mathcal{U}^{[t^*,t_1)}$ sowie ein Zustand $x_0 \in \mathcal{X}$ mit

$$(t^*, t_0, x_0, \Omega_1)\Phi = x^* \ \wedge \ (t_1, t^*, x^*, \Omega_2)\Phi = x_1 \text{ für geeignete } x^*,\, x_1 \in \mathcal{X} \tag{C.11}$$

gegeben. Wir setzen

$$\Omega := \Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2 \in \mathcal{U}^{[t_0,t_1)} \qquad . \tag{C.12}$$

Gl. (C.11) bedeutet gemäß Gl. (3.13)

$$(t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big](t^*, x^*) \wedge \ (t^*, x^*)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big](t_1, x_1) \qquad .$$

Damit kann man schließen:

$$\begin{aligned}
& (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big](t^*, x^*) \ \wedge (t^*, x^*)\Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big](t_1, x_1) \\
\Rightarrow \quad & (t_0, x_0)\left(\Big[\Pi_{t_0}^{t^*}\Omega_1 dt\Big] \circ \Big[\Pi_{t^*}^{t_1}\Omega_2 dt\Big]\right)(t_1, x_1) \\
\overset{3.III}{\Rightarrow} \quad & (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}(\Omega_1 \overset{t^*}{\vee} \Omega_2)dt\Big](t_1, x_1) \\
\overset{(C.11)}{\Rightarrow} \quad & (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\Omega dt\Big](t_1, x_1) \\
\overset{(3.13)}{\Rightarrow} \quad & (t_1, t_0, x_0, \Omega) \in \mathfrak{D}_\Phi \text{ mit } (t_1, t_0, x_0, \Omega)\Phi = x_1 \qquad .
\end{aligned}$$

zu B.IV: Seien $t_0 \in \mathcal{T}, x \in \mathcal{X}$ beliebig vorgegeben. Nach 3.III gilt $(t_0, x)\Big[\Pi_{t_0}^{t_0}\Diamond dt\Big](t_0, x)$, was nach Gl. (3.13) heißt $(t_0, t_0, x, \Diamond)\Phi = x$.

zu B.V: Gegeben seien $\mathfrak{L}_1, \mathfrak{L}_2 \in \mathcal{U} = \mathcal{R}$, so daß die Prämisse (B.8) von B.V erfüllt ist. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
& \bigwedge_{t_0} \ \bigwedge_{t_1 \geq t_0} \ \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} & & (t_1, t_0, x_0, w_{\mathfrak{L}_1})\Phi = (t_1, t_0, x_0, w_{\mathfrak{L}_2})\Phi \\
\overset{(3.13)}{\Leftrightarrow} \quad & \bigwedge_{t_0} \ \bigwedge_{t_1 \geq t_0} \ \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} & & (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\mathfrak{L}_1 dt\Big] = (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1}\mathfrak{L}_2 dt\Big] \\
\overset{3.IV}{\Rightarrow} \quad & \bigwedge_{t_0} \ \bigwedge_{t_1 \geq t_0} \ \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} & & (t_0, x_0)\mathfrak{L}_1|_{t_0}^{t_1} = (t_0, x_0)\mathfrak{L}_2|_{t_0}^{t_1} \\
\Leftrightarrow \quad & \bigwedge_{t_0} \ \bigwedge_{t_1 \geq t_0} \ \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \ \bigwedge_{x_1 \in \mathcal{X}} & & (t_0, x_0)(\mathfrak{L}_1|_{t_0}^{t_1})(t_1, x_1) \Leftrightarrow (t_0, x_0)(\mathfrak{L}_2|_{t_0}^{t_1})(t_1, x_1) \\
\Leftrightarrow \quad & \bigwedge_{t_0} \ \bigwedge_{t_1 \geq t_0} \ \bigwedge_{x_0 \in \mathcal{X}} \ \bigwedge_{x_1 \in \mathcal{X}} & & (t_0, x_0)\mathfrak{L}_1(t_1, x_1) \Leftrightarrow (t_0, x_0)\mathfrak{L}_2(t_1, x_1) \qquad .
\end{aligned}$$

Das bedeutet aber, daß die Relationen $\mathfrak{L}_1$ und $\mathfrak{L}_2$ übereinstimmen. □

Satz C.3

Für jedes Regel–Relativ $(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ gilt

$$(\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)\ \mathrm{L}\Gamma = (\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)\ . \tag{C.13}$$

Beweis

Zunächst gilt nach den Sätzen C.2 und C.1, daß

$$(\mathfrak{P}' = \mathcal{T}' \times \mathcal{X}', \mathcal{R}', \Pi' \cdot dt) := (\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt) \; \mathrm{L}\Gamma$$

ein Regel–Relativ ist, wobei durch die Übergangsverfahren sowohl die Zeitmenge $\mathcal{T}$ als auch die Menge der Zustände $\mathcal{X}$ unverändert bleiben:

$$\mathcal{T}' = \mathcal{T} \text{ und } \mathcal{X}' = \mathcal{X} \Rightarrow \mathfrak{P}' = \mathfrak{P} \qquad .$$

Zu zeigen bleibt also:

(i) $\mathcal{R}' \stackrel{!}{=} \mathcal{R}$

(ii) $\Pi' \cdot dt \stackrel{!}{=} \Pi \cdot dt \qquad .$

Für den Beweis sei $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) := (\mathfrak{P}, \mathcal{R}, \Pi \cdot dt)$ L gesetzt.

zu (i): Nach Gl. (3.15) im Übergangsverfahren Γ gilt

$$\mathcal{R}' = \{\langle u \rangle | u \in \mathcal{U}\} \qquad ,$$

wobei $\mathcal{U}$ gemäß Gl. (3.11) definiert ist, d.h. es gilt $\mathcal{U} = \mathcal{R}$ und damit

$$\mathcal{R}' = \{\langle \mathfrak{L} \rangle | \mathfrak{L} \in \mathcal{R}\} \qquad . \tag{C.14}$$

Es gilt

$$(t_0, x)\langle \mathfrak{L} \rangle (t_1, y) \stackrel{(3.16)}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x, w_{\mathfrak{L}})\Phi = y \qquad ,$$

wobei $w_{\mathfrak{L}} \in \mathcal{U}^{[t_0, t_1)} = \mathcal{R}^{[t_0, t_1)}$ gemäß $w_{\mathfrak{L}}(t) = \mathfrak{L}$ für alle $t \in [t_0, t_1)$ definiert ist. Gezeigt wird nun, daß gilt

$$\mathfrak{L} \stackrel{!}{=} \langle \mathfrak{L} \rangle \text{ für alle } \mathfrak{L} \in \mathcal{R} \qquad , \tag{C.15}$$

woraus offensichtlich wegen (C.14) die Behauptung $\mathcal{R} = \mathcal{R}'$ folgt.
Zum Nachweis von Gl. (C.15):

$$\begin{aligned}
(t_0, x_0)\langle \mathfrak{L} \rangle (t_1, x_1) &\stackrel{(3.16)}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x_0, w_{\mathfrak{L}})\Phi = x_1 \\
&\stackrel{(3.13)}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\left[\Pi_{t_0}^{t_1} w_{\mathfrak{L}} dt\right](t_1, x_1) \\
&\Leftrightarrow (t_0, x_0)\left[\Pi_{t_0}^{t_1} \mathfrak{L} dt\right](t_1, x_1) \\
&\stackrel{3.IV}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\left(\mathfrak{L}|_{t_0}^{t_1}\right)(t_1, x_1) \\
&\stackrel{(3.9)}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\mathfrak{L}(t_1, x_1) \qquad .
\end{aligned}$$

zu (ii): Die Behauptung $\Pi' \cdot dt \overset{!}{=} \Pi \cdot dt$ ist gezeigt, wenn man für alle $t_0 \leq t_1$ und alle $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ nachweist:

$$\left[\Pi'^{t_1}_{t_0} \Omega dt\right] \overset{!}{=} \left[\Pi^{t_1}_{t_0} \Omega dt\right] \qquad .$$

Seien also $t_0 \leq t_1$ und $\Omega \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)}$ beliebig vorgegeben.
Setze $w := \rangle\Omega\langle$. Damit kann man schließen:

$$\begin{array}{rcll} w = \rangle\Omega\langle & \overset{\text{Bem. C.1}}{\Leftrightarrow} & w(t) = \rangle\Omega(t)\langle & \text{für alle } t \in [t_0, t_1) \\ & \overset{\text{Lemma C.2}}{\Leftrightarrow} & \langle w(t)\rangle = \Omega(t) & \text{für alle } t \in [t_0, t_1) \\ & \overset{(i)}{\Rightarrow} & w(t) = \Omega(t) & \text{für alle } t \in [t_0, t_1) \\ & \Rightarrow & w = \Omega & . \end{array}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{array}{rcl} (t_0, x_0)\left[\Pi'^{t_1}_{t_0} \Omega dt\right](t_1, x_1) & \overset{(3.17)}{\Leftrightarrow} & (t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \\ & \overset{(3.13)}{\Leftrightarrow} & (t_0, x_0)\left[\Pi^{t_1}_{t_0} w dt\right](t_1, x_1) \\ & \Leftrightarrow & (t_0, x_0)\left[\Pi^{t_1}_{t_0} \Omega dt\right](t_1, x_1) \qquad . \end{array}$$

□

Satz C.4
Für jedes System $(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)$ gilt

$$(\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma\mathrm{L} \cong (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi) \qquad . \tag{C.16}$$

Beweis
Zunächst gilt nach den Sätzen C.1 und C.2, daß

$$(\mathcal{T}', \mathcal{X}', \mathcal{U}', \Phi') := (\mathcal{T}, \mathcal{X}, \mathcal{U}, \Phi)\Gamma\mathrm{L}$$

ein System ist, für das jedenfalls $\mathcal{T}' = \mathcal{T}$ und $\mathcal{X}' = \mathcal{X}$ gilt. Um die geforderte Isomorphie nachzuweisen, sind nach Definition B.2 zwei Bijektionen

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X}'(= \mathcal{X}) \\ x & \longmapsto & x\varphi \end{array} \right. \quad , \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U}' \\ u & \longmapsto & u\psi \end{array} \right.$$

anzugeben, die den gewünschten Operationstreue–Eigenschaften genügen.
Wir machen folgenden Ansatz:

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \longrightarrow & \mathcal{X} \\ x & \longmapsto & x\varphi := x \end{array} \right. \quad , \quad \psi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{U} & \longrightarrow & \mathcal{U}' \\ u & \longmapsto & u\psi := \langle u \rangle \end{array} \right. \qquad . \tag{C.17}$$

Da Injektivität und Surjektivität der Abbildungen offensichtlich sind (vgl. Lemma C.1), ist nur noch zu zeigen:

(a) $(t_1, t_0, x_0, w) \in \mathfrak{D}_\Phi \overset{!}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x_0\varphi, w \circ \psi) \in \mathfrak{D}_{\Phi'} \overset{(C.17)}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x_0, \langle w \rangle) \in \mathfrak{D}_\Phi$.

(b) $((t_1, t_0, x_0, w)\Phi)\varphi \stackrel{!}{=} (t_1, t_0, x_0\varphi, w \circ \psi)\Phi' \stackrel{(C.17)}{=} (t_1, t_0, x_0, \langle w \rangle)\Phi'$.

zu (a): Seien $t_0 \leq t_1$, $x_0 \in \mathcal{X}$, $\langle w \rangle \in \mathcal{R}^{[t_0,t_1)} \stackrel{(3.13)}{=} \mathcal{U}^{[t_0,t_1)}$ gegeben. Dann gilt:

$$
\begin{aligned}
(t_1, t_0, x_0, \langle w \rangle) \in \mathfrak{D}_{\Phi'} &\stackrel{(3.13)}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \langle w \rangle dt\Big] \neq \emptyset \\
&\Leftrightarrow (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \langle w \rangle dt\Big](t_1, x_1) \quad \text{für ein } x_1 \in \mathcal{X} \\
&\stackrel{(3.17)}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \quad \text{für ein } x_1 \in \mathcal{X} \\
&\Leftrightarrow (t_1, t_0, x_0, w) \in \mathfrak{D}_{\Phi} \quad .
\end{aligned}
$$

zu (b):

$$
\begin{aligned}
(t_1, t_0, x_0, \langle w \rangle)\Phi' = x_1 \in \mathcal{X} &\stackrel{(3.17)}{\Leftrightarrow} (t_0, x_0)\Big[\Pi_{t_0}^{t_1} \langle w \rangle dt\Big](t_1, x_1) \\
&\stackrel{(3.13)}{\Leftrightarrow} (t_1, t_0, x_0, w)\Phi = x_1 \quad .
\end{aligned}
$$

□